

トーリック曲面のフルヴィッツ多面体の頂点について

福岡大学大学院理学研究科 応用数学専攻
大楠涼馬 (Ryoma OGUSU)

概要

射影的代数多様体 $X^n \subset \mathbb{P}^N$ の Hurwitz 形式とは, X と接する $(N - n)$ 次元部分空間がなす Grassmann 多様体 $\mathbb{G}(N - n, \mathbb{P}^N)$ の超曲面の定義多項式である. そのウエイト多面体を Hurwitz 多面体と呼ぶ. 本稿では, X がトーリック曲面の場合の Hurwitz 多面体について [5] の結果の一部を紹介する.

1 導入

1.1 終結式と判別式

与えられた連立代数方程式

$$\begin{aligned} f(x) &= a_m x^m + \cdots + a_0 = 0, \quad a_m \neq 0 \\ g(x) &= b_n x^n + \cdots + b_0 = 0, \quad b_n \neq 0 \end{aligned}$$

が共通解を持つための条件を与える a_i, b_j を変数とする多項式を f, g の終結式 (Resultant) と呼び, $\text{Res}(f, g)$ と書く. また, $f(x) = 0$ が重解 α を持つための条件を与える a_i を変数とする多項式を判別式と呼び, $\Delta(f)$ と書く. これらは連立代数方程式の理論 (消去理論) において古典的な研究対象である.

終結式・判別式は, 次のように射影的代数多様体に対して拡張される. \mathbb{P}^N 内の k 次元部分空間からなる Grassmann 多様体を $\mathbb{G}(k, \mathbb{P}^N)$ と書く. $X \subset \mathbb{P}^N$ を線形正規かつ既約な n 次元射影的代数多様体とする. さらに X の次数 d_X および X の特異集合の余次元を 2 以上であると仮定する. このとき

$$\{L \in \mathbb{G}(N - n - 1, \mathbb{P}^N) \mid L \cap X \neq \emptyset\}$$

は $\mathbb{G}(N - n - 1, \mathbb{P}^N)$ の超曲面を与える. この定義多項式を X の **Chow 形式** と呼び, R_X と書く. また

$$\{H \in (\mathbb{P}^N)^\vee = \mathbb{G}(N - 1, \mathbb{P}^N) \mid \mathbb{T}_p X \subset H \text{ for some regular point } p \in X\}$$

の Zariski 閉包を X の双対多様体と呼び, X^\vee と書く. ただし, $\mathbb{T}_p X \subset \mathbb{P}^N$ を \mathbb{P}^N に埋め込まれた X の接空間とする. X^\vee が余次元 1 を持つとき, その定義多項式を Δ_X と書き, X の判別式と呼ぶ. 一般には X^\vee の余次元は 1 であるとは限らないことに注意する. Chow 形式 R_X と判別式 Δ_X は, X と接する (または, 交わる) k 次元部分空間がなす Grassmann 多様体の部分多様体

$$\{L \in \mathbb{G}(k, \mathbb{P}^N) \mid L \text{ intersects non-transversely } X\} \quad (1)$$

の一種としてみなすことができる. (1) において $k = N - n - 1$ のときは Chow 形式が定める超曲面, $k = N - 1$ のときは判別式が定める超曲面に対応する.

1.2 Hurwitz 形式

Sturmfels [8] は (1) において $k = N - n$ のときに得られる $\mathbb{G}(N - n, \mathbb{P}^N)$ の部分多様体

$$\{L \in \mathbb{G}(N - n, \mathbb{P}^N) \mid \#(L \cap X) < d_X\}$$

が超曲面をなすことを示し, その定義多項式を **Hurwitz 形式** と名付けた. 本稿では, その多項式を Hu_X と書くことにする. 多項式 Hu_X は $\mathbb{G}(N - n, \mathbb{P}^N)$ の座標環の既約元である. Hurwitz 形式は Chow 形式と判別式の間位置する多項式であるが, 次のように言い換えられることが知られている [8]. X に対して Segre 埋め込み

$$X \times \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{n(N+1)-1}$$

の双対多様体 $(X \times \mathbb{P}^{n-1})^\vee$ は常に余次元 1 であり, その定義多項式は**超判別式** $\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}}$ と呼ばれている [6]. 多項式 $\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}}$ は Hu_X を Plücker 座標から Stiefel 座標に書き直して得られる多項式に等しい [8].

1.3 Hurwitz 形式と幾何学的不変式論

Mumford の幾何学的不変式論 [3] の意味での (半) 安定な Chow 形式全体は与えられた次元および次数をもつ代数的サイクルのモジュライ空間 (Chow 多様体) を与える. 一方, 偏極多様体上に標準 Kähler 計量 (例えば, スカラー曲率一定計量) が存在することと多様体の安定性のひとつである K -安定性 (またはその改良版) が同値であるという予想 (Yau-Tian-Donaldson 予想) がある. Paul [6] は, 上記の予想に対して, Chow 形式と超判別式の組に対して幾何学的不変式論を拡張した安定性を提案した. このような背景から, Hurwitz 形式 (超判別式) および Chow 形式を具体的に求めることは Kähler 幾何学の一つの課題となる.

2 トーリック多様体の Hurwitz 多面体

2.1 Hurwitz 多面体

一般に Chow 形式や判別式は膨大な数の項をもつ多項式であり, それらを求めることは難しい問題である. しかし, 前節で述べた安定性の問題を考える場合, 多項式そのものよりも, トーラス作用に関するウェイト多面体が分かれば十分である. \mathbb{T} を $(N + 1)$ 次元複素トーラス $(\mathbb{C}^\times)^{N+1}$ とすると, \mathbb{T} の \mathbb{P}^N への自然な作用は $\mathbb{G}(k, \mathbb{P}^N)$ およびその座標環への作用を誘導する. この作用に対する Hurwitz 形式のウェイト多面体を **Hurwitz 多面体** $\mathcal{W}(\text{Hu}_X)$ と呼ぶ. これは \mathbb{R}^{N+1} 内の凸多面体となる. Hurwitz 形式を超判別式とみなすと $\mathcal{W}(\text{Hu}_X)$ は, 以下のように定義されるウェイト多面体と等しい. \mathbb{T} を第一成分には自然な作用, 第二成分には自明な作用として $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{n-1}$ へ作用させる. この作用は $(\mathbb{P}^{n(N+1)-1})^\vee$ への作用を誘導する. この作用に関する $\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}}$ のウェイト多面

体 $\mathcal{W}(\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}})$ は $\mathcal{W}(\text{Hu}_X)$ と等しい。後者には次節で説明する Gelfand-Kapranov-Zelevinsky [1] らの理論（以下，GKZ 理論）を直接適用できる。

2.2 massive GKZ ベクトル

X がトーリック多様体の場合，GKZ 理論により，トーリック多様体に対応する多面体の分割の組み合わせ論的情報から Chow 形式や判別式のウエイト多面体が求められる。格子 \mathbb{Z}^n 上の点配置 $A = \{\omega_1, \dots, \omega_{N+1}\}$ に対して， \mathbb{P}^N に埋め込まれた n 次元トーリック多様体 X_A が次のように対応する。

$$X_A = \overline{\left\{ [t^{\omega_1} : \dots : t^{\omega_{N+1}}] \in \mathbb{P}^N \mid \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n \right\}}^{\text{Zariski}}$$

ただし $t^{\omega_i} = \prod_{j=1}^n t_j^{\omega_{ij}}$ とする。このとき，凸包 $Q := \text{Conv}(A)$ は X_A の運動量写像の像である。

[1] により，トーリック多様体 X_A の判別式のウエイト多面体の頂点は (Q, A) の単体分割とそれに対応するベクトルで与えられる。 (Q, A) の単体分割 T に含まれる k 次元単体 σ が Q の k 次元面（フェイス）であるとき， σ を massive であると言う。ただし， n 次元単体はすべて massive であると定義する。点 $\omega_i \in A$ に対して， ω_i を含む k 次元 massive 単体の体積の和を

$$\eta_{T,k}(\omega_i) := \sum_{\omega_i \prec \sigma} \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\sigma)$$

と書き，それらを成分に持つベクトルを

$$\eta_{T,k} := (\eta_{T,k}(\omega_1), \dots, \eta_{T,k}(\omega_{N+1}))$$

とする。ここで $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}$ は各次元において単位単体の体積を 1 とするように正規化されているとする。ベクトル $\eta_{T,k}$ の k に関する交代和で得られるベクトル

$$\eta_T := \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \eta_{T,k} \in \mathbb{Z}^{N+1}$$

を **massive GKZ ベクトル** と呼ぶ。また， $\eta_{T,n}$ を **GKZ ベクトル** と呼ぶ。 (Q, A) の単体分割 T に関して区分的線形で下に凸な関数 $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するとき， T を **正則単体分割** と呼ぶ。

定理 2.1 ([1]). X^\vee の余次元が 1 ならば， $(N+1)$ 次元複素トーラス \mathbb{T} の自然な作用に対する X の判別式の Newton 多面体は，すべての正則単体分割 T の massive GKZ ベクトル η_T の凸包と等しい。

ここで $(N+1)$ 次元複素トーラス \mathbb{T} の自然な作用に対する X の判別式の Newton 多面体はウエイト多面体 $\mathcal{W}(\Delta_X)$ と等しいことに注意する。

2.3 超判別式のウエイト多面体

定理 2.1 を直積 $X \times \mathbb{P}^{n-1}$ に適用する。直積 $X \times \mathbb{P}^{n-1}$ は Cartesian 積

$$\tilde{A} = \{\tilde{\omega}_{i,j} := (\omega_i, \mathbf{e}_j) \in \mathbb{R}^{2n-1} \mid \omega_i \in A, 1 \leq i \leq N+1, 1 \leq j \leq n-1\}$$

に対応するトーリック多様体である。ただし、 e_j は \mathbb{R}^{n-1} の基本単位ベクトルとする。 \tilde{A} の凸包を \tilde{Q} とする。このとき定理 2.1 より、 $n(N+1)$ 次元複素トーラスの自然な作用に対する $X \times \mathbb{P}^{n-1}$ の判別式のウェイト多面体は massive GKZ の凸包

$$\text{Conv}(\{\eta_{\tilde{T}} \mid \tilde{T}: \text{regular triangulation of } (\tilde{Q}, \tilde{A})\}) \subset \mathbb{R}^{n(N+1)}$$

と等しい。しかし、我々が考えている $\mathcal{W}(\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}})$ は $(N+1)$ 次元複素トーラス \mathbb{T} の作用に対するウェイト多面体であったことに注意すると、 $\mathcal{W}(\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}})$ は $\eta_{\tilde{T},k}(\tilde{\omega}_{i,j})$ を j について和をとって得られるベクトルの凸包

$$\text{Conv}\left\{\nu_{\tilde{T}} := \left(\sum_j \sum_k (-1)^{n-k} \eta_{\tilde{T},k}(\tilde{\omega}_{1,j}), \dots, \sum_j \sum_k (-1)^{n-k} \eta_{\tilde{T},k}(\tilde{\omega}_{N+1,j})\right)\right\}_{\tilde{T}} \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

と等しいことがわかる。さらに TOPCOM [7] を用いることで、 $\mathcal{W}(\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}})$ を計算機で実行することが可能となる。

2.4 問題

しかし、 $\mathcal{W}(\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}})$ を計算機を用いて計算する上で困難な点がある。もともと多面体の正則単体分割の数は A の元の個数が大きくなるにつれ急激に増える上に、 $\mathcal{W}(\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}})$ を計算するためには (Q, A) ではなく (\tilde{Q}, \tilde{A}) の正則単体分割を取らなければならない。後者は前者に比べて、その数が非常に多い。例えば、点配置

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

の場合、 (Q, A) の正則単体分割は 32 個であるにもかかわらず、 (\tilde{Q}, \tilde{A}) の正則単体分割は 928930 個ある。これにより Q の次元が 2 であっても、 A の元の個数が大きくなると計算機での $\mathcal{W}(\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}})$ の計算も困難になる。

2.5 Cayley トリック

前節の問題を考える上で、終結式と判別式を結びつける結果を思い出そう。古典的な結果として、多項式 $f(x) = a_m x^m + \dots + a_0$ の判別式は

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{1}{a_m} \text{Res}(f, df/dx)$$

の形の終結式として得られる。多変数版では以下の等式が成り立つ（これを **Cayley トリック** と呼ぶ）。

$$\Delta_{X_A \times \mathbb{P}^n} = R_{X_A} \quad (3)$$

一方で定理 2.1 のように Chow 多面体は (Q, A) の正則単体分割 T の GKZ ベクトル $\eta_{T,n}$ の凸包に等しいことが知られている [1]。この凸包を **secondary 多面体** と呼ぶ。(3) とここまで述べた結果を合わせると、以下の対応が得られる。

2.4 節で述べた問題の解決に向けて、以下の問題を設定する。

判別式	多面体	分割	ベクトル
$\Delta_{X \times \mathbb{P}^n} = R_X$	secondary 多面体	(Q, A) の正則単体分割	GKZ ベクトル $\eta_{T,n}$
$\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}} = \text{Hu}_X$	Hurwitz 多面体	?	?
$\Delta_{X \times \mathbb{P}^0} = \Delta_X$	判別式多面体	(Q, A) の正則単体分割	mGKZ $\eta_T = \sum (-1)^{n-k} \eta_{T,k}$

問題 2.2. Hurwitz 多面体 $\mathcal{W}(\text{Hu}_X)$ を (Q, A) の正則単体分割に付随するベクトルの凸包として表すことができるか？

3 主結果

本稿の主結果は問題 2.2 に対する部分的解答である。まず、 (Q, A) の正則単体分割に付随するベクトルとして以下のベクトルを導入する。

定義 3.1 ([5]). 点配置 $A \subset \mathbb{Z}^n$ に対して (Q, A) の正則単体分割を T とする。このとき

$$\xi_T := n\eta_{T,n} - \eta_{T,n-1}$$

を T に対する **Hurwitz ベクトル**と呼ぶ。

[5] において、 $n = 2$ のときに次の部分的解答を得た。

定理 3.2 ([5]). 点配置 $A \subset \mathbb{Z}^2$ に対するトーリック曲面 X_A が滑らかとする。このとき、Hurwitz ベクトル ξ_T の凸包は Hurwitz 多面体に含まれる、つまり、

$$\text{Conv}(\{\xi_T \mid T : \text{regular triangulation of } (Q, A)\}) \subset \mathcal{W}(\text{Hu}_X) \quad (4)$$

が成り立つ。

系 3.3. 点配置 $A \subset \mathbb{Z}^2$ に対するトーリック曲面 X_A が滑らかとする。このとき、Plücker 座標に関する Hu_X の次数 $\deg(\text{Hu}_X)$ について以下が成り立つ。

$$\deg(\text{Hu}_X) = 3\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(Q) - \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\partial Q)$$

系 3.3 は [6] で与えられていた超判別式の次数公式と等しい。多面体 $\mathcal{W}(\text{Hu}_X)$ を決定するためには (4) の逆を示す必要があるが、次の予想が成り立つことが期待できる。

予想 3.4 ([5]). 点配置 $A \subset \mathbb{Z}^2$ に対するトーリック曲面 X_A が滑らかとする。このとき次が成り立つ。

$$\text{Conv}(\{\xi_T \mid T : \text{regular triangulation of } (Q, A)\}) = \mathcal{W}(\text{Hu}_X)$$

以下の例において予想 3.4 が正しいことを確認した。

- Segre 埋め込み $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$
- Veronese 埋め込み $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$
- Gorenstein トーリックファノ曲面の一部

最初の 2 例は [8] に $\mathcal{W}(\text{Hu}_X)$ が記載されているが, Hurwitz ベクトルによって $\mathcal{W}(\text{Hu}_X)$ を復元できた. 最後の例については TOPCOM を用いて $\mathcal{W}(\Delta_{X \times \mathbb{P}^1})$ を計算することで予想 3.4 が正しいことを確認した (表 1). Gorenstein トーリックファノ多様体は反射的多面体によって分類されている. 特に 2 次元においては 16 個の同型類に分類されることが知られている (例えば [4] 命題 3.4.1 を参照せよ). 表 1 の第 1 列は [4] の命題 3.4.1 のラベルに従って分類している. 第 2 列は (Q, A) の正則単体分割の数, 第 3 列は (\tilde{Q}, \tilde{A}) の正則単体分割の数を表している. 第 4 列は $\mathcal{W}(\text{Hu}_X)$ の頂点の数を表している.

表 1 予想を検証した反射的多角形

Q	T	\tilde{T}	$\mathcal{W}(\text{Hu}_X)$	Conj 3.4
3	2	84	2	真
4a	3	544	3	真
4b	4	1270	4	真
4c	4	844	4	真
5a	10	26540	10	真
5b	12	33380	12	真
6a	32	928930	32	真

参考文献

- [1] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, “Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants”, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [2] M. M. Kapranov, B. Sturmfels and A. V. Zelevinsky, “Chow polytopes and general resultants”, *Duke Math. J.* **67** (1992), no.1, 189–218.
- [3] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, “Geometric Invariant Theory”, 3rd enlarged ed., *Ergeb. Math.* **34**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1994.
- [4] B. Nill, “Gorenstein toric Fano varieties”, Dissertation, Universität Tübingen, (2005).
- [5] R. Ogusu and Y. Sano, “On the vertices of the Hurwitz polytopes of toric varieties”, preprint (2022).
- [6] S. T. Paul, “Hyperdiscriminant polytopes, Chow polytopes, and Mabuchi energy”, *Ann. Math.* **175** (2012), no.1, 255–296.
- [7] J. Rambau, “TOPCOM: Triangulations of Point Configurations and Oriented Matroids”, *Mathematical Software* (2002), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 330–340.
- [8] B. Sturmfels, “The Hurwitz form of a projective variety”, *J. Symbolic Comput.* **79** (2017), part 1, 186–196.

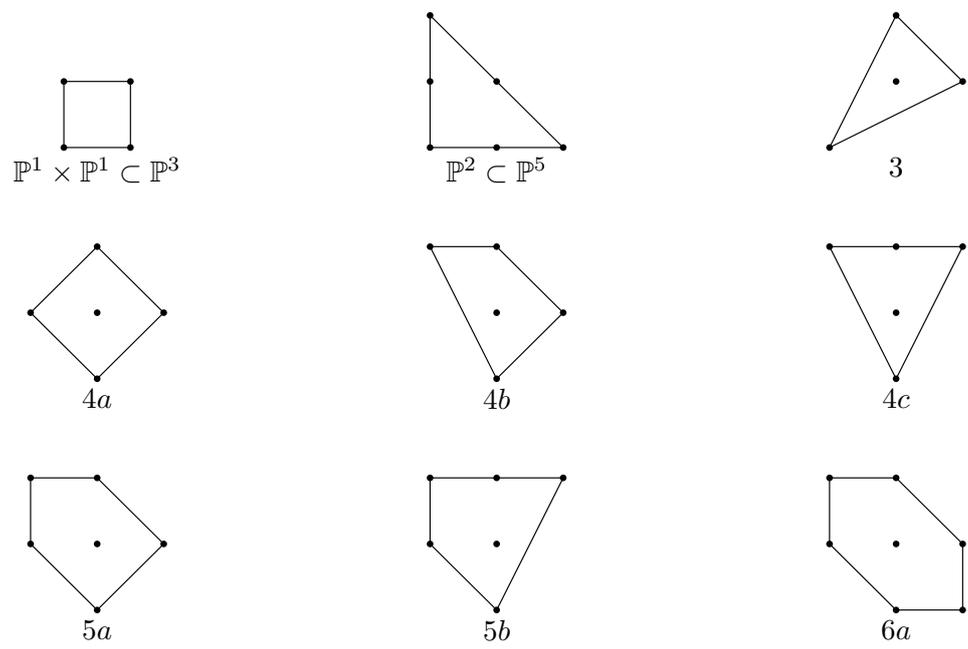


図1 予想を検証した点配置