Morrey 空間と Strichartz 評価について

中央大学 理工学部 数学科
野ヶ山徹 (Toru NOGAYAMA)*

概要

Morrey 空間は L^p 空間の 1 つの拡張であり，元々は 2 階楕円型偏微分方程式の解の正則性を研究するために用いられた関数空間である．一方，Schrödinger 方程式の解の解析において重要な評価の 1 つに Strichartz 評価がある．この評価は Morrey 空間をわずかに拡張した関数空間を用いると改良できることが示されている．本講演では，この関数空間の性質と Strichartz 評価との関連について紹介する．

1 導入

Morrey 空間は，1938 年に C.B.Morrey [8] によって 2 階楕円型偏微分方程式の解の局所的な振る舞いを解析するためにその原型となるノルムが導入され，1969 年の Peetre による survey [10] にて現在の形に定式化された．その後，この空間自身の研究のみならず，関数空間として拡張されたり偏微分方程式へ応用されるなど，多くの研究がなされている．Morrey 空間については [11] の本に非常に多くの結果がまとまっている．本講演では，その一般化の 1 つである「Bourgain–Morrey 空間」について紹介する．

ここで，1 つ記号を用意しておく．$\nu \in \mathbb{Z}$，$m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ とする．立方体 $Q_{\nu m}$ が

$$Q_{\nu m} \equiv \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{m_j}{2^\nu}, \frac{m_j+1}{2^\nu}\right)$$

と書けているとき，$Q_{\nu m}$ を 2 進立方体という．2 進立方体全体の集合を $\mathcal{D}$ で表し，体積が 2^{-kn} であるような 2 進立方体全体の集合を $\mathcal{D}_k$ で表す．2 進立方体の重要な性質の 1 つとして，$Q, R \in \mathcal{D}$ としたとき，$Q \cap R$ は $\emptyset, Q, R$ のいずれかになることが挙げられる．

まず，Morrey 空間を定義する．パラメータ p, q は $0 < q \leq p < \infty$ を満たすものとする．関数 $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対し，Morrey (quasi-) ノルムを

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} := \sup_{Q \in \mathcal{D}} |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(y)|^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}$$

と定義する．このとき，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} < \infty$ となる関数 f 全体の集合とする．

---

* E-mail: toru.nogayama@gmail.com
本研究は JSPS 科研費 22J00614 の助成を受けたものである．本研究は波多野修也氏（中央大学），澤野嘉宏氏（中央大学），Denny Ivanal Hakim 氏（バンドン工科大学）との共同研究に基づく．

ここで，$q=p$ とすると，$\mathcal{M}^p_p(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$ となることに注意しておく．
Morrey 空間には以下のような性質がある．

(1) $1\le q\le p<\infty$ のとき，Banach 空間となる．
(2) $0<q_1<q_2\le p<\infty$ に対し

$$L^p(\mathbb{R}^n)=\mathcal{M}^p_p(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q_2}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q_1}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．
(3) $0<q<p<\infty$ に対し，$|x|^{-\frac{n}{p}}\in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)\setminus L^p(\mathbb{R}^n)$ である．
(4) Morrey 空間は反射的でない．つまり，$0<q<p<\infty$ に対し，

$$(\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n))^{**}\neq \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$$

である．
(5) $0<q<p<\infty$ に対し，$L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ や $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ で稠密でない．

これらのことから，Morrey 空間は Lebesgue 空間の拡張であるにも関わらず，Lebesgue 空間とはかなり違った関数空間であることが分かる．一方で，2 つのパラメータ p,q はそれぞれある種の可積分性を表している．埋め込みの関係と定義から p は大域的な，q は局所的な可積分性をそれぞれ表していることが分かる．

次に，Morrey 空間の 1 つの一般化である Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ を定義する．この一般化のために Morrey ノルムのどの部分に注目するかというと，2 進立方体全体について上限を取る点である．この上限を

$$\sup_{Q\in\mathcal{D}} \quad\Longrightarrow\quad \sup_{\nu\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^n}$$

と書き直してみる．すると，これは立方体の列 $\{Q_{\nu m}\}_{\nu\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^n}$ の ℓ^∞ ノルムを取っていると見なすこともできる．そこで，この部分を ℓ^r ノルムに一般化することを考える．

Definition 1.1. パラメータ p,q,r を $0<q\le p<\infty$，$0<r\le\infty$ を満たすものとする．このとき，関数 $f\in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対し，(quasi-) ノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}$ を

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}=\left\|\left\{|Q_{\nu m}|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_{Q_{\nu m}}|f(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{\nu\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^r}$$

と定義する．そして，$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}<\infty$ を満たす関数 f 全体の集合を $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ で表し，Bourgain–Morrey 空間と呼ぶ．

実はこの関数空間は 1990 年頃に Bourgain[2] により，その原型となるものが導入されている．このときは，Fourier 制限問題の考察のために用いられている．その後もこの関数空間が現れる研究はいくつかあり，その都度，少しずつ性質が明らかにされていった．しかし，関数空間自身に着目した研究はおそらくなく，制限問題や偏微分方程式，特に分散型方程式の解析へ応用するために用いられている．そこでこの関数空間自身の性質を調和解析，実解析的な側面から研究し，応用の更なる進展につなげようというのが，本研究に至った動機である．

結果について述べる前に，Bourgain–Morrey 空間が用いられている主な先行研究を紹介する．

(1) Stein–Thomas (Strichartz) 評価との関連

Bourgain [2] や Moyua, Vargas, Vega [9] らはこの関数空間を Stein–Thomas 評価の改良に用いている．特に，$\mathcal{M}^2_{p,4}$ $(p \geq 12/7)$ を用いているのだが，これは L^2 空間よりも広い関数空間である．[*1]（包含関係については 2.2 節を参照.）もう少し詳しく述べると，Moyua, Vargas, Vega は振動積分

$$\widehat{f\mathrm{d}\sigma}(\xi,\xi_3) = \int_{\{x\in\mathbb{R}^2:|x|\leq 1\}} e^{-2\pi i(x\cdot\xi+\Phi(x)\xi_3)} f(x)\mathrm{d}x, \quad (\xi,\xi_3)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}. \tag{1}$$

についての評価を考察している．ここで相関数 Φ には楕円型条件を課している．つまり，

$$\det\left(\mathrm{Hess}(\Phi)\right) > 1,$$

を満たす $\Phi \in C^\infty(\{x\in\mathbb{R}^2 : |x| < 2\})$ を扱っている．このとき，彼らは次の評価を得た：可測集合 $\Omega \subset \{x\in\mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ に対して，

$$\|\widehat{\chi_\Omega \mathrm{d}\sigma}\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\chi_\Omega\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}, \quad p \geq 4(\sqrt{2}-1) \tag{2}$$

が成り立つ．さらに，この p の条件が sharp であることも示している．(2) の評価はある可測集合の特性関数に対するものであるが，実は一般の関数に対してもこの評価を示すことできる([9, Theorem 4.2])．しかし，そのときは $p \geq 12/7$ という制限が付く．

(2) 分散型方程式との関連

さらに Moyua, Vargas, Vega は上で得た評価を応用して，次の分散型方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u = (-\Delta)^{\frac{a}{2}} u, & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \quad a>0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{3}$$

の解の初期値への a.e. 収束性についても考察している．特に，(3) の解は

$$e^{it(-\Delta)^{\frac{a}{2}}} u_0(x) = u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi - it|\xi|^a}\widehat{u_0}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

と書けるので，(1) の典型例になっていることが分かる．

Merle と Vega は [7] において，(2) の評価を少し改良して，$p \geq 12/7$ に対して

$$\|e^{it(-\Delta)}u_0\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)} \leq C_0 \min\{\|u_0\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}, \|\widehat{u_0}\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}\}$$

という評価を示した．この評価を使うと，2 次元の非線形 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u = i(\Delta u \pm |u|^2 u), & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

に対して，初期値 u_0 が

$$\min\{\|u_0\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}, \|\widehat{u_0}\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}\} \leq \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

を満たすような時間大域解 $u \in L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$ を構成することができる．さらに，大きい L^4 ノルムを持つ自由解の列に対するコンパクト性についても考察している．

[*1] 彼らは $\mathcal{M}^2_{p,4}$ の代わりに X_p という記号を使用している．

Bégout と Vargas は [1] において，次の非線形 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \gamma |u|^{\frac{4}{n}} u = 0, & (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4}$$

を考察した．ここで，$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は与えられたパラメータである．彼らは (4) の解の集中現象を解析するために，$\mathcal{M}^2_{p,\frac{2(n+2)}{n}}$ を用いて Strichartz 評価の改良を高次元へと拡張した．さらにこの評価を応用し，方程式 (4) の小さな初期値に対する時間大域解を構成した．

(3) 散乱理論との関連

Masaki は [4] において次の Schrödinger 方程式を扱っている：

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = -|u|^{2\alpha} u, & (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n, \\ u(t_0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5}$$

ここで，$I \subset \mathbb{R}$ は区間であり，$t_0 \in I$ とし，$u(t,x) : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が未知関数である．この論文では mass-subcritical の場合にあたる $\alpha < 2/d$ のときに (5) の解の時間大域的な振る舞いに付随した 2 つの最小化問題を導入した．一般論として，偏微分方程式を研究する際には Sobolev 空間 H^s や重み付き L^2 空間などの関数空間は非常に扱いやすい．しかし，この最小化問題を考えるときには，上述のような L^2 空間をベースにした関数空間では問題を上手く解析できないことが分かっている．そこでその代替として，局所的に L^2 の性質を持ちながらも，大域的には可積分性をずらすことができる Bourgain–Morrey 空間を利用している．他にも，Masaki と Segata（[5, 6]）により，Bourgain–Morrey 空間は KdV 方程式や Airy 方程式などの各偏微分方程式に対応する Strichartz 評価の改良にも用いられている．

2 Bourgain–Morrey 空間の性質

2.1 基本的な性質と例

まず，Bourgain–Morrey 空間同士の埋め込みについて考察する．$r_1 \le r_2$ のとき，数列空間の埋め込み $\ell^{r_1} \subseteq \ell^{r_2}$ が成り立つことに注意すると，次の埋め込みが成り立つ．

Lemma 2.1. $0 < q \le p < r_1 \le r_2 \le \infty$ とすると，$\mathcal{M}^p_{q,r_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q,r_2}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

また，Morrey 空間と同様に，パラメータ q についても埋め込みが成り立つ．

Lemma 2.2. $0 < q_2 \le q_1 \le p < r \le \infty$ とすると，$\mathcal{M}^p_{q_1,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q_2,r}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

Lemma 2.1 と Lemma 2.2 から，次のような関係になっていることが分かる（ここでは $\mathbb{R}^n$ を省略する）：

$$\begin{array}{ccccccccc} L^p & = & \mathcal{M}^p_p & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_1} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_2} & \hookrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathcal{M}^p_{p,r_2} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_1,r_2} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_2,r_2} & \hookrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathcal{M}^p_{p,r_1} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_1,r_1} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_2,r_1} & \hookrightarrow & \cdots \end{array}$$

この図から，Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ は Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ の部分集合となることは分かるのだが，どのくらい違いがあるのだろうか.

Example 2.3. $0 < q < p < r < \infty$ とする．このとき，$f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \notin \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ である.

冒頭で述べたように, $|x|^{-\frac{n}{p}} \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ であったので, Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ と Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ の間の包含は真の包含であることがわかる.

一方で，上の表からは Lebesgue 空間と Bourgain–Morrey 空間との間の包含関係はほとんど分からない．中には，Lebesgue 空間の方が広いものもあるように見える．しかし，次の定理が示すように，そのような空間は自明な元しか持たないことがわかる.

Theorem 2.4. $0 < q \le p < \infty$，$0 < r \le \infty$ とする．このとき，$\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n) \neq \{0\}$ であるための必要十分条件は $0 < q < p < r < \infty$ となるか，$0 < q \le p < r = \infty$ となることである.

では，Lebesgue 空間との包含関係はどのようになっているのか．これは次の補間不等式を経由することで考察できる.

2.2 補間不等式

Bégout, Vargas [1] や Masaki, Segata [5] らによって，以下のような補間不等式が示されている.

Theorem 2.5 ([1, Theorem 1.3], [5, Proposition A.1])**.** $0 < q < p < r < \infty$ とし，$\theta = \dfrac{p}{r}$ とする．もし，パラメータ s が

$$\frac{1-\theta}{s} + \frac{\theta}{p} < \frac{1}{q}, \quad s \le p$$

を満たしているとすると，

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \le C\|f\|^{1-\theta}_{\mathcal{M}^p_s}\|f\|^{\theta}_{L^p} \tag{6}$$

が成り立つ．特に，$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

では，Lebesgue 空間と Bourgain–Morrey 空間の間の包含関係が分かったところで，そこにはどの程度違いがあるのだろうか．次の例から，その包含が真であることが分かる.

Example 2.6. $0 < q < p < r < \infty$, $ap < 1 < ar$ とする．このとき

$$g(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}(\log(|x|^{-1}))^{-a}\chi_{[0,1/2n]}(|x|) \in \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n) \setminus L^p(\mathbb{R}^n)$$

である.

3 Bourgain–Morrey 空間における積分作用素の有界性

新たに関数空間を定義した際に，いくつかの積分作用素の有界性を考察することは 1 つの重要な問題である．その中でも特に，Hardy–Littlewood の極大作用素の有界性はそのほかの作用素の有界性にも関わる重要な問題である．ここでは，Hardy–Littlewood の極大作用素について得られた結果を紹介する.

まず，Hardy–Littlewood の極大作用素とは，可測関数 f に対して，

$$Mf(x) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y$$

と定義される作用素 M のことである．ここで，$\mathcal{Q}$ は立方体全体の集合を表し，上限は立方体全体に関して取ることとする．

Bourgain–Morrey 空間における M の有界性は以下の通りである．

Theorem 3.1 ([3, Lemma 4.1])**.** $1 < q \le p < r \le \infty$ とする．このとき，*Hardy-Littlewood* の極大作用素 M は $\mathcal{M}^p_{q,r}$ 上で有界である．つまり，以下の不等式が成り立つ：ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \le C\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \quad (f \in \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)).$$

Remark 3.2. この結果を利用することで，分数べき積分作用素や特異積分作用素などの積分作用素の有界性，また，Fefferman–Stein のベクトル値不等式などの結果も得ることができるが，ここでは注意のみにして詳しい結果については省略する．

4 Morrey 空間との違い

この節では，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ と Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)(r < \infty)$ の違いを稠密性と双対性の観点から紹介する．

4.1 稠密性

冒頭に述べた性質 (5) から，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ において，$C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ や $L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ は稠密でないことが知られている．そのため，例えば特異積分作用素などの作用素を近似によって $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ 上に定義することができず，定義の仕方を工夫しなければならない．一方で，Bourgain–Morrey 空間では，これらの空間が稠密であることを示すことができる．

Proposition 4.1 ([3, Corollary 2.21])**.** $0 < q < p < r < \infty$ とすると，$L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ や $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ において稠密である．

4.2 反射性，回帰性

冒頭の性質 (4) から，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は反射的でないことが知られている．（例えば，[11, Section 9] を参照.）では，Bourgain–Morrey 空間ではどうなのだろうか．実はこれについてはパラメータを少し制限すれば，肯定的な結果が得られる．

Theorem 4.2 ([3, Theorem 5.5])**.** $1 < q < p < r < \infty$ であるとき $\mathcal{M}^p_{q,r}$ は反射的である．つまり，

$$(\mathcal{M}^p_{q,r})^{**} = \mathcal{M}^p_{q,r}$$

が成り立つ．

もちろん，Morrey 空間と Bourgain–Morrey 空間の違いは $r = \infty$ であるか $r < \infty$ であるかのみである．つまり，上限 sup が関係しているかどうかである．これは L^∞ が反射的ではないことと類似している．

Remark 4.3. Theorem 4.2 を証明するため，今回は $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ の双対空間を特定した．実は [4] において, Bourgain–Morrey 空間の前双対について考察がなされている．ここで, Banach 空間 B_1, B_2 に対して，$(B_1)^* = B_2$ となるとき，B_1 を B_2 の前双対という．つまり，[4] において考察された前双対が，今回特定した $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ の双対空間と一致するため，反射性が示せる．

参考文献

[1] P. Bégout and A. Vargas, *Mass concentration phenomena for the L^2-critical nonlinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 11, 5257–5282.

[2] J. Bourgain, *On the restriction and multiplier problems in* $\mathbb{R}^3$, Geometric aspects of functional analysis (1989–90), Lecture Notes in Math., vol. 1469, Springer, Berlin, 1991, 179–191.

[3] N. Hatano, T. Nogayama, Y. Sawano, D. I. Hakim, *Bourgain-Morrey spaces and their applications to boundedness of operators*, Journal of Functional Analysis, Vol.284,109720, 52pp, 2023.

[4] S. Masaki, *Two minimization problems on non-scattering solutions to mass-subcritical nonlinear Schrödinger equation*, Preprint arXiv:1605.09234

[5] S. Masaki and J. Segata, *Existence of a minimal non-scattering solution to the mass-subcritical generalized Korteweg–de Vries equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **35** (2018), no. 2, 283–326.

[6] S. Masaki and J. Segata, *Refinement of Strichartz estimates for Airy equation in nondiagonal case and its application*, SIAM J. Math. Anal. **50** (2018), no. 3, 2839–2866.

[7] F. Merle and L. Vega, *Compactness at blow-up time for L^2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in 2D*, Internat. Math. Res. Notices (1998), no. 8, 399–425.

[8] C. B. Morrey Jr., *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), no. 1, 126–166.

[9] A. Moyua, A. Vargas and L. Vega, *Restriction theorems and maximal operators related to oscillatory integrals in* $\mathbb{R}^n$, Duke Math. J. **96** (1999), no. 3, 547–574.

[10] J. Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.

[11] Y. Sawano, G. Di Fazio and D.I. Hakim, *Morrey spaces. Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's. Vol. I and II.* Monographs and Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall CRC Press, Boca Raton, FL, 2020.