ストリングトポロジーを利用したLegendre接触ホモロジーの研究

京都大学大学院 理学研究科 数理解析専攻
岡本幸大 (Yukihiro OKAMOTO) *

概要

接触多様体の Legendre 部分多様体に対して、Legendre 接触ホモロジーと呼ばれるアイソトピー不変量がある。これは Floer 理論の一部であり、良い条件の下、擬正則曲線を用いて定義される。しかし現状、具体例に関する研究は低次元 (Legendre 結び目) を除くと未発達である。本講演では部分多様体の単位余法束 (これは単位余接束の Legendre 部分多様体である) の Legendre 接触ホモロジーを考え、ストリングトポロジーを利用した研究を紹介する。

1 導入

1.1 シンプレクティック多様体と擬正則曲線

本稿では多様体および部分多様体は全て滑らかなものとする.

定義 1.1. W を $2n$ 次元多様体, L を W の n 次元部分多様体とする.

1. $\omega \in \Omega^2(W)$ を W 上の閉 2-形式とする. ω が非退化であるとき, ω を**シンプレクティック形式**と呼び, 組 (W, ω) を**シンプレクティック多様体**と呼ぶ.
2. $\omega|_L = 0 \in \Omega^2(L)$ が成り立つとき, L を (W, ω) の **Lagrange 部分多様体**であるという.

$J \in \mathrm{End}(TW)$ を W 上の概複素構造とする. テンソル $g_J := \omega(\cdot, J\cdot) \colon TW^{\otimes 2} \to \mathbb{R}$ が W 上の Riemann 計量となるとき, J は ω に**整合的**であるという. (ω に整合的な概複素構造全体の空間は空でなく, さらに可縮である.)

定義 1.2. (Σ, j) を Riemann 面とする (j は複素構造). 滑らかな写像 $u \colon \Sigma \to W$ が非線形 Cauchy-Riemann 方程式

$$(du)^{0,1} = 0 \tag{1}$$

を満たすとき、u を**擬正則曲線**と呼ぶ. ここで $(du)^{0,1} := \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j) \in \Omega^{0,1}(u^*TW)$ は du の反 $\mathbb{C}$-線形部分である.

Σ の局所座標 $z = s + \sqrt{-1}t$ を取った時, 方程式 (1) は局所的に $\partial_s u + J\partial_t u = 0$ と表せる. これは

* yukihiro@kurims.kyoto-u.ac.jp

楕円型偏微分方程式である. また, 本稿で扱う Σ は全て境界付きである. このとき一般に, $\partial\Sigma$ の各連結成分 $\partial_\alpha\Sigma$ に対して Lagrange 部分多様体 $L_\alpha \subset W$ を選び, 擬正則曲線 $u\colon \Sigma \to W$ に対して境界条件 $u(\partial_\alpha\Sigma) \subset L_\alpha$ を課す. これは非線形 Cauchy-Riemann 写像に対して Fredholm 性を成立させるためである. 理想的な条件の下, 境界条件を課した擬正則曲線全体の空間は有限次元多様体の構造を持ち, さらに「Gromov コンパクト化」と呼ばれるコンパクト化が存在する. 詳細は [9] を参照する.

Gromov の 1985 年の論文から始まり, 擬正則曲線の空間 (モジュライ空間) を幾何学的に調べることでシンプレクティック多様体や Lagrange 部分多様体の研究が発展した. 特に Hamiltonian Floer ホモロジーや Lagrangian Floer ホモロジーなどの代数的な不変量が, 次元が 0 のモジュライ空間に属する擬正則曲線の個数を数えることで定義され, その計算や代数的性質の解明が進められてきた.

1.2 Legendre 接触ホモロジー

定義 1.3. M を $(2n-1)$ 次元多様体, Λ を M の $(n-1)$ 次元部分多様体とする.

1. M 上の 1-形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$ が任意の $x \in M$ において次の条件を満たすとき, α を M 上の**接触形式**であるという:

$$\alpha_x \neq 0 \text{ かつ } (d\alpha)_x|_{\operatorname{Ker}\alpha_x} \text{ は非退化である.}$$

組 (M, α) を接触形式 α を持つ**接触多様体**と呼ぶ.

2. $\alpha|_\Lambda = 0 \in \Omega^1(\Lambda)$ を満たすとき, Λ は (M, α) の **Legendre 部分多様体**であるという.
3. 接触形式 α に対して, M 上のベクトル場 R_α が条件

$$\iota_{R_\alpha}\alpha = 1,\ \iota_{R_\alpha}(d\alpha) = 0$$

によって一意に定まる. これを α に付随する **Reeb ベクトル場**と呼ぶ. R_α の積分曲線 $c\colon [0, T] \to M$ $(T > 0)$ であって $c(0), c(T) \in \Lambda$ を満たすものを, Λ の **Reeb コード**と呼ぶ.

2 つの Legendre 部分多様体 Λ_0, Λ_1 に対して, Λ_0 から Λ_1 への部分多様体のアイソトピー $(\Lambda_t)_{0\le t\le 1}$ であって, 全ての $t \in [0, 1]$ において Λ_t が Legendre 部分多様体であるものが存在するとき, Λ_0 は Λ_1 に **Legendre アイソトピック**であるという. 接触幾何の問題として, この同値関係による Legendre 部分多様体の分類がある. この章で導入する **Legendre 接触ホモロジー**は Legendre アイソトピーに関する不変量であり, この問題を解くための強力な道具である.

接触多様体 (M, α) とその Legendre 部分多様体 Λ に対して, シンプレクティック多様体 $(\mathbb{R} \times M, d(e^r\alpha))$ と Lagrange 部分多様体 $\mathbb{R} \times \Lambda$ が付随する (r は $\mathbb{R}$ の座標である). $\mathbb{R} \times M$ 内の擬正則曲線 (境界条件は $\mathbb{R} \times \Lambda$ で与えられる) を利用した接触多様体や Legendre 部分多様体の不変量は, Chekanov[3] や Eliashberg[7] によって導入され, 現在は「シンプレクティック場の理論」の一部と見なされている.

不変量の定義の準備を行う. まず, $D \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ とする. $\mathbf{p} = \{1, p_1, \ldots, p_m\} \subset \partial D$ ($1, p_1, \ldots, p_m$ は $1 \in \partial D$ から時計回りに並べた順序) に対して境界付き Riemann 面 $D_{\mathbf{p}} \coloneqq D \setminus \mathbf{p}$ を定義する. 各点 $1, p_1, \ldots, p_m$ に対して双正則写像 $\begin{cases} \psi_0\colon [0,\infty) \times [0,1] \to D \setminus \{1\}, \\ \psi_k\colon (-\infty, 0] \times [0,1] \to D \setminus \{p_k\}\ (k = 1, \ldots, m) \end{cases}$

は $\begin{cases}\psi_0([0,\infty)\times\{0,1\})\subset\partial D\setminus\{1\},\\ \psi_k((-\infty,0]\times\{0,1\})\subset\partial D\setminus\{p_k\},\end{cases}$ 及び $t\in[0,1]$ について一様に $\begin{cases}\lim_{s\to\infty}\psi_0(s,t)=1,\\ \lim_{s\to-\infty}\psi_k(s,t)=p_k,\end{cases}$
を満たすものとする.

さらに $s\in\mathbb{R}$ に対して, $\tau_s\colon\mathbb{R}\times M\to\mathbb{R}\times M\colon(r,x)\mapsto(r+s,x)$ とする. J を $d(e^r\alpha)$ に整合的な $\mathbb{R}\times M$ 上の概複素構造であって, $J(\partial_r)=R_\alpha$ かつ全ての $s\in\mathbb{R}$ に対して $\tau_s^*J=J$ を満たすものとする.

本稿では [5, 6] の結果を参照する. そのために以下の技術的な仮定を置く:

- $c_1(TP)=0$ を満たす Liouville 多様体 (P,λ) と微分同相 $\varphi\colon M\to P\times\mathbb{R}$ が存在し, $\varphi^*(dz+\lambda)=\alpha$ が成り立つ (z は $\mathbb{R}$ の座標である).
- Λ はコンパクトなスピン多様体である. さらに Maslov class と呼ばれる $H^1(\Lambda,\mathbb{Z})$ の元が 0 である.

この時, generic な Λ と J に対して次数付き R-微分代数 $(\mathcal{A}_*(\Lambda),\partial)$ が定義される [5, 6]. ただし本稿では $R\in\{\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda)]\}$ とする. そのホモロジー

$$\mathrm{LCH}_*(M,\Lambda;R)\coloneqq\operatorname{Ker}\partial/\operatorname{Im}\partial$$

を (M,Λ) の **Legendre 接触ホモロジー**と呼ぶ. この次数付き R-代数の同型類は J の取り方に依らず, さらに Λ の Legendre アイソトピーで不変である.

次に, $(\mathcal{A}_*(\Lambda),\partial)$ の構成について説明する. $\mathcal{A}_*(\Lambda)$ は Λ の Reeb コード全体で自由に生成された単位的非可換な次数付き R-代数である. ここで Reeb コードの次数は「Maslov 指数」を用いて定義される. $\partial\colon\mathcal{A}_*(\Lambda)\to\mathcal{A}_{*-1}(\Lambda)$ は $R\in\{\mathbb{Z},\mathbb{R}\}$ の場合, 次の式によって定義される微分写像である:

$$\partial c\coloneqq\sum_{|c_1|+\cdots+|c_m|=|c|-1}\#_{\mathrm{sign}}\left(\mathcal{M}_J(c;c_1,\ldots,c_m)/\mathbb{R}\right)c_1\cdots c_m$$

ただし, $\#_{\mathrm{sign}}$ は向きを考慮して数えた個数を表す. ($R=\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda)]$ の場合は省略する.) ここで, Λ の Reeb コード $c\colon[0,T]\to M,\ c_k\colon[0,T_k]\to M\ (k=1,\ldots,m)$ に対して, $\mathcal{M}_J(c;c_1,\ldots,c_m)$ は J についての擬正則曲線 $u\colon D_{\mathbf{p}}\to\mathbb{R}\times M$ ($\mathbf{p}=\{1,p_1,\ldots,p_m\}$) であって, 以下の条件を満たすもののモジュライ空間である:

- $u(\partial D_{\mathbf{p}})\subset\mathbb{R}\times\Lambda$.
- $s_0,s_1,\ldots,s_m\in\mathbb{R}$ が存在し,

$$\begin{cases}\lim_{s\to\infty}(\tau_{-s}\circ u\circ\psi_0)(s,t)=(s_0,c(Tt)),\\ \lim_{s\to-\infty}(\tau_{-s}\circ u\circ\psi_k)(s,t)=(s_k,c_k(T_kt))\quad(k=1,\ldots,m),\end{cases}$$

  が成り立つ. ただし収束に関する正確な定義は [5] を見よ.

この空間の上には自然な $\mathbb{R}$ 作用 $s\cdot u\coloneqq\tau_s\circ u\ (s\in\mathbb{R})$ が存在する. $\mathcal{M}_J(c;c_1,\ldots,c_m)/\mathbb{R}$ は有限次元多様体の構造を持ち, Λ のスピン構造から向きが定められる. その次元は $|c|-1-\sum_{k=1}^m|c_k|$ で与えられる.

本講演ではこの Legendre アイソトピー不変量を, 以下で定義される接触多様体と Legendre 部分多様体の組 (UT^*Q,Λ_K) に適用する: 一般に Q を多様体, K をその部分多様体とする. 余

接束 T^*Q は標準的な Liouville 形式 λ_Q を持つ．Q 上に Riemann 計量を与えた時, 単位余接束 $UT^*Q \coloneqq \{(q,p) \in T^*Q \mid |p| = 1\}$ は標準的な接触形式 $\alpha_Q \coloneqq \lambda_Q|_{UT^*Q}$ を持つ．さらに, K の単位余法束

$$\Lambda_K \coloneqq \{(q,p) \in UT^*Q \mid q \in K,\ p|_{T_qK} = 0\}$$

は (UT^*Q, α_Q) の Legendre 部分多様体である．特に, $Q = \mathbb{R}^n$ かつ標準的な計量が与えられたとき, 微分同相

$$\varphi\colon UT^*\mathbb{R}^n \to T^*S^{n-1} \times \mathbb{R}\colon (q,p) \mapsto ((p, q - \langle q,p\rangle p), \langle q,p\rangle)$$

について $\varphi^*(dz + \lambda_{S^{n-1}}) = \alpha_{\mathbb{R}^n}$ が成り立つ．従って [5, 6] の結果から, K の単位余法束の Legendre 接触ホモロジー

$$\mathrm{LCH}_*(UT^*\mathbb{R}^n, \Lambda_K; R)$$

が定義される．

注意 1.4. $\mathrm{LCH}_*(UT^*Q, \Lambda_K)$ は $Q = \mathbb{R}^n$ 以外の場合でも適当な条件の下で定義可能だと思われるが, 講演者が知る限り, 現時点で厳密な構成を与えた文献は存在しない．

2 Floer 理論とストリングトポロジー

擬正則曲線とループ及びパス空間の関係は Floer 理論の研究の中で注目されてきた．代表的な結果として以下が知られている．(ホモロジーは全て $\mathbb{Z}$ 係数とする．証明は [1] を参照せよ.)

定理 2.1. Q を閉スピン多様体とする．このとき, T^*Q のシンプレクティックコホモロジーは, Q の自由ループ空間のホモロジーと同型である．この同型を通して, シンプレクティックコホモロジーの pair-of-pants 積はループ空間のホモロジー上の Chas-Sullivan 積に一致する．

第一の主張は「Viterbo の定理」と呼ばれる [12]. 第二の主張に現れる Chas-Sullivan 積とは [2] によって創始された**ストリングトポロジー**の一部である．これはパスの連結や分裂からホモロジーに誘導される代数的操作を研究する代数的トポロジーの一分野である．

Q を Riemann 多様体, K を Q のコンパクト部分多様体とする．あるクラスの組 (Q,K) に対して (UT^*Q, Λ_K) の Legendre 接触ホモロジーが定義されたとする．すると, 次の naive な主張が成り立つことが期待される:

主張. 各 (Q,K) に対して純粋にトポロジー的な手法で定義される, すなわち擬正則曲線を用いない, 次数付き R-代数であって, 次を満たすものが構成できる:

- 同型類は K の滑らかなアイソトピーで不変である．
- $\mathrm{LCH}_*(UT^*Q, \Lambda_K; R)$ と同型である．

この主張は $Q = \mathbb{R}^3$ かつ K が結び目の場合には既に確認されている． Cieliebak, Ekholm, Latschev, Ng は [4] において, $\operatorname{codim} K = 2$ かつ向き付けられた組 (Q,K) に対して, 「**ストリングホモロジー**」と呼ばれる次数付き $\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_K)]$-代数を定義した．本稿ではこれを $H_*^{\mathrm{CELN}}(Q,K)$ と書

く．この名前は構成にストリングトポロジーのアイデアを用いていることに由来する．このアイデアについては次章及び講演内で説明する．

K が $Q=\mathbb{R}^3$ 内の結び目であるとき, 彼らは次の二つの結果を証明した.

定理 2.2. [4]

(i) 次数 0 の部分 $H_0^{\mathrm{CELN}}(\mathbb{R}^3, K)$ は, K の**コード代数**と同型である． このコード代数とは, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ と $\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_K)]$ で生成された代数である．(定義は [4, 10] を参照せよ.)

(ii) $\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_K)]$-代数の同型

$$\mathrm{LCH}_0^{\mathrm{refine}}(UT^*\mathbb{R}^3, \Lambda_K; \mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_K)]) \cong H_0^{\mathrm{CELN}}(\mathbb{R}^3, K)$$

が存在する．ここで, $\mathrm{LCH}_*^{\mathrm{refine}}$ は 1.2 章で述べた不変量 LCH_* の精密化を意味する.

結果 (ii) は $Q=\mathbb{R}^3$ かつ K が結び目の場合に, 先に述べた naive な主張が次数 0 において成立することを意味し, 結果 (i) はそのトポロジー的な表示の次数 0 の部分について, 具体的な計算が可能であることを保証する.

本研究は彼らの $H_*^{\mathrm{CELN}}(Q, K)$ の構成を拡張することで, $\mathrm{LCH}_p(UT^*Q, \Lambda_K; R)$ のトポロジー的な表示を Q の次元, K の余次元, 次数 p に制約なく与えること, そして得られたトポロジー的な表示を計算することで, Legendre 部分多様体の分類へ応用することを目指している.

注意 2.3. [4] でも述べられているが, 結果 (ii) は 一般の $\mathbb{R}^n$ と $\operatorname{codim} K = 2$ の $K \subset \mathbb{R}^n$ に対しても成り立つと予想される．しかし (ii) の同型が高次数でも成立するかは不明である.

3 主結果

[11] で講演者が得た主結果は次のように述べられる:

- 一般の向き付けられた多様体とその向き付けられた部分多様体の組 (Q, K) に対して, ある次数付き $\mathbb{R}$-代数 $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ を, トポロジー的な手法のみを用いて構成した.

ここで, K の余次元に制約が無く, 全ての次数で定義されていることに注意する． さらに, この $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ に関する基本的な性質を示した.

命題 3.1. [11]

1. $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ は K の滑らかなアイソトピーで不変である.
2. $\operatorname{codim} K = 2$ の場合, $H_0^{\mathrm{string}}(Q, K)$ は $H_0^{\mathrm{CELN}}(Q, K)$ を簡約した $\mathbb{R}$-代数と同型である.

この章では $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ の構成, 具体例の計算, そして Legendre 接触ホモロジーとの関係について説明する.

3.1　不変量の構成

ここでは構成の概略について説明し, 講演内でより詳細に述べる．まず, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $a \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して, P_m^a を m 個のパスの列 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ であって, 以下を満たすものからなる空間とする:

- $\gamma_k \colon [0, T_k] \to Q$ は滑らかなパスであって, $\gamma(0), \gamma(T_k) \in K$ を満たす $(k = 1, \ldots, m)$.
- $\sum_{k=1}^m \mathrm{length}\gamma_k < a$

$m = 0$ の場合は P_0^a は 1 点集合とする．Cieliebak らは [4] で P_m^a の特異鎖を用いたのに対し, 我々は P_m^a の「**de Rham 鎖**」を用いる．de Rham 鎖の定義は [8] を参照する．これは $\mathbb{Z}$ 係数では議論できないが, 「鎖のファイバー積」が自然に定義できる点が特徴であり, 今回の構成に適していた.

始めに, (Q, K) に対して幾つかの補助的なデータを選ぶ．この中には Q 上の完備な Riemann 計量が含まれる．$H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ は次数付きベクトル空間として

$$H_*^{\mathrm{string}}(Q,K) \coloneqq \varinjlim_{a \to \infty} \varprojlim_{(\varepsilon,\delta)\colon \varepsilon \to 0} H_*\left(\bigoplus_{m=0}^{\infty} C_*^{<a}(\varepsilon, m), D_\delta \right)$$

と定義される．ここで, (ε, δ) は $\varepsilon > 0$ と de Rham 鎖 δ のペアであり, $(\bigoplus_{m=0}^{\infty} C_*^{<a}(\varepsilon, m), D_\delta)$ は $a \in \mathbb{R}_{>0}$ と (ε, δ) に依存して構成される鎖複体である.

各 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $C_*^{<a}(\varepsilon, m)$ は $P_m^{a+m\varepsilon}$ の de Rham 鎖で生成される次数付き $\mathbb{R}$-ベクトル空間をある同値関係で割ったものである．すると, de Rham 鎖の境界作用素から

$$\partial^{\mathrm{dR}} \colon C_*^{<a}(\varepsilon, m) \to C_{*-1}^{<a}(\varepsilon, m)$$

が定義される．さらに, $k = 1, \ldots, m$ に対して, δ に依存する次数 (-1) の線形写像

$$f_{k,\delta} \colon C_*^{<a}(\varepsilon, m) \to C_{*-1}^{<a}(\varepsilon, m+1)$$

が定義される．この作用素はストリングトポロジーのある余積に関係し, $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ の構成の核心である．これらを用いて, $D_\delta(x)$ $(x \in C_*^{<a}(\varepsilon, m))$ は

$$D_\delta(x) \coloneqq \partial^{\mathrm{dR}}(x) + \sum_{k=1}^{m} f_{k,\delta}(x)$$

と定義される．$H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ の $\mathbb{R}$-代数としての積構造は自然な写像

$$P_m^a \times P_{m'}^{a'} \to P_{m+m'}^{a+a'} \colon ((\gamma_1, \ldots, \gamma_m), (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_{m'})) \to (\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{m'})$$

から誘導され, 単位元は $1 \in \mathbb{R} = C_0^{<a}(\varepsilon, 0)$ から誘導される．また, $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ の同型類は最初に選んだ補助的なデータに依存しない.

3.2　具体例の計算

[11] では以下で与える具体例 $(\mathbb{R}^{2d-1}, K_i)$ $(d \geq 2,\ i = 0, 1)$ に対して, $H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^{2d-1}, K_i)$ を計算した.

$z_2^* \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \{0\}$ とし, $\mathbb{R}^{2d-1} = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ の $(d-1)$ 次元部分多様体 K_0, K_1 を

$$
\begin{aligned}
K_0 &\coloneqq \{(z_0, z_1, 0) \in \mathbb{R}^{2d-1} \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\} \sqcup \{(z_0, z_1, z_2^*) \in \mathbb{R}^{2d-1} \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\},\\
K_1 &\coloneqq \{(z_0, z_1, 0) \in \mathbb{R}^{2d-1} \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\} \sqcup \{(0, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{2d-1} \mid |z_1 - 1|^2 + |z_2|^2 = 1\},
\end{aligned}
$$

で定義する. これらはそれぞれ $\mathbb{R}^3$ 内の自明な絡み目と Hopf 絡み目の高次元化となっている. $\mathbb{R}^{2d-1}$ には標準的な向きを与える. K_0, K_1 の各連結成分の向きは, $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ (これは単位球の境界として向き付けられる) との自然な同一視から誘導される向きと符号 $(-1)^{d-1}$ の分だけ異なる.

以下で定義する集合 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ を用いて, $\mathcal{A}_*^0$ を $\mathcal{C}$ が自由生成する単位的非可換な次数付き $\mathbb{R}$-代数, $\mathcal{A}_*^1$ を $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ が自由生成する単位的非可換な次数付き $\mathbb{R}$-代数とする:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} &\coloneqq \{c_{i,j}^0\}_{i \neq j} \cup \{c_{i,i}^1\}_i \cup \{c_{i,j}^1, \bar{c}_{i,j}^1\}_{i \neq j} \cup \{c_{i,j}^2\}_{i,j},\\
\mathcal{D} &\coloneqq \{d_{i,i}^1\}_i \cup \{d_{i,j}^2\}_{i,j},\ \mathcal{E} \coloneqq \{e_{i,i}^1\}_i \cup \{e_{i,j}^2\}_{i,j},
\end{aligned}
$$

ここで i, j は $\{0, 1\}$ を走る. 次数は以下のように与える:

$$
\begin{aligned}
&|c_{i,j}^0| = d - 2,\ |c_{i,i}^1| = |c_{i,j}^1| = |\bar{c}_{i,j}^1| = 2d - 3\ (i \neq j),\\
&|c_{i,i}^1| = 2d - 3,\ |c_{i,j}^2| = 3d - 4,\\
&|d_{i,j}^1| = 2d - 3,\ |d_{i,j}^2| = 3d - 4,\ |e_{i,i}^1| = 2d - 4,\ |e_{i,j}^2| = 3d - 5.
\end{aligned}
$$

これらから, 次数付き微分代数 $(\mathcal{A}_*^0, 0)$, $(\mathcal{A}_*^1, D)$ を定義する. ここで $D\colon \mathcal{A}_*^1 \to \mathcal{A}_{*-1}^1$ は, 各生成元に対して, 以下のように定義される:

$$
\begin{aligned}
&Dc_{i,j}^0 = 0,\ Dc_{0,0}^1 = (-1)^d e_{0,0}^1 + c_{0,1}^0 c_{1,0}^0,\ Dc_{1,1}^1 = (-1)^d e_{1,1}^1 + c_{1,0}^0 c_{0,1}^0,\\
&Dc_{i,j}^1 = D\bar{c}_{i,j}^1 = 0,\\
&Dc_{0,0}^2 = -e_{0,0}^2 + (\bar{c}_{0,1}^1 c_{1,0}^0 + (-1)^d c_{0,1}^1 c_{1,0}^0),\ Dc_{1,1}^2 = -e_{1,1}^2 + (\bar{c}_{1,0}^1 c_{0,1}^0 + (-1)^d c_{1,0}^1 c_{0,1}^0),\\
&Dc_{0,1}^2 = -e_{0,1}^2,\ Dc_{1,0}^2 = -e_{1,0}^2,\\
&Dd_{i,i}^1 = e_{i,i}^1,\ Dd_{i,j}^2 = e_{i,j}^2,\ De_{i,i}^1 = 0,\ De_{i,j}^2 = 0.
\end{aligned}
$$

命題 3.2. [11]

1. 以下の次数付き $\mathbb{R}$-代数の同型が存在する：

$$
\begin{aligned}
H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^{2d-1}, K_0) &\cong H_*(\mathcal{A}_*^0, 0),\\
H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^{2d-1}, K_1) &\cong H_*(\mathcal{A}_*^1, D).
\end{aligned}
$$

   ここで $H_*(\cdot)$ は次数付き微分代数のホモロジーを意味する.

2. $H_*(\mathcal{A}_*^1, 0)$ と $H_*(\mathcal{A}_*^2, D)$ は同型でない. したがって, $H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^{2d-1}, K_1) \ncong H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^{2d-1}, K_2)$ が示される.

注意 3.3. K_0 の場合の計算は K_1 の場合と比較すると容易である. $\Delta \subset (S^{d-1} \sqcup S^{d-1})^2$ を対角埋込の像とすると, $H_*(\mathcal{A}_*^0, 0) = \mathcal{A}_*^0$ は $H_{*-d+2}((S^{d-1} \sqcup S^{d-1})^2, \Delta)$ のテンソル代数と一致する.

3.3 Legendre 接触ホモロジーとの関係

3.1 章で説明した $H_*^{\mathrm{string}}(Q,K)$ に対して次の予想を立て, その証明の方針を与えた. 解析的な詳細を含めた厳密な証明は別の論文として準備中である.

予想. 次数付き $\mathbb{R}$-代数の同型

$$\Phi\colon \mathrm{LCH}_*(UT^*\mathbb{R}^n,\Lambda_K;\mathbb{R}) \to H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^n,K)$$

が存在する.

注意 3.4. $Q=\mathbb{R}^n$ 以外の場合も, 注意 1.4 で述べたように左辺の Legendre 接触ホモロジーが定義されるならば, この予想は拡張可能であると考えられる.

証明の計画を 4 つのステップに分ける (以下, $\varepsilon>0$ は十分小さいものとする):

1. $\mathcal{A}_*^{<a}(\Lambda_K)$ を, $\mathcal{A}_*(\Lambda_K)$ の $\mathbb{R}$-部分空間であって, $\sum_{k=1}^m \int (c_k)^*\alpha < a$ を満たす語 $c_1\cdots c_m$ で生成されるものとする. すると部分複体 $(\mathcal{A}_*^{<a}(\Lambda_K),\partial)$ が定義される. 我々は特定の δ を取り, $(\mathcal{A}_*^{<a}(\Lambda_K),\partial)$ から $(\bigoplus_{m=0}^\infty C_*^{<a}(\varepsilon,m),D_\delta)$ へのチェイン写像 $\Phi_\varepsilon^{<a}$ を定義する. $\Phi_\varepsilon^{<a}$ の構成には $T^*\mathbb{R}^n$ 内の擬正則曲線であって, 境界条件が二つの Lagrange 部分多様体 (i) $T^*\mathbb{R}^n$ のゼロセクション, (ii) K の余法束, で与えられるもののモジュライ空間を利用する. このモジュライ空間のコンパクト化の境界を観察することで, 3.1 章で言及したストリングトポロジーの操作が現れる.
2. $(\Phi_\varepsilon^{<a})_*\colon H_*(\mathcal{A}_*^{<a}(\Lambda_K),\partial) \to H_*(\bigoplus_{m=0}^\infty C_*^{<a}(\varepsilon,m),D_\delta)$ が, $\varepsilon\to 0$, $a\to\infty$ の極限を取った時, 次数付き $\mathbb{R}$-代数の準同型

   $$\Phi\colon \mathrm{LCH}_*(UT^*\mathbb{R}^n,\Lambda_K;\mathbb{R}) \to H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^n,K)$$

   を誘導することを確かめる.
3. 任意の $c\in\mathbb{R}_{>0}$ に対して $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$ $(a<c<b)$ であって, $\Phi_\varepsilon^{<b}$ が誘導する商複体の間のチェイン写像

   $$\Phi_\varepsilon^{[a,b)}\colon \mathcal{A}_*^{<b}(\Lambda_K)/\mathcal{A}_*^{<a}(\Lambda_K) \to \bigoplus_{m=0}^\infty C_*^{<b}(\varepsilon,m)/C_*^{<a}(\varepsilon,m)$$

   が擬同型であるものが存在することを示す.
4. ステップ 3 の結果から, 任意の $b\in\mathbb{R}_{>0}$ に対して $\Phi_\varepsilon^{<b}$ が擬同型であることを示す. するとステップ 2 により Φ が同型であることが証明される.

参考文献

[1] M. Abouzaid. Symplectic cohomology and Viterbo's theorem. In *Free loop spaces in geometry and topology*, volume 24 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 271–485. Eur. Math. Soc., Zürich, 2015.

[2] M. Chas and D. Sullivan. String topology. *arXiv preprint math/9911159*, 1999.

[3] Y. Chekanov. Differential algebra of Legendrian links. *Invent. Math.*, 150(3):441–483, 2002.

[4] K. Cieliebak, T. Ekholm, J. Latschev, and L. Ng. Knot contact homology, string topology, and the cord algebra. *J. Éc. polytech. Math.*, 4:661–780, 2017.

[5] G. Dimitroglou Rizell. Lifting pseudo-holomorphic polygons to the symplectisation of $P \times \mathbb{R}$ and applications. *Quantum Topol.*, 7(1):29–105, 2016.

[6] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan. Legendrian contact homology in $P \times \mathbb{R}$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(7):3301–3335, 2007.

[7] Y. Eliashberg. Invariants in contact topology. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. II, pages 327–338, 1998.

[8] K. Irie. A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology via de Rham chains. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (15):4602–4674, 2018.

[9] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2012.

[10] L. Ng. Framed knot contact homology. *Duke Math. J.*, 141(2):365–406, 2008.

[11] Y. Okamoto Toward a topological description of Legendrian contact homology of unit conormal bundles. *to appear.*

[12] C. Viterbo. Generating functions, symplectic geometry, and applications. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 537–547. Birkhäuser, Basel, 1995.