Infinitesimal deformations of Killing spinors on nearly parallel G_2-manifolds.

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
大野走馬 (Soma OHNO)

概要

キリングスピノールを持つ多様体はアインシュタイン多様体である．従って，アインシュタイン変形をキリングスピノールを用いて調べることが出来る．我々は [13] において，キリングスピノールの無限小変形を nearly parallel G_2 多様体上で調べた．実は 7 次元スピン多様体上でキリングスピノールと nearly parallel G_2 構造が 1 対 1 に対応することから，我々の結果は Alexandrov と Semmelmann の nearly parallel G_2 構造の無限小変形に関する結果 [1] に新しい証明を与えたことになる．また，キリングスピノールの無限小変形を調べるのと同様の手法を用いることによって，nearly parallel G_2 多様体上の Rarita-Schwinger 場についても結果を得た．今回はこれらの結果の概要を説明していく．

1 導入

スピン群 $\mathrm{Spin}(n)$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ の普遍被覆として定義される．これは二重被覆となり，被覆写像を $\mathrm{Ad}:\mathrm{Spin}(n)\to\mathrm{SO}(n)$ と書くことにする．

定義． 向き付きリーマン多様体 (M,g) 上の主 $\mathrm{Spin}(n)$ 束 $\mathbf{Spin}(M)$ 及び次の可換図式を満たす束準同型 Φ を**スピン構造**という．

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Spin}(M)\times\mathrm{Spin}(n) & \xrightarrow{\Phi\times\mathrm{Ad}} & \mathbf{SO}(M)\times\mathrm{SO}(n)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\mathbf{Spin}(M) & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & \mathbf{SO}(M)\\
\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\
M & \xrightarrow{\quad=\quad} & M
\end{array}$$

スピン構造 $(\mathbf{Spin}(M),\Phi)$，$(\mathbf{Spin}'(M),\Phi')$ が同値であるとは，主束の同型 $f:\mathbf{Spin}(M)\to\mathbf{Spin}'(M)$ で $\Phi'\circ f=\Phi$ となるものが存在することである．また，スピン構造が入った (M,g) を**スピン多様体**と呼ぶ．

スピン構造を持つことの同値条件はある特性類を用いて述べることができる．

定理． (M,g) を向き付きリーマン多様体とする．このとき，次は同値になる．

- (M,g) がスピン構造を持つ．

- M の 2 次スティーフェル-ホイットニー類 $\omega_2(M)$ が自明になる.

例えば n 次元球面 $S^n (n \geq 3)$ や奇数次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1}$, 及びすべてのカラビヤウ多様体はスピン構造を持つ.

定義. (M^n, g) をスピン多様体, $\mathbf{Spin}(M)$ をスピン構造とする. このとき, スピノール表現 (Δ_n, W_n) に関する同伴ベクトル束

$$S_{1/2} \coloneqq \mathbf{Spin}(M) \times_{\Delta_n} W_n$$

を**スピノール束**という. また, このスピノール束の切断を**スピノール場**とよぶ. n が偶数のとき, スピノール束は $S_{1/2} = S^+_{1/2} \oplus S^-_{1/2}$ と分解することに注意しておく.

スピン幾何学において重要な楕円型形式的自己共役作用素であるディラック作用素 $D : \Gamma(S_{1/2}) \to \Gamma(S_{1/2})$ を次で定義する.

$$D \coloneqq \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}.$$

ここで, $e_i \cdot$ を TM の局所正規直交枠 $\{e_i\}$ によるクリフォード積としている. 歴史的には, ディラック作用素はミンコフスキー空間におけるダランベール作用素 (ユークリッド空間におけるラプラス作用素) の二乗根として現れた. 後にスピノール束上に定義されたが, 一般にディラック作用素の二乗根はラプラス作用素とは一致しない. その代わりとなる有名な結果が次のリヒネロヴィッツ公式である.

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{\mathrm{scal}}{4}.$$

この公式の重要な応用として, コンパクトリーマン多様体上で接続ラプラシアン $\nabla^*\nabla$ が非負であることから, スカラー曲率が正 $(\mathrm{scal} > 0)$ のときに $\ker D = 0$ となる. また, この $\ker D$ の元のことを調和スピノールと呼ぶ. 同様に, $\mathrm{scal} \equiv 0$ のときに調和スピノールの空間と平行スピノールの空間は一致する, つまり $\ker D = \ker \nabla$ が成り立つ.

次に, ディラック作用素の固有値を評価してみる. リヒネロヴィッツ公式を用いることにより, ディラック作用素の固有値 λ の二乗は $\lambda^2 \geq \min_{x \in M} \mathrm{scal}(x)/4$ と評価できる. Friedrich [6] によって, さらに良い評価がなされた.

定理 ([6])**.** (M, g) を n 次元コンパクトスピン多様体とする. このとき, ディラック作用素の固有値 λ は

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \min_{x \in M} \mathrm{scal}(x)$$

を満たす.

実はこの評価より厳しい評価は存在しない. つまり, イコールを満たすようなスピノールが存在するということである. このスピノールが, 次の節で定義するキリングスピノールである.

このようなスピン幾何学の基礎について詳しく知りたい人は [5], [9], [10] などを参照してほしい.

2 キリングスピノール

前節でも述べたように, キリングスピノールは Friedrich の固有値評価のイコールを満たすスピノールとして現れる. 一方物理学においても, 超重力理論や超弦理論で用いられるなど重要な概念である. 今節ではキリングスピノールの定義とそれらを持つ多様体の分類について話していく.

(M^n, g) をスピン多様体, $S_{1/2}$ をスピノール束とする.

定義. ある定数 $c \in \mathbb{C}$ に対して, スピノール場 $\kappa \in \Gamma(S_{1/2})$ が次を満たすときに**キリングスピノール**という.

$$\nabla_X \kappa = cX \cdot \kappa \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

ここで, ∇ はスピン接続, $\cdot$ はクリフォード積であり, 定数 c をキリング数と呼ぶ.

計算することにより, キリング数 c のキリングスピノールを持つ多様体はリッチ曲率が $\mathrm{Ric} = 4c^2(n-1)g$ を満たすことが分かる. つまりアインシュタイン定数 $4c^2(n-1)$ のアインシュタイン多様体である. このことから, キリング数は零, 実数, 純虚数のいずれかになり, それぞれに対応するキリングスピノールをそれぞれ平行スピノール, 実キリングスピノール, 虚キリングスピノールと呼ぶことにする.

実は, これらのスピノールを持つ多様体は分類されている. 平行スピノールを持つ多様体に関しては, Wang が分類した.

定理 ([15])**.** (M, g) を完備単連結既約 n 次元スピン多様体とする. さらに,

$$\mathcal{N} \coloneqq \{\phi \in \Gamma(S_{1/2}) \mid \nabla\phi = 0\}, \quad \mathcal{N}_\pm \coloneqq \{\phi \in \Gamma(S^\pm_{1/2}) \mid \nabla\phi = 0\}$$

としたときに, 非自明な平行スピノールを持つ (M, g) は表 1 のいずれかに一致する.

表 1　平行スピノールを持つ多様体

$\dim M$	幾何構造	$\dim\mathcal{N}$ or $(\dim\mathcal{N}_+, \dim\mathcal{N}_-)$
$4k$	カラビヤウ	$(2, 0)$
$4k+2$	カラビヤウ	$(1, 1)$
$4k$	超ケーラー	$(k+1, 0)$
7	G_2	1
8	Spin(7)	$(1, 0)$

次に実キリングスピノールを持つ多様体であるが, これはリーマン錐を用いて Bär [2] によって分類された. (M, g) を n 次元リーマン多様体としたときに, **リーマン錐**という $n+1$ 次元リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ を考えることができる. ここで,

$$\bar{M} = M \times \mathbb{R}^+, \quad \bar{g} = r^2 g + dr^2$$

により与えられている. 実は, M 上に実キリングスピノールが存在することと, $\bar{M}$ 上に平行スピノールが存在することは同値である. 従って, 次の分類が得られる.

定理 ([2])**.** (M,g) を完備単連結スピン多様体で非自明な実キリングスピノールを持つとする.

$$K_{\pm} \coloneqq \{c \in \mathbb{R} \text{ かつ } c \gtrless 0 \text{ となるキリングスピノール }\}$$

としたとき, M は表 2 のいずれかに一致する.

表 2　実キリングスピノールを持つ多様体

$\dim M$	幾何構造	$(\dim K_+, \dim K_-)$
n	n-球面 S^n	$(2^{[n/2]}, 2^{[n/2]})$
$4k-1\ (k \geq 3)$	佐々木-アインシュタイン	$(2,0)$
$4k+1\ (k \geq 1)$	佐々木-アインシュタイン	$(1,1)$
$4k-1\ (k \geq 3)$	3-佐々木	$(k+1,0)$
6	nearly Kähler	$(1,1)$
7	nearly parallel G_2	$(1,0)$ or $(2,0)$ or $(3,0)$

重要な性質として, 実キリングスピノールを持つ多様体は正のアインシュタイン多様体になる. 更に完備とすると, コンパクトになる. 最後に, 虚キリングスピノールを持つ多様体については, Baum [3] による次の結果が知られている.

定理 ([3])**.** (M,g) を完備連結スピン多様体で, キリング数 $\sqrt{-1}\mu$ の非自明な虚キリングスピノールを持つとする. このとき, (M,g) はリーマン積

$$(F^{n-1} \times \mathbb{R}, e^{-4\mu t} g_F + dt^2)$$

と等長同型になる. ここで, (F^{n-1}, g_F) は平行スピノールを持つ完備連結スピン多様体である. 逆に,(F^{n-1}, g_F) が完備連結スピン多様体で平行スピノールを持つとすると, $(F^{n-1} \times \mathbb{R}, e^{-4\mu t} g_F + dt^2)$ は虚キリングスピノールを持つ.

実キリングスピノールを持つ多様体と異なり, 虚キリングスピノールを持つ多様体は負のアインシュタイン多様体であり, 必ず非コンパクトである.

3　キリングスピノールの無限小変形

この節以降はキリング数が零でないキリングスピノールのみ考えることにする. 2 節で見たように, 実 (虚) キリングスピノールを持つ多様体は正 (負) のアインシュタイン多様体である. 従って, アインシュタイン変形をキリングスピノールを用いて考察することが出来る. まずは無限小アインシュタイン変形を思い出そう.

定義. (M^n, g) を n 次元アインシュタイン多様体とする. アインシュタイン計量 g の**無限小アインシュタイン変形**とは, 以下を満たす対称テンソル場 $h \in \Gamma(\mathrm{Sym}\, M)$ のことである.

$$\Delta h = \frac{2\,\mathrm{scal}}{n} h, \quad \delta h = 0, \quad \mathrm{tr}\, h = 0.$$

ここで, Δ は微分形式上のラプラス作用素の類似物であるリヒネロヴィッツのラプラス作用素であり, δ はダイバージェンス作用素である.

アインシュタイン変形の基礎を知りたい人は [4] を参照してほしい. また, これから述べるキリングスピノールの変形理論についての詳しいことは [16] を参照してほしい. キリングスピノールの無限小変形の話をする前に, 微分作用素や記号をいくつか定義する.

(M^n, g) をスピン構造 $\mathbf{Spin}(M) \to \mathbf{SO}(M)$ を持つスピン多様体, $S_{1/2}$ をスピノール束, TM を接束とする. このとき, $S_{1/2} \otimes TM$ 上の**捩れディラック作用素** D_{TM} を次で定義する:

$$D_{TM} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} (e_i \cdot \otimes \mathrm{Id}_{TM}) \nabla_{e_i}.$$

ここで, ∇ をレビチビタ接続から導かれる $S_{1/2} \otimes TM$ 上の共変微分である. 次に, 束写像 $\beta : TM \to TM$ とスピノール場 $\kappa_0 \in \Gamma(S_{1/2})$ に対してテンソル場 $\Psi^{(\beta,\kappa_0)} \in \Gamma(T^*M \otimes S_{1/2})$ を以下で定義する.

$$\Psi^{(\beta,\kappa_0)}(X) \coloneqq \beta(X) \cdot \kappa_0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

g-対称な自己同型写像 $\alpha : TM \to TM$ に対して, 新しい計量を次のように定義する.

$$g^{\alpha}(X, Y) \coloneqq g(\alpha^{-1}X, \alpha^{-1}Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

この新しい計量 g^{α} に対する正規直交フレーム束を $\mathbf{SO}^{\alpha}(M)$, その二重被覆を $\mathbf{Spin}^{\alpha}(M)$ と書くことにする. α によって, 同型 $\mathbf{SO}(M) \cong \mathbf{SO}^{\alpha}(M)$ が与えられ, さらにスピン構造の同型 $\mathbf{Spin}(M) \cong \mathbf{Spin}^{\alpha}(M)$ も与えられる. 従って, スピノール束の同型 $S_{1/2} \cong S^{\alpha}_{1/2}$ も得られるが, その同型写像を $\tilde{\alpha} : S_{1/2} \to S^{\alpha}_{1/2}$ と書くことにする.

さて, $\alpha(t)$ を $\alpha(0) = \mathrm{Id}_{TM}$ を満たし, 各 $\alpha(t)$ に対して $g^{\alpha(t)}$ がキリングスピノール $\kappa_t^{\#}$ を持つ対称自己同型写像とする. $\nabla^{\alpha(t)}_X \kappa_t^{\#} = cX \cdot_t \kappa_t^{\#}$ が成り立つことから, 次が得られる.

$$\mathcal{L}^c(\alpha(t), \kappa_t)(X) \coloneqq \tilde{\nabla}^{\alpha(t)}_X \kappa_t - c\alpha(t)^{-1}(X) \cdot \kappa_t = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{1}$$

ここで, κ_t は $\widetilde{\alpha(t)}^{-1}(\kappa_t^{\#})$ であり, $\tilde{\nabla}^{\alpha(t)}$ は $\nabla^{\alpha(t)}$ のスピノール束 $S_{1/2}$ への引き戻し $\tilde{\nabla}^{\alpha(t)} \coloneqq \widetilde{\alpha(t)}^{-1} \circ \nabla^{\alpha(t)} \circ \widetilde{\alpha(t)}$ である. 式 (1) を満たす $(\alpha(t), \kappa_t)$ を**キリングスピノール** κ_0 **の変形**という.

我々は $t = 0$ での $\alpha(t)$ と κ_t の微分をそれぞれ $\dot{\alpha}, \dot{\kappa}$ と書くことにする. このとき, 式 (1) で定義した $\mathcal{L}^c$ の点 (Id, κ_0) での微分 $d\mathcal{L}^c$ は次で与えられる.

定理 ([16])**.** (M, g) をキリング数 c のキリングスピノールを持つスピン多様体とする. このとき,

$$d\mathcal{L}^c(\dot{\alpha}, \dot{\kappa})(X) = \nabla_X \dot{\kappa} - cX \cdot \dot{\kappa} + c\dot{\alpha}(X)\kappa_0 - \frac{1}{2}\sum_i e_i \cdot (\nabla_{e_i}\dot{\alpha})(X)\kappa_0 + \frac{1}{2} g(\delta\dot{\alpha}, X)\kappa_0.$$

ここで, M がコンパクトで $\mathrm{tr}\,\dot{\alpha} = 0, \delta\dot{\alpha} = 0$ を満たすと仮定したとき,

$$d\mathcal{L}^c(\dot{\alpha}, \dot{\kappa}) = 0 \Leftrightarrow \nabla_X \dot{\kappa} = cX \cdot \dot{\kappa} \text{ かつ } D_{TM}\Psi^{(\dot{\alpha},\kappa_0)} = nc\Psi^{(\dot{\alpha},\kappa_0)}$$

となる.

この定理から, 我々が扱うキリングスピノールの無限小変形を次で定義する.

定義 ([16])**.** 対称な束写像 $\beta : TM \to TM$ とスピノール場 $\kappa \in \Gamma(S_{1/2})$ が次を満たすとき, この組 (β, κ) を (キリング数 c の) **キリングスピノール κ_0 の無限小変形**と呼ぶ.

(i) κ はキリング数 c のキリングスピノールである.

(ii) $\mathrm{tr}\,\beta = 0,\ \delta\beta = 0.$

(iii) $D_{TM}\Psi^{(\beta,\kappa_0)} = nc\Psi^{(\beta,\kappa_0)}.$

注意として, 対称準同型 β に対応する対称テンソルを $h(X,Y) \coloneqq -2g(\beta(X),Y)$ とすると, この h は無限小アインシュタイン変形になる.

4　nearly parallel G_2 多様体

今回我々が扱うのは実キリングスピノールを持つ多様体 (表 2) の中でも nearly parallel G_2 多様体である. この節では定義といくつかの性質について軽く述べよう. nearly parallel G_2 多様体について知りたい人は [7] などを参照してください.

$(e_1,\ldots,e_7)$ を $\mathbb{R}^7$ 上の標準基底, $(e^1,\ldots,e^7)$ をその双対基底とする. このとき, $\mathbb{R}^7$ 上の 3-form ϕ_0 を次で定義する.

$$\phi_0 \coloneqq e^{123} + e^{176} + e^{257} + e^{653} + e^{145} + e^{246}.$$

ここで, $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$ というようにウェッジ積を省略して書いている.

定義. M を向き付き 7 次元多様体, ϕ を 3-form とする. 各点 $x \in M$ に対して $u^*\phi_0 = \phi_x$ を満たす向きを保つ同型写像 $u : T_xM \to \mathbb{R}^7$ が存在するとき, ϕ を**概 G_2 構造**という.

向き付き 7 次元多様体 M 上に概 G_2 構造が存在するときに, M の構造群は G_2 に簡約する. また $\mathrm{G}_2 \subset \mathrm{SO}(7)$ という関係があるため, 概 G_2 構造 ϕ から自然にリーマン計量 g が導かれる. 従って, 我々は (M,ϕ,g) という三つ組みを概 G_2 多様体と呼ぶことにする.

定義. 7 次元概 G_2 多様体 $(M.\phi,g)$ がある定数 $\tau_0 \neq 0$ に対して次を満たすときに **nearly parallel G_2 多様体**という.

$$*d\phi = \tau_0\phi.$$

この nearly parallel G_2 構造は次で定義される**クロス積** $A : TM \times TM \to TM$ を導く.

$$g(X, A(Y,Z)) = \phi(X,Y,Z) \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

またこのクロス積の束準同型を $A_XY \coloneqq A(X,Y)$ と書くことにする.

nearly parallel G_2 多様体上には, **標準的な G_2 接続** $\bar\nabla$ と呼ばれる次の自然な接続がある.

$$\bar\nabla_X Y \coloneqq \nabla_X Y - \frac{\tau_0}{12}A_XY, \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

この接続 $\bar\nabla$ は $\bar\nabla g = 0$ と $\bar\nabla\phi = 0$ を満たし, 捩率は $\bar T(X,Y) = -\frac{\tau_0}{6}A_XY$ となる. この標準的な G_2 接続は, 群 G_2 によるベクトル束の分解を保つ.

nearly parallel G_2 多様体の性質をいくつか紹介しよう．2 節でも述べたが, nearly parallel G_2 多様体は実キリングスピノールを持つ．従って, 正のアインシュタイン多様体となる．さらに, スピン多様体が実キリングスピノールを持つことと, そのリーマン錐が平行スピノールを持つことは同値だと述べたが, nearly parallel G_2 多様体と対応するリーマン錐は Spin(7) 多様体である．次の性質として, 7 次元スピン多様体において,

$$\text{nearly parallel } \mathrm{G}_2 \text{ 構造} \xleftrightarrow{1:1} \text{キリングスピノール}$$

という対応がある．さて, 先ほど実キリングスピノールが存在するといったが, その次元によって nearly parallel G_2 多様体を 3 つに分類できる．$K = K_+ \oplus K_-$ としたとき,

- type 1: $\dim K = 1 \rightsquigarrow$ proper nearly parallel G_2 多様体
- type 2: $\dim K = 2 \rightsquigarrow$ 佐々木-アインシュタイン多様体
- type 3: $\dim K = 3 \rightsquigarrow$ 3-佐々木多様体

ここでは佐々木-アインシュタイン多様体及び 3-佐々木多様体について詳しくは述べないが, カラビヤウ多様体や超ケーラー多様体の奇数次元版として面白い対象である．

具体的な nearly parallel G_2 多様体の例について, Friedrich, Kath, Moroianu, Semmelmann [7] が単連結コンパクトな等質 nearly parallel G_2 多様体を分類した．それは以下に示す 6 つである:

$$(S^7, g_{\mathrm{round}}) = \mathrm{Spin}(7)/\,\mathrm{G}_2,\ (S^7, g_{\mathrm{squashed}}) = \frac{\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{Sp}(1)}{\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)},$$
$$\mathrm{SO}(5)/\,\mathrm{SO}(3),\ M(3,2) = \frac{\mathrm{SU}(3)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)},$$
$$Q(1,1,1) = \mathrm{SU}(2)^3/\,\mathrm{U}(1)^2,\ N(k,l) = \mathrm{SU}(3)/S^1_{k,l}\ (k,l\in\mathbb{Z}).$$

これらの空間の等質構造は例えば [14] にまとめられている．

以後, 我々は $\tau_0 = 4$ と正規化して考えることにする．このとき, キリング数は 1/2 となる．

5　主結果

我々は [13] において, キリングスピノールの無限小変形を nearly parallel G_2 多様体上で調べた．

定理 (O 2022 [13])**.** (M, ϕ, g) を 7 次元でコンパクトな nearly parallel G_2 多様体, κ_0 を nearly parallel G_2 構造 ϕ と対応する (キリング数 1/2 の) キリングスピノールとする．このとき,

$$\{\kappa_0 \text{ の無限小変形 }\} \cong \{\gamma \in \Omega^3_{27}M \mid *d\gamma = -4\gamma\} \oplus K_+.$$

ここで, $\wedge^3_{27}M$ は $\wedge^3 M$ の群 G_2 で既約な 27 次元部分空間である．

Alexandrov と Semmelmann [1] によって, nearly parallel G_2 構造の変形の空間が $\{\gamma \in \Omega^3_{27}M \mid *d\gamma = -4\gamma\} \oplus \{f_1 \in \Omega^1 M \mid \nabla f_1 = -f_1 \lrcorner\, \phi\}$ と同型になることが示された．ここで, $\{f_1 \in \Omega^1 M \mid \nabla f_1 = -f_1 \lrcorner\, \phi\}$ は type 2, type 3 の場合にそれぞれ佐々木-アインシュタイン構造, 3-佐々木構造を与える．また, キリングスピノールの空間を $K_+ = \langle\kappa_0\rangle \oplus {\kappa_0}^\perp$ と直交直和分解したときに,

$D_1 \cong {\kappa_0}^{\perp}$ を示すことができる．従って我々の結果は [1] の結果の別証明になっている．また，論文 [1] において nearly parallel G_2 構造の無限小変形が 4 節であげたいくつかの例で調べられた．空間 $\{\gamma \in \Omega^3_{27}M \mid *d\gamma = -4\gamma\}$ は，$\frac{\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{Sp}(1)}{\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)}$, $\mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$ 上では消えて，$\frac{\mathrm{SU}(3)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)}$ 上では 8 次元存在する．しかし，$\frac{\mathrm{SU}(3)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)}$ 上の等質 nearly parallel G_2 構造の無限小変形は全て可積分でないことが Nagy と Semmelmann [11] によって示されている．

上の主定理を得るのと同様のテクニックを用いることによって，nearly parallel G_2 多様体の Rarita-Schwinger 場についても結果が得られた．束写像 $\Pi : S_{1/2} \otimes TM \ni \zeta \otimes X \mapsto X \cdot \zeta \in S_{1/2}$ に対して，$S_{3/2} \coloneqq \ker \Pi$ をスピン 3/2 のスピノール束という．このとき，**Rarita-Schwinger 場**とは $D_{TM}\varphi = 0$ を満たすスピン 3/2 スピノール場 $\varphi \in \Gamma(S_{3/2})$ である．

定理 (O 2022 [13])**.** (M, ϕ, g) を 7 次元でコンパクトな nearly parallel G_2 多様体とする．このとき，

$$\{\text{Rarita-Schwinger 場}\} \cong \left\{\gamma \in \Omega^3_{27}M \;\middle|\; *d\gamma = -\frac{1}{2}\gamma\right\}.$$

Rarita-Schwinger 場についての数学的な扱い方については [8] を参照のこと．また，今回は実キリングスピノールを持つ多様体 (表 2) の中で，nearly parallel G_2 多様体を扱ったが，nearly Kähler 多様体上のキリングスピノールの無限小変形及び Rarita-Schwinger 場については Ohno, Tomihisa [12] が調べている．

参考文献

[1] B. Alexandrov, U. Semmelmann. *Deformations of nearly parallel* G_2*-structures.* Asian J. Math. 16 (2012), no. 4, 713–744.

[2] C. Bär. *Real Killing spinors and holonomy.* Comm. Math. Phys. 154 (1993), no. 3, 509–521.

[3] H. Baum. *Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors.* Ann. Global Anal. Geom. 7 (1989), no. 3, 205-226.

[4] A. L. Besse. *Einstein manifolds.* Springer-Verlag, Berlin, 1987. xii+510 pp.

[5] J. P. Bourguignon, O. Hijazi, J. L. Milhorat, A. Moroianu, S. Moroianu. *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry.* EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015. ix+452 pp.

[6] T. Friedrich. *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten, Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung.* Math. Nachr. 97 (1980), 117-146.

[7] Th. Friedrich, I. Kath, A. Moroianu, U. Semmelmann. *On nearly parallel* G_2*-structures.* J. Geom. Phys., 23:3-4, 1997. pp. 259–286.

[8] Y. Homma, U. Semmelmann. *The kernel of Rarita-Schwinger operator on Riemannian spin manifolds.* Comm. Math. Phys. 370 (2019), no. 3, 853-871.

[9] 本間泰史. スピン幾何学 スピノール場の数学 森北出版, (2016)

[10] H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn. *Spin geometry.* Princeton Mathematical Series, 38. Prince-

ton University Press, Princeton, NJ, 1989. xii+427 pp.

[11] P.-A. Nagy, U. Semmelmann. *Deformations of nearly* G_2 *structures.* J. Lond. Math. Soc. (2) 104 (2021), no. 4, 1795-1811.

[12] S. Ohno, T. Tomihisa. *Rarita-Schwinger fields on nearly Kähler manifolds.* arXiv:2105.11129 [math.DG].

[13] S. Ohno. *Infinitesimal deformations of Killing spinors on nearly parallel* G_2*-manifolds.* arXIv:2210.01623 [math.DG]

[14] R. Singhal. *Deformations of* G_2*-instantons on nearly* G_2 *manifolds.* Ann. Grobal Anal. Geom. 62 (2022), no. 2, 329-366.

[15] M. Y. Wang. *Parallel spinors and parallel forms.* Ann. Global Anal. Geom. 7 (1989), no. 1, 59-68.

[16] M. Y. Wang. *Preserving parallel spinors under metric deformations.* Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), no. 3, 815-844.