On equivariantly braided tensor categories

東京大学大学院数理科学研究科
及川瑞稀 (Mizuki OIKAWA)

概要

組紐（braided）テンソル圏は可換環の圏化であり、トポロジーや代数的場の量子論などの領域で研究されている。一方、代数的場の量子論においてはさらに非可換群環の圏化が自然に現れ、当然組紐圏論では定式化できない。本講演では、Turaev により定式化された同変組紐圏論について紹介する。時間があれば、講演者により導入された同変組紐圏の直積にあたる構成などにも触れたい。

本講演は、講演者による準備中の結果 [Oik] に基づく。本研究は、理化学研究所の大学院生リサーチ・アソシエイト制度の下での成果である。

1　導入

圏化 (categorification) とは、広い意味で既知の数学的対象の「圏バージョン」を考えることである。例えば次のようなものである。

例 1.1. 群 G に対し、対象を体 k 上の有限次元 G-次数付き線型空間 (つまり k 上の有限次元線型空間 V とその直和分解 $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$) とし、射を G-次数を保つ線型写像 (つまり線形写像 $f : V \to W$ であって任意の $g \in G$ に対し $f(V_g) \subset W_g$ となるもの) として得られる半単純 k-線型アーベル圏を Vec_G^k で表す。この圏は以下の意味で群環 $\mathbb{Z}[G]$ の圏化である:

- Vec_G^k の対象の同型類は $\mathbb{Z}[G]$ の元と 1 対 1 に対応する。
- 上の対応のもとで Vec_G^k の直和は $\mathbb{Z}[G]$ の和と対応する。
- G-次数付き線型空間の**テンソル積** $\otimes : \mathrm{Vec}_G^k \times \mathrm{Vec}_G^k \to \mathrm{Vec}_G^k$ を
$$\left(\bigoplus_{g \in G} V_g\right) \otimes \left(\bigoplus_{h \in G} W_h\right) := \bigoplus_{k \in G} \left(\bigoplus_{\substack{g,h \in G \\ gh = k}} V_g \otimes W_h\right)$$
で定義すると、これは上の対応のもとで $\mathbb{Z}[G]$ の積と対応する。

つまり、環の圏化とは、環の元を圏の対象に置き換え、和を直和に置き換え、積を「テンソル積」と呼ぶべき函手に置き換えてみることである。一般には次のような定義になる:

定義 1.2. (概略) 体 k 上の**テンソル圏 (tensor category)** $\mathcal{C}$ とは

- k-線型アーベル圏 $\mathcal{C}$

- 双線型双完全函手 $\otimes^{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
- 自然同型 $a^{\mathcal{C}}: (- \otimes -) \otimes - \cong - \otimes (- \otimes -)$
- $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
- 自然同型 $l^{\mathcal{C}}: \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \otimes - \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$
- 自然同型 $r^{\mathcal{C}}: - \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$

の組であって、いくつかの公理を満たすものである。正確な定義は [EGNO15, Definitions 2.1.1 and 4.1.1] を見られたい。

ここで、$\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ は (単位的非可換) 環の単位元に対応している。注意してほしいのは、$a^{\mathcal{C}}$ が結合律に対応し、$l^{\mathcal{C}}$ と $r^{\mathcal{C}}$ が単位元律に対応していることだ。たとえば例 1.1 の最も簡単な場合として、G が自明な場合、つまり k 上の有限次元ベクトル空間の圏を考えよう。函手 $\otimes$ は各対象 V, W に対し $V \otimes W$ を固定することで定まる。このとき、一般には $(V \otimes W) \otimes X \neq V \otimes (W \otimes X)$ であるが、そのことには興味がなく、むしろカノニカルな同型 $(V \otimes W) \otimes X \cong V \otimes (W \otimes X)$ が存在することの方が大事だ。このように、環の元に対する等式の圏化は、等式ではなく自然同型となるべきなのである。

同様に、環の可換性も自然同型で定式化される:

定義 1.3. (概略) **組紐 (braided) テンソル圏** $\mathcal{C}$ とは、テンソル圏 $\mathcal{C}$ と自然同型 $b^{\mathcal{C}} = \{b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu}: \lambda \otimes \mu \cong \mu \otimes \lambda\}$ であっていくつかの公理を満たすものである。正確な定義は [EGNO15, Definitions 2.1.1 and 8.1.1] を見られたい。

例 1.4. 可環群 A に対し Vec_A^k は自然に組紐テンソル圏になる。

例 1.5. 群 G に対し、体 k 上の有限次元表現のなす圏 $\mathrm{Rep}^k\, G$ は表現のテンソル積について組紐テンソル圏になる。

ここで、圏化を考えるモチベーションとして、個人的な観点を少しだけ述べておく。**代数的場の量子論 (algebraic quantum field theory, AQFT)** という枠組みでは、**カイラル共形場理論 (chiral conformal field theory)** という場の量子論の一種は、**共形ネット (conformal net)** と呼ばれる von Neumann 環の族を考え、その表現を「粒子」とみなすことで実現される。共形ネットの性質が充分良いとき、その表現圏は「粒子の入れ替え」により組紐テンソル圏になる (**Doplicher–Haag–Roberts (DHR) 理論** [DHR71])。この場合、粒子がボゾンかフェルミオンか、**エニオン (anyon)** かということが組紐テンソル圏の枠組みで定義できる。さらに、カイラル共形場理論から**フル (full) 共形場理論**を構成する手続きが組紐テンソル圏の枠組みで理解できる。この手続きが極めて非自明な $SL(2,\mathbb{Z})$-不変量を与える [CIZ87] ことから、講演者はこの不変量に興味を持ってテンソル圏論を研究している。

2　同変組紐テンソル圏

例 1.1 において、群 G が非可換であれば、$gh \neq hg$ なる $g, h \in G$ に対し

$$k_g \otimes k_h \cong k_{gh} \ncong k_{hg} \cong k_h \otimes k_g$$

なので、Vec_G^k は組紐テンソル圏にはならない。ここで、k_g はベクトル空間としては k で、G-次数付けの g-成分のみがノンゼロなものとする。注意したいのは、代わりに

$$k_g \otimes k_h \cong k_{gh} = k_{ghg^{-1}g} \cong k_{ghg^{-1}} \otimes k_g$$

が成り立っていることだ。つまり、Vec_G^k に組紐構造の意味での可換性はないが、2 つの対象を入れ替えたときに片方に何か効果がつくという、一般化された意味での可換性はあるのだ。ここでの効果は、${}^g k_h \coloneqq k_{ghg^{-1}}$ という Vec_G^k への**群作用**のことだと理解できる。テンソル圏への群作用の正確な定義は [EGNO15, Definitions 2.7.1 and 4.15.1] を見られたい。「群に一般化された可換性」は次のような定義になる:

定義 2.1. (Turaev 2000 [Tur00]) (概略) G を群とする。**G-組紐テンソル圏**とは

- テンソル圏 $\mathcal{C}$
- 充満部分アーベル圏の族 $\{\mathcal{C}_g\}_{g\in G}$ による $\mathcal{C}$ の G-次数付け $\mathcal{C} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{C}_g$
  (つまり $\mathcal{C}$ の任意の対象は $\mathcal{C}_g$ たちの対象の直和で書け、任意のノンゼロな射は G-次数を保つ。普遍性でも定義できる)
- G の $\mathcal{C}$ への群作用
- 自然同型 $b^{\mathcal{C}} = \{b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu} : \lambda \otimes \mu \cong {}^g(\mu) \otimes \lambda\}_{\lambda\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g), \mu\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), g\in G}$

の組であって

- $\mathcal{C}_g \otimes \mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}_{gh}$
- $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}_e$
- $b^{\mathcal{C}}$ についての組紐テンソル圏と同様の公理

を満たすものである。

共形場理論の例では、共形ネットに適切な意味で群作用があるとき、表現の一般化である**捻れ表現 (twisted representation)** の概念を考えることができ、共形ネットの性質が良いときその圏は G-組紐テンソル圏になる [Müg05]。

3　同変組紐テンソル圏のテンソル積

組紐構造の一般化として G-組紐構造を定義したので、自然と「**組紐テンソル圏の理論はすべて G-組紐テンソル圏の理論に拡張できるか？**」という（漠然とした）問いが生まれる。講演者は、この答えは**肯定的であるが、実際の拡張はかなり非自明である**と考えている。ここでは、講演者の結果 [Oik] の一部を紹介することでその例を見よう。

まず、古典的に知られている組紐テンソル圏の **Deligne** テンソル積を紹介しよう。

定理 3.1. (Deligne 1990 [Del90]) $\mathcal{C},\mathcal{D}$ をテンソル圏とする。このときアーベル圏 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ と双完全函手 $\boxtimes : \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ があって、任意のアーベル圏 $\mathcal{E}$ に対し $\boxtimes$ の合成が圏同値 $[\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D},\mathcal{E}]\simeq[\mathcal{C},[\mathcal{D},\mathcal{E}]]$ を与える。ここで括弧は完全函手の圏を表す。$\boxtimes(c,d)$ $(c\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}), d\in\mathrm{Obj}(\mathcal{D}))$ を $c\boxtimes d$ と書くことにし、

$$(c_1\boxtimes d_1)\otimes^{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}}(c_2\boxtimes d_2) \coloneqq (c_1\otimes^{\mathcal{C}} c_2)\boxtimes(d_1\otimes^{\mathcal{D}} d_2) \tag{1}$$

$(c_1,c_2\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}), d_1,d_2\in\mathrm{Obj}(\mathcal{D}))$ とおくと $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ はテンソル圏になる。さらに、$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が組紐テンソル圏だった場合、$\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ は自然に組紐テンソル圏になる。

この定理で、$\mathcal{C},\mathcal{D}$ が G-組紐テンソル圏である場合はどうなるだろうか？まず、$\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ 上の G-次数の定義として一番自然に思いつくのは、$c\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g), d\in\mathrm{Obj}(\mathcal{D}_h)$ だったら $c\boxtimes d\in\mathrm{Obj}((\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D})_{gh})$ と定めることである。しかし、定理 3.1 で定義したテンソル積はこの G-次数付けを保たないことがわかる。実際、$c_i\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g_i}), d_i\in\mathrm{Obj}(\mathcal{D}_{h_i})$ $(i=1,2)$ とすると、式 (1) の左辺の次数は $g_1h_1g_2h_2$ で、右辺の次数は $g_1g_2h_1h_2$ である。実は、テンソル積の定義を変更すればうまくいく:

定理 3.2. (O. [Oik]) $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を G-組紐テンソル圏とする。このとき、$c_1\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}), c_2\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g_2}), d_1,d_2\in\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ に対し

$$(c_1\boxtimes d_1)\otimes^{\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}}(c_2\boxtimes d_2) \coloneqq (c_1\otimes^{\mathcal{C}} c_2)\boxtimes({}^{g_2^{-1}}(d_1)\otimes^{\mathcal{D}} d_2) \tag{2}$$

とおくことにより (アーベル圏としては $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ に一致する) テンソル圏 $\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}$ を定義できる。さらに、$\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D}$ の次数付けを $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ のものと同じとすると、単位元成分 $D(\mathcal{C},\mathcal{D})\coloneqq(\mathcal{C}\ltimes\mathcal{D})_e$ は自然に G-組紐テンソル圏になる。ここで、$D(\mathcal{C},\mathcal{D})$ の次数付けは、$c\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g), d\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ に対し $c\boxtimes d\in\mathrm{Obj}(D(\mathcal{C},\mathcal{D})_g)$ であると定める。

式 (2) で $c_i\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g_i}), d_i\in\mathrm{Obj}(\mathcal{D}_{h_i})$ $(i=1,2)$ とすると、G-組紐テンソル圏の公理 (定義 2.1) から、右辺の ($\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ での) 次数が $g_1g_2(g_2^{-1}h_1g_2)h_2=g_1h_1g_2h_2$ となり、左辺の次数と一致することに注意されたい。

以上により、組紐テンソル圏のテンソル積の概念を G-組紐テンソル圏に拡張しようとすると、テンソル積を「半直積」に変形し、さらに単位元成分を取るという非自明な操作が必要になることがわかった。

参考文献

[CIZ87] Andrea Cappelli, Claude Itzykson, and Jean-Bernard Zuber. The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories. *Comm. Math. Phys.*, 113(1):1–26, 1987.

[Del90] P. Deligne. Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[DHR71] Sergio Doplicher, Rudolf Haag, and John E. Roberts. Local observables and particle statistics. I. *Comm. Math. Phys.*, 23:199–230, 1971.

[EGNO15] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[Müg05] Michael Müger. Conformal orbifold theories and braided crossed G-categories. *Comm. Math. Phys.*, 260(3):727–762, 2005.

[Oik] Mizuki Oikawa. Frobenius algebras associated with the α-induction for twisted representations of conformal nets. *In preparation.*

[Tur00] Vladimir Turaev. Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories. *arXiv preprint math/0005291*, 2000.