公約数ニムのグランディ数

筑波大学大学院 理工情報生命学術院 数理物質科学研究群 数学学位プログラム
野萩遼太郎 (Ryotaro Nohagi)

概要

有限型不偏ゲーム (以下, ゲームと略記する) では, 各局面において, 先手もしくは後手の一方のみに必勝戦略があることが保証されている. (与えられた) ゲームの局面全体の集合 $\mathcal{P}$ から, 0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ への関数である, Sprague-Grundy 関数の値 (Sprague-Grundy 数, グランディ数) を求める事によって, 局面の必勝判定が可能になる. しかし, グランディ数は終了局面から再帰的に定まる値であるため, 原理的に計算するだけなら計算量爆発を起こしてしまう. 今回の研究では, m 山公約数ニムというゲームを導入し, そのグランディ数を決定した.

1　有限型不偏ゲーム

この節では, 有限型不偏ゲームの基礎的な理論を紹介する. 詳細については, [1], [2] などを参照して頂きたい.

定義 1.1 ([1, 第 2 章 2.2 節])**.** 有限型不偏ゲームとは, 2 人のプレイヤーが交互に手を打つゲームであり, 以下を満たすもののことである.
条件 1 (確定性). 偶然的要素を含まない.
条件 2 (完全情報性). 両プレイヤーにとって隠された情報がない.
条件 3 (対称性). 同一局面では各プレイヤーが打てる手に差がない.
条件 4 (有限性). 有限回の手順で必ず勝敗が決まる.

断らない限り, 本論文でのゲームとは, 有限型不偏ゲームのことを指す. ゲームの局面全体の集合を $\mathcal{P}$ で表す. $P \in \mathcal{P}$ の後続局面（P から一手で移動可能な局面）全体を $N(P)$ で表す. $P \in \mathcal{P}$ が与えられたとき, P における先手とは, P に着手するプレイヤーのことをいい, 後手とは先手ではないプレイヤーのことをいう. それ以上着手できない局面, つまりゲームの勝敗がつく局面のことを終了局面とよぶ. $\mathcal{E}$ を終了局面全体の集合とする. 局面 $P \in \mathcal{P}$ に対して, P から始まり, 終了局面に辿り着くまでの指し手の最大回数を局面 P の長さといい, $l(P)$ と表す. ゲームの有限性とは, 任意の局面 $P \in \mathcal{P}$ に対して, $l(P)$ が有限に定まることである.

有限型不偏ゲームの代表例に, m 山ニムがある.

定義 1.2. m 山ニムは以下で定まる有限型不偏ゲームである.

(i)　局面全体の集合 $\mathcal{P}$ は $\mathbb{N}^m$ である.

(ii) $P=(n_1,\dots,n_m)\in\mathcal{P}$ に対して,

$$N(P):=\left\{(n'_1,\dots,n'_m)\in\mathbb{N}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } 1\le i\le m \text{ が唯一つ存在して} \\ n'_j=n_j\,(1\le j\le m,\, j\ne i), \\ 0<n_i-n'_i\le n_i \end{array}\right\}.$$

このとき, 終了局面は $\mathbf{0}=(0,\dots,0)$ のみである.

例 1.3. 2 山ニムについて, $P:=(2,1)\in\mathcal{P}$ をとると, $N(P)=\{(1,1),(0,1),(2,0)\}$ である.

補題 1.4 ([1, 第 2 章 2.3 節])**.** 局面 $P\in\mathcal{P}$ に対して, 何度か着手することで再度局面 P に辿り着くことはない. また Q が P の後続局面であるとき, $l(P)>l(Q)$ である.

証明. 前者はゲームの有限性からいえる. 後者も有限性と $l(P)$ の定義からいえる. □

定理 1.5 ([1, 定理 2.3])**.** ゲームの各局面 $P\in\mathcal{P}$ は先手必勝か, 後手必勝のいずれかである. ここで, 先手 (後手) 必勝局面とは, 先手 (後手) にのみ必勝戦略がある局面のことである.

ゲームの局面全体の集合 $\mathcal{P}$ から, 0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ への関数である, Sprague-Grundy 関数の値 (Sprague-Grundy 数, グランディ数) を求める事によって, 局面の必勝判定が可能になる.

定義 1.6 ([1, 第 3 章 3.1 節])**.** $\mathbb{N}$ を 0 以上の整数全体の集合とする. $\mathbb{N}$ の真部分集合 T に対して, $\operatorname{mex} T:=\min(\mathbb{N}-T)$ を T の最小除外数という.

例 1.7. $\operatorname{mex}\{0,1,2,3,4,6,8\}=5,\ \operatorname{mex}\{1,2,3,\dots,512460,512461\}=0.$

定義 1.8 ([1, 第 3 章 3.1 節])**.** ゲーム $\mathcal{G}$ に対して, $P\in\mathcal{P}$ のグランディ数 $\mathrm{sg}(P)=\mathrm{sg}_{\mathcal{G}}(P)$ を, $l(P)$ に関して帰納的に, $\mathrm{sg}_{\mathcal{G}}(P):=\operatorname{mex}\{\mathrm{sg}_{\mathcal{G}}(P')\mid P'\in N(P)\}$ で定める. また, 関数 $\mathrm{sg}_{\mathcal{G}}:\mathcal{P}\to\mathbb{N}$ を Sprague-Grundy 関数という.

例 1.9. 2 山ニムを例に考える. $(1,1)\in\mathcal{P}$ をとると, $N(1,1)=\{(1,0),(0,1)\}$ であり, $N(1,0)=N(0,1)=\{(0,0)\}$ となり, $N(0,0)=\emptyset$ である. Sprague-Grundy 数は終了局面から帰納的に各局面に対し定まる値であるので, 終了局面から考える. $N(0,0)=\emptyset$ より, $\mathrm{sg}(0,0)=0$ である. よって, $(1,0),(0,1)$ ともに $\mathrm{sg}(1,0)=\mathrm{sg}(0,1)=\operatorname{mex}\{\mathrm{sg}(0,0)\}=1$ である. 最後に $\mathrm{sg}(1,1)=\operatorname{mex}\{\mathrm{sg}(1,0),\mathrm{sg}(0,1)\}=0.$

定理 1.10 (必勝判定の基本原理 [1, 補題 2.4])**.** 局面全体の集合 $\mathcal{P}$ の部分集合 $\mathcal{B},\mathcal{W}$ が $\mathcal{P}=\mathcal{B}\sqcup\mathcal{W}$ かつ以下をみたすとする.

(i) $\mathcal{W}\supset\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ は終了局面全体の集合).
(ii) $P\in\mathcal{B}$ ならば $N(P)\cap\mathcal{W}\ne\emptyset$.
(iii) $P\in\mathcal{W}$ ならば $N(P)\cap\mathcal{W}=\emptyset$ (すなわち, $N(P)\subset\mathcal{B}$).

このとき, $\mathcal{W}$ は後手必勝局面全体の集合で, $\mathcal{B}$ は先手必勝局面全体の集合である.

先手必勝局面に着手し, 後手必勝局面へ遷移させ続けることでゲームに勝つことができる. そのためにも, 以下の定理は重要である.

定理 1.11 ([1, 定理 3.1])**.** 局面全体の集合 $\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{B} := \{P \in \mathcal{P} \mid \mathrm{sg}(P) > 0\},$$

$$\mathcal{W} := \{P \in \mathcal{P} \mid \mathrm{sg}(P) = 0\}$$

の 2 つに分けると $\mathcal{B}$ は先手必勝局面全体の集合であり, $\mathcal{W}$ は後手必勝局面全体の集合である.

証明. $\mathcal{B}$ と $\mathcal{W}$ が定理 1.10 の条件を満たしていることを確認する. 終了局面 $E \in \mathcal{E}$ は後続局面が存在しないので, $\mathrm{sg}(E) = 0$. よって, $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{E}$. $\mathrm{sg}(P) > 0$ とすると, グランディ数の定義より, ある $P' \in N(P)$ が存在して $\mathrm{sg}(P') = 0$ となる. よって $N(P) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. 他方 $\mathrm{sg}(P) = 0$ とすれば, グランディ数の定義から, 任意の後続局面は $\mathrm{sg}(P') \neq 0$ をみたすので $N(P) \cap \mathcal{W} = \emptyset$ となる. □

したがって定理 1.11 から, グランディ数を決定することができれば, 局面が後手必勝局面であるか否かを判定できる. さらに, グランディ数を求めることによって, 入江 [6] や安福-多田 [3] の研究のように, 表現論などの他分野との繋がりが生まれることもある. また, 通常のニムのように, 他の成分とは独立に, ある 1 つの成分だけを変化させるのであれば,「ゲームの和のグランディ数についての定理 (定理 1.17)」を用いることで, 一般の $m \geq 1$ の場合の Sprague-Grundy 数の計算を, $m = 1$ の場合の Sprague-Grundy 数の計算に帰着させることができ, 簡単である.「ゲームの和のグランディ数についての定理」を紹介するために必要な概念を整理する.

定義 1.12 (ゲームの同型)**.** 各 $i \in \{1, 2\}$ に対して, ゲーム $\mathcal{G}_i$ の局面全体の集合を $\mathcal{P}_i$ としたとき, $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ が同型なゲームであるとは, ある全単射 $\psi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ が存在して, 任意の $P \in \mathcal{P}_1$ に対して, $\psi(N(P)) = N(\psi(P))$ が成り立つことと定める. また, $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ が同型なゲームであるとき, $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$ と表す.

定義 1.13 (ゲームの和 [1, 第 3 章 3.3 節])**.** $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ をゲームとし, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ をそれぞれの局面全体の集合, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ をそれぞれの終了局面全体の集合とする. このとき, ゲーム $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ を以下で定める.

- 局面全体の集合は直積集合 $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ とする.
- $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}$ に対して,

$$N(P_1, P_2) = \{(P_1', P_2) \mid P_1' \in N(P_1)\} \cup \{(P_1, P_2') \mid P_2' \in N(P_2)\}$$

  と定める. このとき, 終了局面全体の集合は $\mathcal{E} := \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ となる.

注意 1.14 ([1, 第 3 章 3.3 節])**.** 各 $i = 1, 2, 3$ に対して, ゲーム $\mathcal{G}_i$ の局面全体の集合を $\mathcal{P}_i$, 終了局面全体の集合を $\mathcal{E}_i$ とする. このとき, $(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) + \mathcal{G}_3 \cong \mathcal{G}_1 + (\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3)$ が成立する. 実際, 各 $i = 1, 2, 3$ に対して, $P_i \in \mathcal{P}_i$ とすると, 局面全体の集合について $(\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \times \mathcal{P}_3$ と $\mathcal{P}_1 \times (\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_3)$ は, $(P_1 \times P_2) \times P_3 \mapsto P_1 \times (P_2 \times P_3)$ によって自然に同一視される. あとは, $N((P_1, P_2), P_3) = N(P_1, (P_2, P_3))$ が成り立つことを見ればよい. $P := (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$,

$Q := (P_2, P_3) \in \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_3$ とおくと

$$\begin{aligned}
N(P, P_3) &= \{(P', P_3) \mid P' \in N(P)\} \cup \{(P, P_3') \mid P_3' \in N(P_3)\} \\
&= \{((P_1', P_2), P_3) \mid P_1' \in N(P_1)\} \cup \{((P_1, P_2'), P_3) \mid P_2' \in N(P_2)\} \\
&\quad \cup \{(P, P_3') \mid P_3' \in N(P_3)\} \\
&= \{(P_1', Q) \mid P_1' \in N(P_1)\} \cup \{(P_1, Q') \mid Q' \in N(Q)\} \\
&= N(P_1, Q)
\end{aligned}$$

が成立するので, $(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) + \mathcal{G}_3 \cong \mathcal{G}_1 + (\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3)$ がわかった.

定義 1.15 ([1, 第 1 章 1.4 節])**.** $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $m \oplus n$ を m と n の繰り上がりなし 2 進和と定める. つまり, $m \oplus n$ とは, m と n の各々を 2 進数表記して, 各桁の排他的論理和をとる演算である.

例 1.16. $4 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$, $5 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$ と表せるため,

$$4 \oplus 5 = (0 \oplus 1)2^0 + (0 \oplus 0)2^1 + (1 \oplus 1)2^2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 1$$

定理 1.17 (ゲームの和のグランディ数 [1, 定理 3.4])**.** 各 $i \in \{1, 2\}$ に対して, ゲーム $\mathcal{G}_i$ の局面全体の集合を $\mathcal{P}_i$ とする. このとき, $P_1 \in \mathcal{P}_1, P_2 \in \mathcal{P}_2$ について,

$$\mathrm{sg}_{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}(P_1, P_2) = \mathrm{sg}_{\mathcal{G}_1}(P_1) \oplus \mathrm{sg}_{\mathcal{G}_2}(P_2)$$

が成り立つ.

系 1.18. 注意 1.14 と定理 1.17 より, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して, ゲーム $\mathcal{G}_i$ の局面全体の集合を $\mathcal{P}_i$ とする. このとき, 各 $P_i \in \mathcal{P}_i$ について,

$$\mathrm{sg}_{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \cdots + \mathcal{G}_m}(P_1, P_2, \ldots, P_m) = \mathrm{sg}_{\mathcal{G}_1}(P_1) \oplus \mathrm{sg}_{\mathcal{G}_2}(P_2) \oplus \ldots \mathrm{sg}_{\mathcal{G}_m}(P_m)$$

が成り立つ.

2 公約数ニムについて

定義 2.1. m 山公約数ニムは以下で定まる有限型不偏ゲームである:

(i) 局面全体の集合 $\mathcal{P}$ は $\mathbb{N}^m$ である.

(ii) $P = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathcal{P}$ に対して,

$$N(P) := \left\{ (n_1', \ldots, n_m') \in \mathbb{N}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } 1 \leq i \leq m \text{ が唯一つ存在して} \\ n_j' = n_j \, (1 \leq j \leq m,\, j \neq i), \\ n_i - n_i' \text{ は } n_1, \ldots, n_m \text{ の正の公約数} \end{array} \right\}.$$

但し, 0 の約数は全ての正の整数とする. このとき, 終了局面は $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ のみである.

この節では, 断らない限り, m 山公約数ニムを考える.

例 2.2 ($m=3$ の場合)**.** $P := (6,3,2) \in \mathcal{P} = \mathbb{N}^3$ である．このとき, $6,3,2$ の公約数は 1 のみであるから, $N(P) = \{(5,3,1),(6,2,2),(6,3,1)\}$ である．$P' := (6,2,2)$ については, $6,2,2$ の公約数は $1,2$ であるから, $N(P') = \{(5,2,2),(6,1,2),(6,2,1),(4,2,2),(6,0,2),(6,2,0)\}$ である．

このように m 山公約数ニムは通常のニムの変形である．着手前と着手後で変化する（減少する）成分が 1 つだけという点は通常のニムと同じであるが，グランディ数の視点から見た場合に，本質的な大きな違いの 1 つは，その変化が他の成分の影響を受けている点である．すなわち, 公約数ニムの場合には,「ゲームの和のグランディ数についての定理」を用いることはできず，そのグランディ数の計算は一般には困難である．実際,（少し状況は違うが）有名な例として，$m=2$ の場合のニムに,「両方の成分から一度に同じ正の整数を引くことができる」というルールを付け加えたチャヌシッチ（Wythoff のゲームともいう； [8],[1, 第 9 章],[2, 第 6 章] などを参照）については，必勝判定はできるが，Sprague-Grundy 数は決定されていない．記号をいくつか導入し, 主定理を述べる．

定義 2.3. $a \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\mathrm{ord}_2(a) := \begin{cases} \max\{L \in \mathbb{N} \mid 2^L \text{ が } a \text{ の約数 }\} & (a \neq 0 \text{ のとき}), \\ +\infty & (a = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．但し, 上記の $+\infty$ とは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n < +\infty$ を満たすものとする．

局面 $P = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathcal{P} = \mathbb{N}^m$ に対して,

$$\lambda(P) := \min\bigl\{\mathrm{ord}_2(n_i) \mid 1 \leq i \leq m\bigr\}, \tag{1}$$

$$\iota(P) := \#\bigl\{1 \leq i \leq m \mid \mathrm{ord}_2(n_i) = \lambda(P)\bigr\} \tag{2}$$

とおく．次の定理が本論文の主結果である．

定理 2.4. $P = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathcal{P}$ に対して,

$$\mathrm{sg}(P) = \begin{cases} \lambda(P) + 1 & (P \neq \mathbf{0} \text{ かつ } \iota(P) \text{ が奇数のとき}), \\ 0 & (P \neq \mathbf{0} \text{ かつ } \iota(P) \text{ が偶数のとき}), \\ 0 & (P = \mathbf{0} \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．

例 2.5 ($m=2$ の場合)**.** $P := (1,2) \in \mathcal{P} = \mathbb{N}^2$ とする．まずグランディ数を定義通り計算すると，$N(P) = \{(0,2),(1,1)\}$ である．$N(0,2) = \{(0,1),(0,0)\}$，$N(0,1) = \{(0,0)\}$ であるから，$\mathrm{sg}(0,1) = \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(0,0) = 0\} = 1$ が得られる．よって，$\mathrm{sg}(0,2) = \mathrm{mex}\{0,1\} = 2$ となる．$N(1,1) = \{(0,1),(1,0)\}$ であり, $\mathrm{sg}(1,0) = \mathrm{sg}(0,1) = 1$ となるから, $\mathrm{sg}(1,1) = \mathrm{mex}\{1\} = 0$ が得られる．よって, $\mathrm{sg}(P) = \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(0,2), \mathrm{sg}(1,1)\} = \{2,0\} = 1$ がわかった．一方, $\mathrm{ord}_2(1) < \mathrm{ord}_2(2)$ だから, $\lambda(P) = \mathrm{ord}_2(1) = 0$．よって，$\iota(P) = 1 \in 2\mathbb{Z}+1$．定理 2.4 から, $\mathrm{sg}(P) = 0 + 1 = 1$ となり, 定義通り計算した場合とも一致した．

参考文献

[1] 佐藤文広, 石取りゲームの数学 ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房, 2014.

[2] 一松信, 石取りゲームの数理, 森北出版株式会社, 2003.

[3] T.Abuku and M.Tada, *Multiple hook removing game whose starting position is a rectangular young diagram with the unimodal numbering,* arXiv:2112.12963.

[4] C.L.Bouton, *Nim, a game with a complete mathematical theory*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 3, No. 1/4, pp.35-39, 1901-1902.

[5] P.Grundy, *Mathematics and games*, Eureka 2, pp6–8, 1939.

[6] Y.Irie, *A base-p Sprague-Grundy type theorem for p-calm subtraction games: Welter's game and representations of generalized symmetric groups,* Integers 21B (To the Three Forefathers of Combinatorial Game Theory: The John Conway, Richard Guy, and Elwyn Berlekamp Memorial Volume), A15, pp.1–27, 2021.

[7] R.Sprague, *Über mathematische Kampfspiele*, Tohoku Mathematical Journal 41, pp.438-444, 1935-1936.

[8] W.A.Wythoff, *A modification of the game of Nim*, Nieuw Arch. Wiskd.7, pp.199–202, 1907.