交代符号行列の高さ関数と順序イデアル

岡山大学大学院 自然科学研究科 数理物理科学専攻
大本豊数 (Toyokazu OHMOTO)

概要

置換行列のある種の一般化である交代符号行列には高さ関数と呼ばれる行列を定めることができ, それを用いて交代符号行列全体の集合に順序構造を導入できる. 特に有限分配束を成すが, 有限分配束の基本定理により, 有限分配束 L には, ある順序集合 P が同型を除いて一意的に存在して, P の順序イデアルの成す順序集合 $J(P)$ と L が同型になる. 主に高さ関数の各成分について, 取りうる値の範囲に関する命題に注目し, それぞれの命題の関係性に基づいてそのような P の考察を行う.

1 導入

ここで取り扱う交代符号行列とは, Mills-Robbins-Rumsey [4] によって数え上げ問題が提唱された対象である. 数え上げ問題自体は Kuperberg [3], Zeilberger [7] などによって解決されているが, Kuperberg [3] による証明において, 数理物理学に由来する六頂点モデルが用いられており, 今日ではそれらを用いての特徴付けが進められている. 六頂点モデルは離散数学におけるグラフ理論的なアプローチを与える対象であり, グラフを用いてのジャイレーションと呼ばれる操作による特徴付けなどが挙げられる. 一方で, 交代符号行列に高さ関数と呼ばれる行列を定義することによって半順序を導入することができるが, Striker-Williams [1] によって, 順序集合論的なアプローチによるジャイレーションの記述が示されている. 本稿では, 交代符号行列の順序構造について着目していく.

2 交代符号行列と高さ関数

2.1 交代符号行列

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元は, 成分が 0 と 1 から成り, 置換行列と呼ばれる n 次正方行列によって表されることが知られている. 例えば, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対応する置換行列は $\left(\delta_{j,\sigma(i)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ である.

ここで, 構成する成分を 0 と 1 に加えて -1 の 3 種類に拡張し, n 次の置換行列のある種の一般化となるような n 次正方行列として n 次の交代符号行列を導入する.

定義 2.1. n 次正方行列 $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ が以下を満たすとき, n 次の**交代符号行列** (*Alternating sign* *matrix*) という.

$$
\begin{aligned}
&a_{i,j} \in \{0,1,-1\} && (1 \le i,j \le n),\\
&\sum_{1\le i\le k} a_{i,j},\ \sum_{1\le j\le k} a_{i,j} \in \{0,1\} && (1 \le i,j,k \le n),\\
&\sum_{1\le i\le n} a_{i,j} = \sum_{1\le j\le n} a_{i,j} = 1 && (1 \le i,j \le n).
\end{aligned}
$$

また, n の交代符号行列全体の集合を $\mathcal{A}_n$ と書く.

例 2.1. 4 次の交代符号行列の具体例として以下が挙げられる.

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

2.2 六頂点モデル

n 次の交代符号行列は, n^2+4n 個の頂点から成る格子状のグラフ L_n を用いて後述する六頂点モデルを対応付けられることが知られている. まず, 格子状のグラフ L_n について説明する. ここでは, 頂点 u と頂点 v の間の無向辺を非順序対 $\{u,v\}$ で表すことにする.

定義 2.2. $V(L_n) = V_0(n) \sqcup V_1(n)$ を頂点集合, $E(L_n) = E_0(n) \sqcup E_1(n)$ を辺集合とする無向グラフ $L_n = (V(L_n), E(L_n))$ を以下のように定める. まず, 頂点集合について,

$$
\begin{aligned}
V_0(n) &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, 1 \le x,y \le n\right\}\\
V_1(n) &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, 1 \le x \le n, y \in \{0,n+1\}\right\} \sqcup \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, x \in \{0,n+1\}, 1 \le y \le n\right\}
\end{aligned}
$$

と定め, $V_0(n)$ の元を**内部頂点** (*interior vertex*), $V_1(n)$ の元を**境界点** (*boundary vertex*) と呼ぶ. 次に, 辺集合について

$$
\begin{aligned}
E_0(n) := &\{\{(x,y),(x+1,y)\} \mid 1 \le x < n, 1 \le y \le n\}\\
&\sqcup \{\{(x,y),(x,y+1)\} \mid 1 \le x \le n, 1 \le y < n\}\\
E_1(n) := &\{\{(x,y),(x+1,y)\} \mid x \in \{0,n\}, 1 \le y \le n\}\\
&\sqcup \{\{(x,y),(x,y+1)\} \mid 1 \le x \le n, y \in \{0,n\},\}
\end{aligned}
$$

と定め, $E_1(n)$ の元を**境界辺** (*boundary edge*) と呼ぶ.

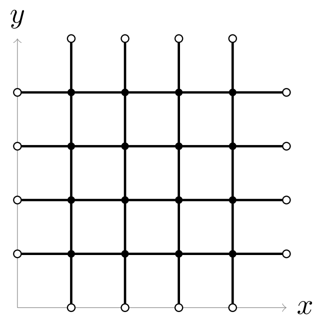


図 1: L_4

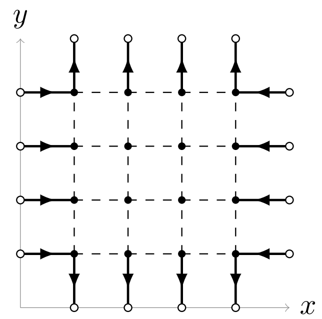


図 2: 開境界条件

図 1 において内部頂点を $\bullet$, 境界点を $\circ$ として L_4 を記す. 特に, 内部頂点が n^2 個, 境界点が $4n$ 個であり, 境界点に接続する合計 $4n$ 本の辺が L_n の境界辺である. また, L_n の各内部頂点 $v \in V_0(n)$ には 4 本の辺が接続している.

ここで, グラフの頂点の順序対 (u,v) を用いて u を始点, v を終点とする有向辺を表すことにして, $\tilde{E}(L_n) := \bigsqcup_{\{u,v\}\in E(L_n)} \{(u,v),(v,u)\}$ とする. いま, 写像 $\varphi\colon E(L_n) \to \tilde{E}(L_n)$ が $\varphi(\{u,v\}) = (u,v)$ または $\varphi(\{u,v\}) = (v,u)$ を満たすとき, φ を L_n の**辺の向き付け**と呼ぶ. 特に, $4n$ 本の境界辺の向き $\varphi|_{E_1(n)}$ を固定して向き付けを考えることが多く, $\varphi|_{E_1(n)}$ を φ の**境界条件** (*boundary condition*) と呼ぶ. また, 図 2 のように南北の境界辺が境界点を終点, 東西の境界辺が境界点を始点とするような境界条件であるとき, **開境界条件** (*open boundary condition*) を持つという.

さて, L_n の辺の向き付け φ および内部頂点 $v \in V_0(n)$ について, v に接続する辺は 4 本だったが, そのうち 2 本が v を始点, 残りの 2 本が v を終点とするとき, φ は v について 2-*in* 2-*out* という. また, L_n の辺の向き付け φ が全ての内部頂点について 2-in 2-out であるとき, L_n 上の**六頂点モデル** (*six vertex model*) の state という.

特に, 開境界条件を持つ L_n 上の六頂点モデルの state 全体の集合と n 次交代符号行列全体の集合 $\mathcal{A}_n$ との間に全単射が構成できることが知られており, n 次交代符号行列の (i,j)-成分と, 内部頂点 $(j, n-i+1) \in V_0(n)$ に接続する 4 本の辺の向きが対応している. 詳細は後述する.

2.3 高さ関数

さらに, n 次交代符号行列には対応する六頂点モデルの state を用いることで, 高さ関数と呼ばれる $n+1$ 次正方行列を定めることができる.

定義 2.3. $n+1$ 次正方行列 $(h_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ が以下を満たすとき, **高さ関数** (*height function*) という.

$$h_{0,j} = h_{j,0} = h_{n-j,n} = h_{n,n-j} = j \qquad (0 \le j \le n) \tag{1a}$$

$$|h_{i,j} - h_{i-1,j}| = |h_{j,i} - h_{j,i-1}| = 1 \qquad (1 \le i \le n,\ 0 \le j \le n) \tag{1b}$$

L_n の成す面に高さ関数の成分を対応させ, 面を隔てる辺の向き付けによって, 隣り合う成分同士の大小を決定する. このとき各 $1 \le i,j \le n$ について, 内部頂点 $(j, n-i+1)$ の南東の面から時計回りに $h_{i,j}$, $h_{i,j-1}$, $h_{i-1,j-1}$, $h_{i-1,j}$ をそれぞれ対応させる. ただしこの場合の東, 北はそれぞれ x 軸方向, y 軸方向のことを言う. 図 4 は例 2.1 に対応した六頂点モデルの state および高さ関数である.

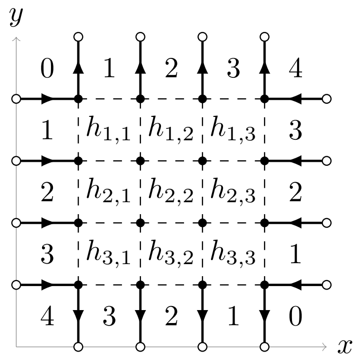


図 3: $n = 4$ のとき

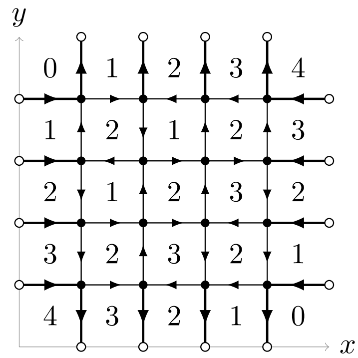
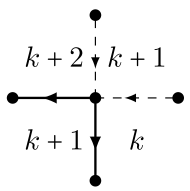
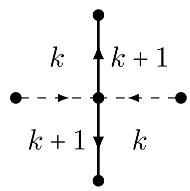


図 4: $n = 4$ のときの高さ関数の例

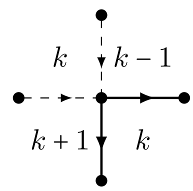
さて, $h_{i,j} = k$ と固定したとき, 条件 (1b) を満たす組 $(h_{i,j}, h_{i,j-1}, h_{i-1,j-1}, h_{i-1,j})$ は 6 種類のいずれかであり, 内部頂点 $(j, n-i+1)$ が 2-in 2-out であるときの $(j, n-i+1)$ に接続する 4 本の辺の向きの付け方も 6 種類のいずれかである. 図 5 において, 内部頂点 $(j, n-i+1)$ に接続する 4 本の辺の向き, 高さ関数の成分の組 $(h_{i,j}, h_{i,j-1}, h_{i-1,j-1}, h_{i-1,j})$ および対応した交代符号行列の (i, j)-成分を示す.



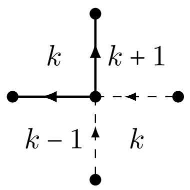
(a) 0 と対応



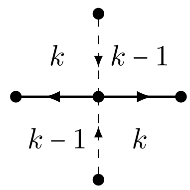
(b) 1 と対応



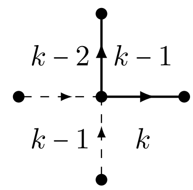
(c) 0 と対応



(d) 0 と対応



(e) −1 と対応



(f) 0 と対応

図 5: 高さ関数の決定の仕方

2.4 半順序

高さ関数を用いて $\mathcal{A}_n$ には半順序を導入する前に, まず半順序に関する基本的な事項について説明する. 本稿では P が有限集合であるようなものに限定して議論していく.

定義 2.4. P を集合, $\leq$ を P 上の二項関係とする. 以下の 3 つの条件を満たすとき $\leq$ を P 上の**半順序** (*partial order*) といい, $(P, \leq)$ を半順序集合 (*partially ordered set*) あるいはポセット (*poset*) と

いう．また, 順序が明らかなとき, 省略して単に P を半順序集合ということもある.

$$\begin{aligned}
&\text{任意の } x \in P \text{ に対して, } x \leq x \text{ を満たす.} && \text{(反射律)}\\
&\text{任意の } x, y \in P \text{ に対して, } x \leq y \text{ かつ } y \leq x \text{ を満たすならば } x = y \text{ を満たす.} && \text{(反対称律)}\\
&\text{任意の } x, y, z \in P \text{ に対して, } x \leq y \text{ かつ } y \leq z \text{ を満たすならば } x \leq z \text{ を満たす.} && \text{(推移律)}
\end{aligned}$$

特に $x \leq y$ かつ $x \neq y$ を満たす半順序集合 $(P, \leq)$ の元 $x, y \in P$ について, $z \neq x, y$ かつ $x \leq z \leq y$ を満たすような $z \in P$ が存在しないとき y は x をカバーする (y *cover* x) という．半順序集合はカバーの関係を用いて, **ハッセ図** (*Hasse diagram*) と呼ばれる図式で表される．半順序集合 $(P, \leq)$ のハッセ図は, P を頂点集合, $\{(u, v) \mid v$ は u をカバーする.$\}$ を辺集合とする有向グラフとして定義できる. ハッセ図は基本的にカバーする元を紙面の上側, カバーされる元を下側に配置する.

例 2.2. (ポジティブルートポセット)

半順序集合の例として A 型ポジティブルートポセット $\Phi^+(A_n)$ を紹介する．まず, $n+1$ 次元ユークリッド空間の部分集合 $\Phi^+(A_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を標準基底 e_i $(1 \leq i \leq n+1)$ を用いて以下のように定める.

$$\Phi^+(A_n) \coloneqq \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$$

このとき, $e_i - e_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$ を $\Phi^+(A_n)$ の単純ルートと呼び, 以下のように $\Phi^+(A_n)$ に半順序を定めたものを A 型ポジティブルートポセットという.

$$\alpha \leq \beta \underset{\text{def}}{\iff} \beta - \alpha \text{が単純ルートの非負整数係数の和で表せる.}$$

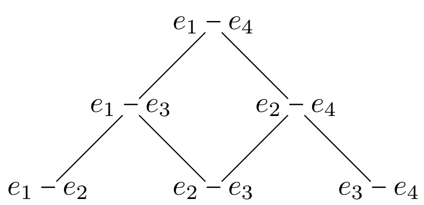


図 6: $\Phi^+(A_n)$ のハッセ図

次に, 半順序集合 $(P, \leq)$ に対して誘導される半順序集合 $J(P)$ について説明する．P の部分集合 I が 任意の $x, y \in P$ に対して, $x \in I$ かつ $y \leq x$ ならば $y \in I$ を満たすとき, I のことを $(P, \leq)$ の**順序イデアル** (order ideal) という．$(P, \leq)$ の順序イデアル全体の成す集合を $J(P)$ と書き, 集合の包含関係 $\subseteq$ によって半順序を定める.

いま, 半順序集合 $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$ に対して, 写像 $\varphi\colon P \to Q$ が任意の $a, b \in P$ について $a \leq_P b$ ならば$\varphi(a) \leq_Q \varphi(b)$ を満たすとき, φ は順序を保つ写像という．特に, 順序を保つ全単射が存在するとき, 順序同型であるという.

3　交代符号行列の順序構造

n 次交代符号行列の集合 $\mathcal{A}_n$ に対して, 高さ関数を用いて以下のように半順序を定める.

定義 3.1. $A,B\in\mathcal{A}_n$ および $(h_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ を A の高さ関数, $(g_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ を B の高さ関数とする. このとき, 以下のように $\mathcal{A}_n$ に半順序を定める.

$$A\le B \underset{\text{def}}{\iff} \text{任意の } 0\le i,j\le n \text{ について } h_{i,j}\le g_{i,j}\text{を満たす.}$$

対称群 $\mathfrak{S}_n$ は A 型 Weyl 群と呼ばれ, Bruhat order と呼ばれる順序が定まることが知られている. 一方で, 高さ関数によって定まる $\mathcal{A}_n$ の順序は $\mathfrak{S}_n$ の Bruhat order の Dedekind-MacNeille completion と呼ばれる拡大になっており, さらに有限分配束と呼ばれる特別な半順序集合を成していることが知られている. 一般の有限分配束に対して, 以下のような基本定理が成り立つ.

定理 3.1. (有限分配束の基本定理)
L を有限分配束とする. このとき, ある順序集合 P が同型を除いて一意的に存在して, $L\cong J(P)$ を満たす.

この有限分配束の基本定理を動機に, 本稿では $\mathcal{A}_n\cong J(\mathbb{P}_n)$ となる $\mathbb{P}_n$ を構成し, n 次交代符号行列を別のある順序集合の順序イデアルで表すためのアイデアを紹介していく.

3.1 順序イデアルの構成

順序イデアルの成す半順序集合への順序を保つ写像 $\varphi{:}L\to J(P)$ を構成するためにはまず, 各 $x\in P$ に対して L の元に関する条件 $p(x)$ を用意する. ただし, 任意の $x,y\in P$ に対して $x\le y$ ならば $p(y)\Rightarrow p(x)$ を満たすように定める. このとき, 各 $l\in L$ について $\varphi(l)=\{x\in P\,|\,l \text{ は } p(x) \text{ を満たす.}\}$ と定めれば順序を保つ写像が得られる. また, $I\in J(P)$ が与えられたとき, 各 $x\in I$ について条件 $p(x)$ を満たし, 各 $y\in P\smallsetminus I$ について条件 $p(y)$ を満たさないような $l\in L$ が一意的に定まれば全単射になる.

ここで添え字の集合 $\mathcal{I}(n)$ を $\mathcal{I}(n):=\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2\,\middle|\,1\le i,j\le n-1\right\}$ とおく. このとき, 各添え字 $(i,j)\in\mathcal{I}$ に対して, 高さ関数の (i,j)-成分 $h_{i,j}$ が定まれば高さ関数 $(h_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ が決定できる. $I\in J(\mathbb{P}_n)$ が与えられたときに, 各添え字 $(i,j)\in\mathcal{I}(n)$ について $h_{i,j}$ が一意的に定まるような $\mathbb{P}_n$ を構成していく. まず, 各添え字 $(i,j)\in\mathcal{I}(n)$ について集合 $P_{i,j}$ を用意し, それらを用いて $\mathbb{P}_n$ を構成する. 準備として, $\mathcal{I}(n)$ を $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 個の集合に分ける.

定義 3.2. $l\in\left\{1,2,\ldots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ に対して, T_l を以下のように定め, l 番目のトラックと呼ぶ.

$$\begin{aligned}T_l:=&\{(l,j)\,|\,l\le j\le n-l\}\cup\{(i,n-l)\,|\,l\le i\le n-l\}\\&\cup\{(n-l,n-j)\,|\,l\le j\le n-l\}\cup\{(n-i,l)\,|\,l\le i\le n-l\}\end{aligned}$$

注 1. このとき, 以下のことに注意が必要である.

(i) n が偶数かつ $l=\frac{n}{2}$ のとき, $T_l=\left\{\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)\right\}$.
(ii) それ以外のとき, $T_l=\displaystyle\bigsqcup_{l\le j\le n-l-1}\{(l,j),(j,n-l),(n-l,n-j),(n-j,l)\}$.

ここで, $h_{i,j}$ の取りうる値で最小の値を $m_{i,j}$ とすると, $l\le j\le n-l$ について, $m_{l,j}=m_{n-l,n-i}=j-l$ および $m_{j,n-l}=m_{n-j,l}=n-j-l$ となる. また, $(i,j)\in T_l$ のとき, $h_{i,j}$ の取りうる値は

$m_{i,j}, m_{i,j}+2, m_{i,j}+4, \dots, m_{i,j}+2l$ の $l+1$ 種類である．いま，$(i,j) \in T_l$ に対して，$P_{i,j}$ を以下のように定める．

定義 3.3. $1 \le l \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ および $(i,j) \in T_l$ とする．このとき，集合 $P_{i,j}$ を以下のように定める．

$$P_{i,j} \coloneqq \left\{ (i,j,k) \in \mathbb{Z}^3 \,\middle|\, 1 \le k \le l \right\}$$

また，各 $(i,j,k) \in P_{i,j}$ に対して，高さ関数の (i,j)-成分 $h_{i,j}$ に関する条件を定める．

定義 3.4. $1 \le l \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ および $(i,j) \in T_l$ とする．また，$A \in \mathcal{A}_n$ および $(h_{i,j})_{0 \le i,j \le n}$ を A の高さ関数としたとき，各 $(i,j,k) \in P_{i,j}$ に対して条件 $p(i,j,k)$ を以下のように定める．

$$A \text{ が条件 } p(i,j,k) \text{ 満たす.} \underset{\text{def}}{\iff} h_{i,j} \ge m_{i,j} + 2k \text{ を満たす.}$$

特に，任意の $(i,j,k), (i,j,k') \in P_{i,j}$ について，$k < k'$ ならば $p(i,j,k)$ は $p(i,j,k')$ の必要条件になっている．また，$(i,j) \in T_l$ のとき，$1 \le k \le l-1$ について以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
h_{i,j} = m_{i,j} &\iff h_{i,j} \text{ は } p(i,j,1) \text{ を満たさない.} \\
h_{i,j} = m_{i,j} + 2k &\iff \begin{array}{l} h_{i,j} \text{ は } p(i,j,k) \text{ を満たし,} \\ p(i,j,k+1) \text{ を満たさない.} \end{array} \\
h_{i,j} = m_{i,j} + 2l &\iff h_{i,j} \text{ は } p(i,j,l) \text{ を満たす.}
\end{aligned}$$

ここで，$\mathbb{P}_n \coloneqq \bigsqcup_{(i,j) \in \mathcal{I}(n)} P_{i,j}$ とおき，以下のようなカバー関係を用いて半順序を定める．

$$\begin{aligned}
&(i',j',k') \text{ が } (i,j,k) \text{ をカバーする} \\
\iff &\begin{cases} |i'-i| = 1 \\ j' = j \\ m_{i',j'} + 2k' = m_{i,j} + 2k + 1 \end{cases} \text{または} \begin{cases} i' = i \\ |j'-j| = 1 \\ m_{i',j'} + 2k' = m_{i,j} + 2k + 1 \end{cases} \text{を満たす.}
\end{aligned}$$

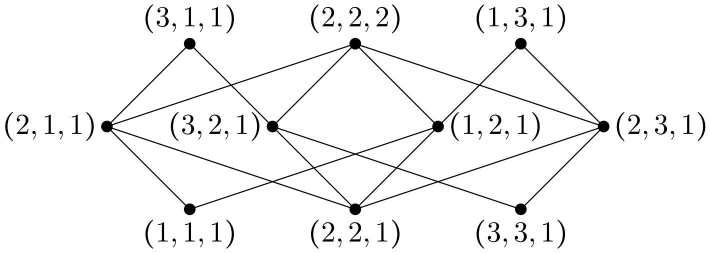


図 7: $\mathbb{P}_4$ のハッセ図

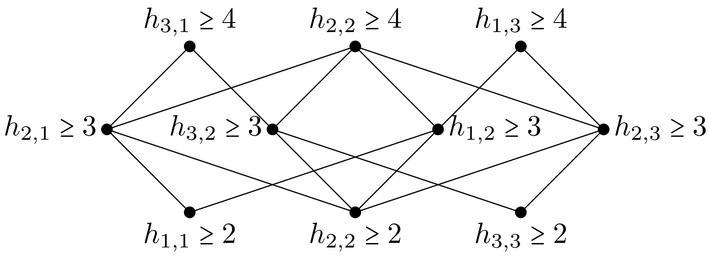


図 8: $\mathbb{P}_4$ の各元に対応する条件

このとき, 以下の主張が成り立つ.

命題 3.1. $\varphi : \mathcal{A}_n \to \mathbb{P}_n$ を各 $A \in \mathcal{A}_n$ について, $\varphi(A) := \{(i,j,k) \in \mathbb{P}_n \mid A$ の高さ関数が $p(i,j,k)$ を満たす.$\}$ と定めると φ は順序を保つ全単射となる.

逆写像は $I \in J(\mathbb{P}_n)$ が与えられたとき, 各添え字 $(i,j) \in \mathcal{I}(n)$ について, $(i,j) \in T_l$ のとき, 次のように $h_{i,j}$ を定めれば良い.

(i) $(i,j,1) \notin I$ のとき, $h_{i,j} = m_{i,j}$.
(ii) $(i,j,k) \in I$ かつ $(i,j,k+1) \notin I$ のとき, $h_{i,j} = m_{i,j} + 2k$. $(1 \leq k \leq l-1)$
(iii) $(i,j,l) \in I$ のとき, $h_{i,j} = m_{i,j} + 2l$.

先ほど構成した $\mathbb{P}_n$ について, 元の個数を計算してみると

$$\#\mathbb{P}_{2m} = \sum_{1 \leq k \leq m-1} 4k(2m-2k) + m = \frac{1}{3}m(2m-1)(2m+1) = \sum_{1 \leq k \leq 2m-1} \binom{k+1}{2},$$
$$\#\mathbb{P}_{2m+1} = \sum_{1 \leq k \leq m} 4k(2m+1-2k) = \frac{2}{3}m(m+1)(2m+1) = \sum_{1 \leq k \leq 2m} \binom{k+1}{2}.$$

特に, 例 2.2 で紹介した A 型ポジティブルートポセットを用いて

$$\#\mathbb{P}_n = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \#\Phi^+(A_n)$$

と表せて, 図 9 および図 10 のように $\mathbb{P}_n$ は $\Phi^+(A_1) \sqcup \Phi^+(A_2) \sqcup \cdots \sqcup \Phi^+(A_{n-1})$ と表せる.

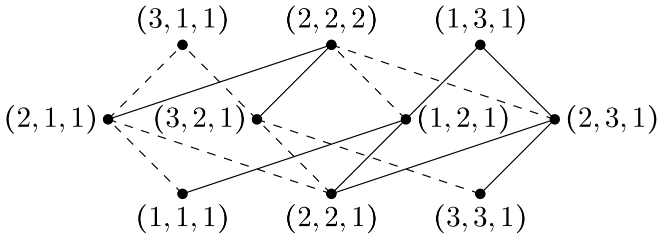


図 9: $\mathbb{P}_4$ のハッセ図の分解

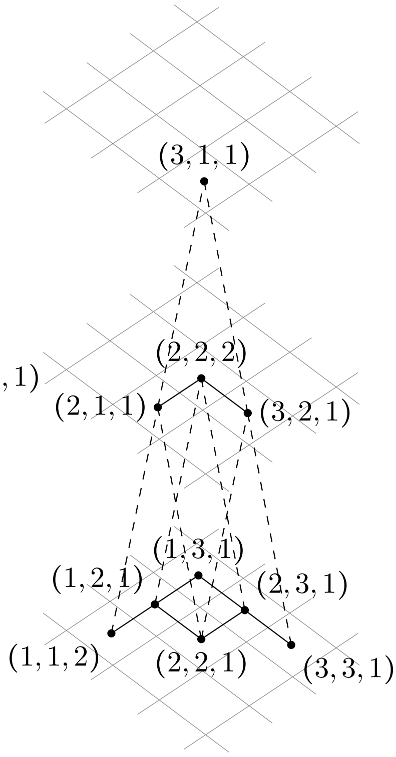


図 10: $\mathbb{P}_4$ のハッセ図の分解

参考文献

[1] J. Striker and N. Williams, "Promotion and rowmotion", *European J. Combin.*, **33** (2012) 1919 – 1942.

[2] J. de Gier, "Loops, matchings and alternating-sign matrices", *Discrete Math.*, **298** (2005) 365 – 388.

[3] G. Kuperberg, "Classes of Alternating-Sign Matrices under One Roof", *Ann. of Math.*, **156** (2002) 835 – 866.

[4] W.H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr., "Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions", *J. Combin. Theory Ser. A*, **34** (1983) 340 – 359.

[5] Davis M. Bressoud, *Proofs and Confirmations — The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press (1999).

[6] S. Okada, "Enumeration of Symmetry Classes of Alternating Sign Matrices and Characters of Classical Groups", *J. Algebraic Combin.*, **23** (2006) 43 – 69.

[7] Doron Zeilberger, "Proof of the Alternating Sign Matrix Conjecture" *Elec. J. Comb.*, **3** (1996) R13

[8] Luigi Cantini and Andrea Sportiello, "Proof of Razumov-Stroganov conjecture", *J. Combin. Theory Ser. A*, **5** (2011) 1549 –1574

[9] B. Wieland, "Large Dihedral Symmetry of the set of Alternating Sign Matrices, *Electr. J. Comb.*, **7** (2000) R37

[10] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics Volume 1 second edition*, Cambridge University Press(2011)