4次元ユークリッド空間における正則曲線上の一般化されたビショップフレームについて

立命館大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻
野本 統一 (Subaru NOMOTO)

概 要

本研究は立命館大学の野澤啓先生との共同研究による 4 次元ユークリッド空間における一般化されたビショップフレームについての研究である．3 次元ユークリッド空間において, R.L.Bishop[B] がビショップフレームというものを考案したが, Bishop の考察を 4 次元に拡張し, 新たにいくつかのフレームが考えられた．それらフレームの相互の関係性について調べ, フレーム間にはある種の階層性があることが分かった.

1 導入

曲線におけるフルネフレームは, 1847 年に J.F.Frenet[F] に, また 1851 年に J.A.Serret[S] によってそれぞれ独立に導入された．フルネフレームは空間曲線の研究において重要な役割を果たし, 古典的な道具でもある．I を開区間, $\mathbb{E}^3$ を 3 次元ユークリッド空間とし, γ を弧長パラメータ表示された C^∞ 級正則曲線 $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$ とする．以降曲線は滑らかな曲線を考えるものとする．$T = \frac{d\gamma}{ds} : I \to \mathbb{E}^3$ を γ の接ベクトル場, N を γ の主法線ベクトル場, B を γ の従法線ベクトル場としたとき, $\{T, N, B\}$ がフレームであるとは, 曲線の各点で, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ が $\mathbb{E}^3$ の正規直交基底をなすときにいう．また, フレーム $\{T, N, B\}$ がフルネフレームであるとは, フレームの微分とフレームの 1 次結合が次のような形で書き表される時にいう.

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

ここで $\kappa > 0$ であり, κ, τ をそれぞれ曲率, 捩率という．また, 行列の部分を係数行列と呼ぶことにする．次の定理は, 曲線が曲率と捩率により決まるという事を述べている.

定理 1 空間内の 2 曲線 γ と $\tilde{\gamma}$ の曲率, 捩率をそれぞれ $\kappa(s), \tau(s), \tilde{\kappa}(s), \tilde{\tau}(s)$ とすると, $\kappa = \tilde{\kappa}$ かつ $\tau = \tilde{\tau}$ になるための必要十分条件は, 回転と平行移動を使って, $\gamma(s)$ と $\tilde{\gamma}(s)$ を重ねることができることである.

しかし一般にフルネフレームを許容しない曲線が存在する．次の例はフルネフレームを許容しない例である.

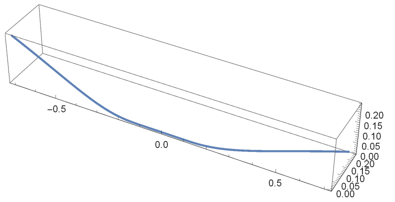

図 1: $\gamma(t)=\begin{cases}\left(t,e^{-\frac{1}{t}},0\right) & t>0\\ (0,0,0) & t=0\\ \left(t,0,e^{\frac{1}{t}}\right) & t<0.\end{cases}$

この例は $t=0$ において, 主法線ベクトル場が定義できない.
一方, R.L.Bishop によって導入されたビショップフレームは C^2 級正則曲線ならばいつでも許容される.
このビショップフレームは次の条件を持つ法ベクトル場を用いて定義される. M を曲線 γ に沿った法ベクトル場とする. 法ベクトル場 M に対して, $M'=fT$ を満たすような $f\in C^{\infty}(I)$ が存在する時, M は relatively parallel であるという. これらを用いて, ビショップフレームは次のように定義される.

定義 1 $\gamma(s)$ を正則曲線とし, T を曲線に沿った接ベクトル場, M_1, M_2 を *relatively parallel* な法ベクトル場としたとき, フレーム $\{T, M_1, M_2\}$ をビショップフレームという.

また, ビショップフレームの微分とフレームの 1 次結合は次のような形で書き表される.

$$\begin{pmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$$

Bishop はこのビショップフレームを導入する際に, 係数行列について次のような考察を行った.

$$\underset{(1)}{\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}}, \qquad \underset{(2)}{\begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \qquad \underset{(3)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{pmatrix}}$$

(1) はフルネフレームの係数行列であり, (2) はビショップフレームの係数行列である. (3) に関しては, 2 つの法ベクトル場の入れ替えによって, (1) の形になるので, 3 次元においては, 本質的にはフルネフレームとビショップフレームの 2 種類になる. 我々はこの考察を 4 次元に拡張し, 一般化されたビショップフレームというものを定義した.

2 一般化されたビショップフレームについて

4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^4$ において Bishop の考察を拡張すると, 次のようにフレームが定義できる.

定義 2 $\mathbb{E}^4$ において曲線のフレームの微分とフレームの 1 次結合の関係を表す際に出てくる係数行列 (a_{ij}) が上三角行列において多くとも 3 つの 0 でない成分を持つとき, そのフレームを一般化されたビショップフレームという.

$$\begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ & 0 & \blacksquare & 0 \\ & & 0 & \blacksquare \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

また次の条件の係数行列を非退化なフレームとして定義した.

定義 3 一般化されたビショップフレームにおいて, どの行も 0 行列でないような係数行列をもつフレームを非退化なフレームという.

この定義によって, 16 通りの係数行列の形が考えられたが, これらは, 法ベクトル場の入れ替えによって次 4 つのうちのいずれかの形になる.

$$X_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & 0 \\ -f_1 & 0 & f_2 & 0 \\ 0 & -f_2 & 0 & f_3 \\ 0 & 0 & -f_3 & 0 \end{pmatrix},$$

F 型

$$X_{\mathbb{D}} = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & 0 & 0 \\ -d_1 & 0 & d_2 & d_3 \\ 0 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & -d_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D 型

$$X_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ -c_1 & 0 & 0 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

C 型

$$X_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B 型

これらの係数行列を持つフレームを我々は, F 型, D 型, C 型, B 型のフレームと名付けた. B 型のフレームは 4 次元ユークリッド空間におけるビショップフレームそのものである. また, フルネフレームは F 型のフレームにおいて, 係数行列の f_1, f_2 がともに正であるものをいう. これらの定義をもとに正則曲線があるフレームを許容する時, 他のフレームを許容するか調べることより, フレーム間の階層性を調べた.

3 主結果

D 型のフレームの特徴づけとして, 次のような事が分かっている.

命題 1 [*NN*] $\mathbb{E}^4$ において γ を正則曲線とする. 次の事は, 同値である.

1. γ が D 型のフレームを許容する.
2. $T' = d_1\mathbb{D}_1$ となる滑らかな単位法ベクトル場 $\mathbb{D}_1$ と滑らかな関数 d_1 が存在する.

また, フルネフレームと F 型のフレームの関係は次のようになる.

命題 2 [*NN*] $\mathbb{E}^4$ において, 正則曲線 γ がフルネフレーム $\{T, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3\}$ を許容するとする. この時, γ の F 型の全てのフレーム $\{T, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$ は, 符号の差を除いてフルネフレームと一致する. また, フレーム $\{T, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$ の係数行列の全ての成分は, 符号の差を除いて, フルネフレームの係数行列の対応する成分に等しい.

これらを用いて, あるフレームを許容しない曲線の例が構成される. また, 曲線があるフレームを許容する時, 別のフレームを許容するかいう事を次の補題を用いて調べた.

補題 1 [*NN*] $\gamma : I \to \mathbb{E}^4$ を正則曲線とする. $\mathbb{Z}_0$ を γ 上のフレームで $\mathbb{Z}_0' = X_0\mathbb{Z}_0$ を満たすものとし, $X_1 : I \to \mathfrak{o}(4)$ を関数とする. γ 上のフレーム $\mathbb{Z}_1$ で次の条件を満たすものを考える.

$$\mathbb{Z}_1' = X_1\mathbb{Z}_1. \tag{1}$$

このとき, $\hat{G} = \mathbb{Z}_1\mathbb{Z}_0^{-1}$ によって与えられる $\mathbb{Z}_0$ から $\mathbb{Z}_1$ への変換 $\hat{G} : I \to O(4)$ は微分方程式

$$\hat{G}' = X_1\hat{G} - \hat{G}X_0. \tag{2}$$

を満たす. 逆に, $\hat{G} : I \to O(4)$ が微分方程式 (2) を満たすならば, $\mathbb{Z}_1 = \hat{G}\mathbb{Z}_0$ によって与えられる $\mathbb{Z}_1$ は微分方程式 (1) を満たす.

フレーム間の階層性について次のような事が分かった.

定理 2 [*NN*] γ を $\mathbb{E}^4$ における正則曲線とする. この時, 次の事が成り立つ.

1. γ が F 型のフレームを許容するならば, γ は D 型のフレームを許容する.
2. γ が D 型のフレームを許容するならば, γ は C 型のフレームを許容する.

ここで, 全ての C^2 級正則曲線は, B 型のフレームを許容する事に注意する.
また次の主張は, フレーム間の階層性が自明でないという事を述べている.

定理 3 [*NN*]

1. D 型のフレームを許容するが F 型のフレームを許容しない正則曲線が存在する.
2. C 型のフレームを許容するが D 型のフレームを許容しない正則曲線が存在する.
3. C 型のフレームを許容しない正則曲線が存在する.

これらの結果より, 我々の定義において正則曲線がフレームを持つ条件として B 型のフレームを持つ条件が最も緩く, F 型のフレームを持つ条件が最も厳しい条件と思うことができる.
次に曲線のクラスとして次のようなものを考える.

定義 4 曲線が 2-*regular* であるとは, 曲線の各点で接ベクトルと加速度ベクトルがどこも消えていないような曲線をいう.

次の結果は, 定理 2 の系である.

系 1 [*NN*] $\mathbb{E}^4$ において 2-*regular* な曲線 γ が F 型のフレームを許容するならば, B 型, C 型, D 型の全ての型のフレームを許容する. 特に,γ がフルネフレームを許容するならば, 全ての型のフレームを許容する.

また次の結果より 2-*regular* な曲線ならば全ての型のフレームを持つというわけではない.

定理 4 [*NN*] $\mathbb{E}^4$ において, F 型のフレームを許容しない 2-*regular* な曲線が存在する.

これらの結果より, 曲線があるフレームを許容するという事は, 曲線の新たな分類方法と考えることができる.

4　今後の研究の方向性

まず初めに研究の方向性として考えられるのは, この理論の 5 次元への拡張が考えうる．5 次元の場合, 非退化なフレームの係数行列は, 法ベクトル場の入れ替えの差を除いて全部で 11 種類になる．ある係数行列を持つフレームで, どの成分も恒等的には 0 でないようなものから, 他のある係数行列を持つフレームへの変換が存在しない事が 4 次元の時と同様の手法でわかる．これは, 4 次元の時には, 見られなかった現象である．また, 他分野への応用を考えることも意義があると思う．我々の研究とは独立に, 石川剛郎先生 [I] のフロンタルの研究において, D 型の係数行列の形が現れた．応用面を探すことによって理論としてさらに発展していくと思う．また, 4 次元において全てのフレームの型を許容する特別な曲線を探すという方向性も考えられる．3 次元ユークリッド空間において特殊な条件の曲線を用いて, 野水克己先生 [N] が曲率 0 を許す形でフルネフレームの構成方法を示した．この方法を 4 次元に拡張できれば, 我々が示した定理などから解析的な曲線が全ての型のフレームを許容する曲線と考えられる．

参考文献

[B] R. L. Bishop, There is more than one way to frame a curve, *Amer. Math. Monthly*, **82**(3) (1975), 246–251.

[F] J. F. Frenet, Sur les courbes à double courbure. *J. Math. Pures Appl. (1)* **17** (1852), 437–447.

[I] G. Ishikawa, Normal and tangent maps to frontals. *J. Math. Sci. (N.Y.)* **255** (2021), no. 5, Problems in mathematical analysis. No. 109, 664–677.

[K] S. Kobayashi, 曲線と曲面の微分幾何学 1995 裳華房

[N] K. Nomizu, On Frenet equations for curves of class C^∞, *Tohoku Math. J. (2)* **11** (1959), no. 1, 106–112.

[NN] S. Nomoto, H. Nozawa, Generalized Bishop frames of regular curves in $\mathbb{E}^4$, to appear in *Hokkaido Math. J.*

[S] J. A. Serret, Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. *J. Math. Pures Appl.* **16** (1851), 193–207.