ある多変数 q 超幾何級数に付随する接続問題

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
信川喬彦 (Takahiko NOBUKAWA)*

概要

一般 q 超幾何函数 ${}_{N+1}\varphi_N$ と q-Lauricella 超幾何函数 φ_D を同時拡張した多変数 q 超幾何函数が満たす q 差分方程式系の, 適当な領域における基本解を構成し, それらの間の接続行列を求める. この接続行列は, 1 変数の q 超幾何函数の接続公式を繰り返し用いるという手法により得られる.

1 導入：接続問題とは？

Gauss の超幾何函数とは, 次の級数で定義される函数である：

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n}t^n \quad (|t|<1). $$

ここで, $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ である. この函数は "特殊函数の親玉" であり, 数学, 物理学, 工学などさまざまな場面に登場する, とても重要な函数である. Gauss の超幾何函数は, 次の微分方程式 (Gauss の超幾何方程式) を満たす：

$$ t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)t)\frac{dy}{dt}-\alpha\beta y=0. \tag{1.1} $$

Gauss の超幾何方程式は Riemann 球面上の 3 点 $\{0,1,\infty\}$ に特異点をもつ方程式である. 方程式 (1.1) は 2 階の方程式なので, 解の全体は $\mathbb{C}$ 上 2 次元のベクトル空間をなす. その基底 $y_1(t)$, $y_2(t)$ に対し $\boldsymbol{y}(t)={}^{\mathrm{T}}(y_1(t),y_2(t))$ を基本解という. ここで, ${}^{\mathrm{T}}A$ は A の転置を意味する. 方程式 (1.1) の場合, 特異点 $t=0$, 1, ∞ の近傍でそれぞれ次のような基本解が構成できる：

$$ \begin{aligned} \boldsymbol{y}_0(t)&={}^{\mathrm{T}}\left({}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};t\right),t^{1-\gamma}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1\\ 2-\gamma\end{matrix};t\right)\right),\\ \boldsymbol{y}_1(t)&={}^{\mathrm{T}}\left({}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \alpha+\beta-\gamma+1\end{matrix};1-t\right),(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma-\alpha,\gamma-\beta\\ \gamma-\alpha-\beta+1\end{matrix};1-t\right)\right),\\ \boldsymbol{y}_\infty(t)&={}^{\mathrm{T}}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\alpha-\gamma+1\\ \alpha-\beta+1\end{matrix};\frac{1}{t}\right),\left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta-\gamma+1,\beta\\ \beta-\alpha+1\end{matrix};\frac{1}{t}\right)\right). \end{aligned} $$

$t=0$ の近傍での基本解 $\boldsymbol{y}_0$ を, 適当な path に沿って $t=1$ や $t=\infty$ の近傍へ解析接続する (ここでは, $t=\infty$ の近傍への場合を考える). このとき, $t=\infty$ の近傍では $\tilde{\boldsymbol{y}}_0$($\boldsymbol{y}_0$ を $t=\infty$ に解析接続した

* e-mail: tnobukw@math.kobe-u.ac.jp

もの) と $\boldsymbol{y}_\infty$ という 2 つの基本解が取れる．よって, 適当な $\mathbb{C}$ 値の行列 A を用いて $\tilde{\boldsymbol{y}_0} = A\boldsymbol{y}_\infty$ となる．この行列 A を接続行列といい, 接続行列を求める問題を接続問題という．今の場合, 接続行列は Γ 函数を用いて

$$A = \begin{pmatrix} e^{-i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{-i\pi\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \\ e^{i\pi(\gamma-\alpha-1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)} & e^{i\pi(\gamma-\beta+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \end{pmatrix}$$

とかける．超幾何函数については, 青本-喜多 [7], 原岡 [8], 吉田 [9] など日本語の本も数多くあるので, より詳しく知りたい方はこれらの本を参照されたい．

上記のことの q 差分類似を考える．$q \in \mathbb{C}$ を $0 < |q| < 1$ ととり固定する．Heine の q 超幾何函数は Gauss の超幾何函数の q 類似として導入された次の級数である：

$${}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(c;q)_n(q;q)_n} t^n \quad (|t| < 1).$$

ここで, $(a;q)_n = \dfrac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$, $(a;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$ である．$a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$ と置き $q \to 1$ とすれば, ${}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; t\right) \to {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; t\right)$ となる．Heine の q 超幾何函数は次の q 差分方程式 (Heine の q 超幾何方程式) を満たす：

$$\left[(1-T_t)(1-cq^{-1}T_t) - t(1-aT_t)(1-bT_t)\right] y = 0. \tag{1.2}$$

ここで T_t は t についての q シフト作用素である：$T_t y(t) = y(qt)$．Gauss の超幾何方程式 (1.1) の解の全体が $\mathbb{C}$ 上 2 次元のベクトル空間をなすように, Heine の q 超幾何方程式 (1.2) の解の全体も $K = \{C(t) \mid T_t C(t) = C(t)\}$ 上 2 次元のベクトル空間をなす．K の元を擬定数といい, K を擬定数体という．q 差分方程式の場合, $t = 0$ や $t = \infty$ は q シフト作用素 T_t の固定点になるため解の分岐点になり得るが, そのほかの点は分岐点になり得ない．このため, $t = 0$ と $t = \infty$ のみが方程式の特異点となる．Gauss の場合と同様に, Heine の q 超幾何方程式には $t = 0, \infty$ の近傍で収束する基本解が ${}_2\varphi_1$ を用いて構成できる：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_0(t) &= {}^{\mathrm{T}}\left({}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; t\right), t^{1-\gamma}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} aq/c, bq/c \\ q^2/c \end{matrix}; t\right)\right), \\ \boldsymbol{u}_\infty(t) &= {}^{\mathrm{T}}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^\alpha {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, aq/c \\ aq/b \end{matrix}; \frac{cq}{abt}\right), \left(\frac{1}{t}\right)^\beta {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} bq/c, b \\ bq/a \end{matrix}; \frac{cq}{abt}\right)\right). \end{aligned}$$

ここで, $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$ とした．q 差分方程式の場合でも, $t = 0$ の近傍における基本解と $t = \infty$ の近傍における基本解の間の接続行列を考えることができる．今の場合,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_0 = B\boldsymbol{u}_\infty, \\ &B = \begin{pmatrix} \dfrac{(b, c/a;q)_\infty}{(c, b/a;q)_\infty} t^\alpha \dfrac{\theta(at)}{\theta(t)} & \dfrac{(a, c/b;q)_\infty}{(c, a/b;q)_\infty} t^\beta \dfrac{\theta(bt)}{\theta(t)} \\ \dfrac{(qb/c, q/a;q)_\infty}{(q^2/c, b/a;q)_\infty} t^{\alpha-\gamma+1} \dfrac{\theta(aqt/c)}{\theta(t)} & \dfrac{(qa/c, q/b;q)_\infty}{(q^2/c, a/b;q)_\infty} t^{\beta-\gamma+1} \dfrac{\theta(bqt/c)}{\theta(t)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

である．ここで, $(a,b;q)_\infty$ は $(a;q)_\infty(b;q)_\infty$ の略記であり, $\theta(t)=(t,q/t;q)_\infty$ である．$\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{u}_\infty$ は擬定数体 K 上の基本解なので, 接続行列 B も擬定数値行列になることに注意しておく．

超幾何函数や q 超幾何函数の理論において, 接続問題を解くことは基本的かつ重要な問題である．本稿では, 次の多変数 q 超幾何函数が満たす q 差分方程式の接続問題を考える：

$$\mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)=\sum_{m_1,\dots,m_M\ge 0}\prod_{j=1}^{N}\frac{(a_j)_{|m|}}{(c_j)_{|m|}}\prod_{i=1}^{M}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=1}^{M}t_i^{m_i}.$$

ここで, $|m|=m_1+\cdots+m_M$ であり, また $(a;q)_m$ を $(a)_m$ と略記した (以降も略記する)．この q 超幾何函数はモノドロミー保存変形の理論に関連する函数で Park [4] により導入された．$M=1$ の場合は一般 q 超幾何函数 ${}_{N+1}\varphi_N$, $N=1$ の場合は q-Lauricella 超幾何函数 φ_D となる．q 超幾何函数 $\mathcal{F}_{N,M}$ は次の q 差分方程式系 $E_{N,M}$ を満たす：

$$\left\{t_s\prod_{j=1}^{N}(1-a_jT)\cdot(1-b_sT_s)-\prod_{j=1}^{N}(1-c_jq^{-1}T)\cdot(1-T_s)\right\}\mathcal{F}=0\quad(1\le s\le M),$$
$$\{t_r(1-b_rT_r)(1-T_s)-t_s(1-b_sT_s)(1-T_r)\}\mathcal{F}=0\quad(1\le r<s\le M),$$

ここで, T_s は T_{t_s} の略記であり, $T=T_1T_2\cdots T_M$ である．この方程式系の rank は $MN+1$ であることが知られている [5]．以下では, この方程式系 $E_{N,M}$ の接続問題の解を与える．すなわち, 適当な領域で収束する基本解を構成し, その基本解たちの間の接続行列を求める．以降の内容は [3] に基づく．

2　$E_{N,M}$ の基本解

この章では, $E_{N,M}$ の基本解を紹介し, その特徴づけを与える．

Definition 2.1. $0\le L\le M$, $1\le k\le N$, $L+1\le l\le M$, $1\le l'\le L$ に対し, 函数 $\mathcal{F}^{L}_{N,M}$, $\mathcal{F}^{L;k,l}_{N,M}$, $\mathcal{G}^{L;k,l'}_{N,M}$ を次で定義する：

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}^{L}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)\\&\quad=\sum_{m_1,\dots,m_M\ge 0}\prod_{j=1}^{N}\frac{(a_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)}}{(c_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)}}\prod_{i=1}^{M}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=1}^{L}t_i^{m_i}\prod_{i=L+1}^{M}\left(\frac{q}{b_it_i}\right)^{m_i},\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}^{L;k,l}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le N}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)=\sum_{m_1,\dots,m_M\ge 0}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{(qa_k/c_j)_{m_{L+1}}}{(qa_k/a_j)_{m_{L+1}}}\right.\\&\quad\times\prod_{i=1}^{L}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=L+1}^{l-1}\frac{(b_i)_{m_{i+1}}}{(q)_{m_{i+1}}}\prod_{i=l+1}^{M}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\frac{(a_k/b_{l+1}\cdots b_M)_{m(l)}}{(qa_k/b_l\cdots b_M)_{m(l)}}\\&\quad\left.\times\prod_{i=1}^{L}\left(\frac{qt_i}{b_lt_l}\right)^{m_i}\prod_{i=L+1}^{l-1}\left(\frac{qt_i}{b_lt_l}\right)^{m_{i+1}}\prod_{i=l+1}^{M}\left(\frac{b_lt_l}{b_it_i}\right)^{m_i}\left(\prod_{j=1}^{N}\frac{c_j}{a_j}\cdot\frac{q}{b_lt_l}\right)^{m_{L+1}}\right\},\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\mathcal{G}^{L;k,l'}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)=\sum_{m_1,\dots,m_M\ge 0}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{(qa_j/c_k)_{m_L}}{(qc_j/c_k)_{m_L}}\right.$$

$$\times \prod_{i=1}^{l'-1} \frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}} \prod_{i=l'+1}^{L} \frac{(b_i)_{m_{i-1}}}{(q)_{m_{i-1}}} \prod_{i=L+1}^{M} \frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}} \frac{(c_k/qb_{l'+1}\cdots b_M)_{m(l'-1)}}{(c_k/b_{l'}\cdots b_M)_{m(l'-1)}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{l'-1} \left(\frac{qt_i}{b_{l'}t_{l'}}\right)^{m_i} \prod_{i=l'+1}^{L} \left(\frac{b_{l'}t_{l'}}{b_it_i}\right)^{m_{i-1}} \prod_{i=L+1}^{M} \left(\frac{b_{l'}t_{l'}}{b_it_i}\right)^{m_i} \cdot \left(\frac{b_{l'}t_{l'}}{q}\right)^{m_L} \Bigg\}. \tag{2.3}$$

ただし, $m(l) = m_1 + \cdots + m_l - (m_{l+1} + \cdots + m_M)$ である.

これらの級数はそれぞれ以下の領域で収束する：

$$\text{級数 (2.1)} : \left\{ |t_i| < 1,\, 1 \le i \le L,\, \left| \frac{c_1 \cdots c_N q}{a_1 \cdots a_N b_i t_i} \right| < 1,\, L+1 \le i \le M \right\},$$

$$\text{級数 (2.2)} : \left\{ \left| \frac{c_1 \cdots c_N q}{a_1 \cdots a_N b_l t_l} \right| < 1,\, \left| \frac{qt_i}{b_l t_l} \right| < 1,\, 1 \le i \le l-1,\, \left| \frac{qt_l}{b_i t_i} \right| < 1,\, l+1 \le i \le M \right\},$$

$$\text{級数 (2.3)} : \left\{ |t_l| < 1,\, \left| \frac{qt_i}{b_l t_l} \right| < 1,\, 1 \le i \le l-1,\, \left| \frac{qt_l}{b_i t_i} \right| < 1,\, l+1 \le i \le M \right\}.$$

函数 $\mathcal{F}^{L}_{N,M}$, $\mathcal{F}^{L;k,l}_{N,M}$, $\mathcal{G}^{L;k,l'}_{N,M}$ を用いて, $E_{N,M}$ の基本解が構成できる.

Proposition 2.2 ([3])**.** $0 \le L \le M$, $\sigma \in \mathfrak{S}_M$ に対し,

$$u_0^{L,\sigma} = \prod_{i=L+1}^{M} t_{\sigma(i)}^{-\beta_{\sigma(i)}} \cdot \mathcal{F}^{L}_{N,M}\left(\begin{matrix} \{a_j\}_{1\le j\le N}, \{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M} \\ \{c_j\}_{1\le j\le N} \end{matrix} ; \{t_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M} \right),$$

$$u_{k,l}^{L,\sigma} = \begin{cases} t_{\sigma(l)}^{1+\sum_{i=l+1}^{M}\beta_{\sigma(i)}-\gamma_k} \displaystyle\prod_{i=l+1}^{M} t_{\sigma(i)}^{-\beta_{\sigma(i)}} \cdot \mathcal{G}^{L;k,l}_{N,M}\left(\begin{matrix} \{a_j\}_{1\le j\le N}, \{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M} \\ \{c_j\}_{1\le j\le N} \end{matrix} ; \{t_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M} \right), \\ \hfill 1 \le k \le N,\ 1 \le l \le L, \\ t_{\sigma(l)}^{-\alpha_k+\sum_{i=l+1}^{M}\beta_{\sigma(i)}} \displaystyle\prod_{i=l+1}^{M} t_{\sigma(i)}^{-\beta_{\sigma(i)}} \cdot \mathcal{F}^{L;k,l}_{N,M}\left(\begin{matrix} \{a_j\}_{1\le j\le N}, \{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M} \\ \{c_j\}_{1\le j\le N} \end{matrix} ; \{t_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M} \right), \\ \hfill 1 \le k \le N,\ L+1 \le l \le M, \end{cases}$$

$$D^{L,\sigma} = \left\{ |t_{\sigma(i)}| < 1,\, 1 \le i \le L,\, \left| \prod_{j=1}^{N} \frac{c_j}{a_j} \cdot \frac{q}{b_{\sigma(i)} t_{\sigma(i)}} \right| < 1,\, L+1 \le i \le M, \right.$$
$$\left. \left| \frac{qt_{\sigma(i)}}{b_{\sigma(j)} t_{\sigma(j)}} \right| < 1,\, 1 \le i < j \le M \right\}$$

とおく. ただし, $a_j = q^{\alpha_j}$, $b_i = q^{\beta_i}$, $c_j = q^{\gamma_j}$ とする. このとき, パラメータが条件

$$a_j/a_k, c_j/c_k, a_j/b_{\sigma(i)}\cdots b_{\sigma(M)}, c_k/b_{\sigma(i)}\cdots b_{\sigma(M)} \notin q^{\mathbb{Z}}, \quad (1 \le i \le M+1, 1 \le j \ne k \le N),$$

を満たすならば,

$$\boldsymbol{u}^{L,\sigma} = {}^{\mathrm{T}}\big(u_0^{L,\sigma}, u_{1,1}^{L,\sigma}, \ldots, u_{1,M}^{L,\sigma}, u_{2,1}^{L,\sigma}, \ldots, u_{N,M}^{L,\sigma}\big),$$

は $D^{L,\sigma}$ 上で収束する $E_{N,M}$ の基本解となる.

この命題は, 以下の手順で証明できる.

step1 $\underline{u_0^{L,\sigma},\ u_{k,l}^{L,\sigma}\text{ が }E_{N,M}\text{ を満たすことを示す.}}$

$E_{N,M}$ の対称性により, $\sigma = \mathrm{id}$ のときに $E_{N,M}$ を満たすことを見ればよい. $u_0^{L,\mathrm{id}}$, $u_{k,l}^{L,\mathrm{id}}$ が $E_{N,M}$ を満たすことは直接計算でわかる.

step2 $\underline{u_0^{L,\sigma},\ u_{k,l}^{L,\sigma}\text{ が擬定数体 }K = \{C(t) \mid T_iC(t) = C(t) \ \ (1 \leq i \leq M)\}\text{ 上一次独立であることを示す.}}$

これは, 次の主張から従う：

Claim. $\delta_i = (\delta_{1,i}, \dots, \delta_{M,i}) \in \mathbb{C}^M$ $(1 \leq i \leq n)$ とする. このとき任意の $i \neq j$ に対し $\delta_i \neq \delta_j$ であり,

$$f_i(t_1, \dots, t_M) = t^{\delta_i}(1 + O(||t||))$$

ならば, $f_1, \dots, f_n$ は擬定数体 K 上一次独立である. ここで, $t^{\delta_i} = t_1^{\delta_{1,i}} \cdots t_M^{\delta_{M,i}}$ である.

Claim の証明は Vandermonde 行列式に帰着させることで証明できる.

Remark 2.3. これらの基本解を発見した方法について少し述べておく. まず後述する手法 (${}_{N+1}\varphi_N$ の接続公式を繰り返し適用する手法) を用いて $\mathcal{F}_{N,M}$ の接続公式を計算する. この接続公式を整理すれば, 和 $\mathcal{F}_{N,M}^L$, $\mathcal{F}_{N,M}^{L;k,l}$ が現れる. これにより $\mathcal{F}_{N,M}^L$, $\mathcal{F}_{N,M}^{L;k,l}$ を用いた解を発見した. さらに $L = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{N,M}^0 \left(\begin{matrix} \{a_j\}_{1\leq j\leq N}, \{b_i\}_{1\leq i\leq M} \\ \{c_j\}_{1\leq j\leq N} \end{matrix}; \{t_i\}_{1\leq i\leq M} \right) \\
&= \mathcal{F}_{N,M} \left(\begin{matrix} \{qb_1 \cdots b_M/c_j\}_{1\leq j\leq N}, \{b_i\}_{1\leq i\leq M} \\ \{qb_1 \cdots b_M/a_j\}_{1\leq j\leq N} \end{matrix}; \left\{ \frac{c_1 \cdots c_N q}{a_1 \cdots a_N b_i t_i} \right\}_{1\leq i\leq M} \right),
\end{aligned}$$

となるので, 上で求めた $\mathcal{F}_{N,M}$ の接続公式を $\mathcal{F}_{N,M}^0$ に適用することができる. $\mathcal{F}_{N,M}^0$ の接続公式を書き下してみることで, $\mathcal{G}_{N,M}^{L;k,l'}$ を用いた解が発見できた.

Remark 2.4. $N = 1$, $q \to 1$ のとき (すなわち, Lauricella 超幾何函数 F_D に付随する微分方程式のとき), 領域 $\{|t_1| \ll \cdots \ll |t_L| \ll 1 \ll |t_{L+1}| \ll \cdots \ll |t_M|\}$ における基本解が, 今日では GKZ 超幾何函数論と呼ばれる理論により

$$F_{D,j} \left(\begin{matrix} \tilde{\alpha}; \{\tilde{\beta}_i\}_{1\leq i\leq M} \\ \tilde{\gamma} \end{matrix}; \{x_i\}_{1\leq i\leq M} \right) = \sum_{m_1,\dots,m_M\geq 0} \frac{(\tilde{\alpha})_{-m(j-1)}}{(\tilde{\gamma})_{-m(j-1)}} \prod_{i=1}^M \frac{(\tilde{\beta}_i)_{m_i}}{(1)_{m_i}} \prod_{i=1}^M x_i^{m_i},$$

という函数を用いて構成されている [2]. (ここでの $(\alpha)_n$ は $\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ の意味である.) $N = 1$ のとき, 解 $u_0^{L,\sigma}$, $u_{k,l}^{L,\sigma}$ は [2] による $F_{D,j}$ を用いた解の q 類似となっている.

また, 上記の基本解は漸近挙動で特徴づけることができる.

Proposition 2.5 ([3])**.** $f(t)$ を $E_{N,M}$ の, $D^{L,\mathrm{id}}$ 上で収束する解とする. $x_i = t_i/t_{i+1}$, $1 \leq i < L$, $x_L = t_L$, $x_{L+1} = 1/t_{L+1}$, $x_i = t_{i-1}/t_i$, $L+1 < i \leq M$ と変数変換する. このとき適当なパラメータ $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_M)$ を用いて

$$f(t) = t^\delta(1 + O(||x||)),$$

とかけるならば, $f(t)$ は $u_0^{L,\mathrm{id}}$, $u_{k,l}^{L,\mathrm{id}}$ のいずれかとなる.

実際 $E_{N,M}$ を

$$\begin{cases} \left\{ \dfrac{t_s}{t_{s+1}} \cdots \dfrac{t_{L-1}}{t_L} t_L \displaystyle\prod_{j=1}^{N} (1-a_j T) \cdot (1-b_s T_s) - \prod_{j=1}^{N} \left(1 - c_j q^{-1} T\right) \cdot (1-T_s) \right\} f(t) = 0, \\ \hfill 1 \le s \le L, \\ \left\{ \displaystyle\prod_{j=1}^{N} (1-a_j T) \cdot (1-b_s T_s) - \dfrac{1}{t_{L+1}} \dfrac{t_{L+1}}{t_{L+2}} \cdots \dfrac{t_{s-1}}{t_s} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - c_j q^{-1} T\right) \cdot (1-T_s) \right\} f(t) = 0, \\ \hfill L+1 \le s \le M, \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{t_r}{t_s} (1 - b_r T_r)(1 - T_s) - (1 - b_s T_s)(1 - T_r) \right\} f(t) = 0, \qquad 1 \le r < s \le M,$$

と書き直し, x の最低次の項を見ることで,

$$\begin{cases} \displaystyle\prod_{j=1}^{N} \left(1 - c_j q^{-1} q^{\delta_1 + \cdots + \delta_M}\right)\left(1 - q^{\delta_s}\right) = 0, & 1 \le s \le L, \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{N} \left(1 - a_j q^{\delta_1 + \cdots + \delta_M}\right)\left(1 - b_s q^{\delta_s}\right) = 0, & L < s \le M, \end{cases}$$

$$\left(1 - b_s q^{\delta_s}\right)\left(1 - q^{\delta_r}\right) = 0, \qquad 1 \le r < s \le M,$$

がわかる. これを解くと,

$$\begin{aligned} (\delta_1, \ldots, \delta_M) &= (0, \ldots, 0, -\beta_{L+1}, \ldots, -\beta_M), \\ & \begin{cases} \left(1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{M} \beta_i - \gamma_k, -\beta_2, \ldots, -\beta_M\right), \\ \left(0, 1 + \displaystyle\sum_{i=3}^{M} \beta_i - \gamma_k, -\beta_3, \ldots, -\beta_M\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(0, \ldots, 0, 1 + \displaystyle\sum_{i=L+1}^{M} \beta_i - \gamma_k, -\beta_{L+1}, \ldots, -\beta_M\right), \end{cases} \\ & \begin{cases} \left(0, \ldots, 0, -\alpha_k + \displaystyle\sum_{i=L+2}^{M} \beta_i, -\beta_{L+2}, \ldots, -\beta_M\right), \\ \left(0, \ldots, 0, -\alpha_k + \displaystyle\sum_{i=L+3}^{M} \beta_i, -\beta_{L+3}, \ldots, -\beta_M\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (0, \ldots, 0, -\alpha_k), \end{cases} \end{aligned}$$

がわかり, $f(t)$ が $u_0^{L,\mathrm{id}}$, $u_{k,l}^{L,\mathrm{id}}$ のいずれかであることがわかる.

3 接続行列

この章では, 前章で構成した $E_{N,M}$ の基本解の間の接続行列を求める. すなわち, $\boldsymbol{u}^{L_1,\sigma_1}$ と $\boldsymbol{u}^{L_2,\sigma_2}$ の間の接続行列を求める. この問題は原理的には以下の行列を求めることで解ける：

- $\boldsymbol{u}^{L,\mathrm{id}}$ と $\boldsymbol{u}^{L+1,\mathrm{id}}$ の間の接続行列.
- $\boldsymbol{u}^{L,\mathrm{id}}$ と $\boldsymbol{u}^{L-1,\mathrm{id}}$ の間の接続行列.
- $\boldsymbol{u}^{M,\mathrm{id}}$ と $\boldsymbol{u}^{M,s_r}$ の間の接続行列.

ここで, $s_r=(r,r+1)\in\mathfrak{S}_M$ である. さらに, これらの問題は全て一般 q 超幾何函数 ${}_{N+1}\varphi_N$ の接続公式を用いて計算できる.

Lemma 3.1 ([6])**.** 一般 q 超幾何函数の接続公式は以下で与えられる：

$$
{}_{N+1}\varphi_N\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_{N+1}\\ b_1,\dots,b_N\end{matrix};t\right)=\sum_{k=1}^{N+1}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{(b_j/a_k)_\infty}{(b_j)_\infty}\prod_{\substack{1\le j\le N+1\\ j\ne k}}\frac{(a_j)_\infty}{(a_j/a_k)_\infty}\right.
$$
$$
\left.\times\frac{\theta(ta_k)}{\theta(t)}\,{}_{N+1}\varphi_N\left(\begin{matrix}\{qa_k/b_j\}_{1\le j\le N},\,a_k\\ \{qa_k/a_j\}_{1\le j\le N+1,\,j\ne k}\end{matrix};\frac{b_1\cdots b_Nq}{a_1\cdots a_{N+1}t}\right)\right\}. \tag{3.1}
$$

この接続公式は以下の積分に Cauchy の積分定理を用いることで得られる：

$$
\int_C\frac{(b_1x,\dots,b_Nx,qx/t,t/x)_\infty}{(a_1x,\dots,a_{N+1}x,1/x)_\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}.
$$

ただし, 積分路 C は $1/(a_1x,\dots,a_{N+1}x)_\infty$ の極が C の外に, $1/(1/x)_\infty$ の極が C の内に来るように $x=0$ を反時計回りに一周するループである. この証明方法の詳細については, Gasper-Rahman [1] を参照されたい.

まず, $\boldsymbol{u}^{L,\mathrm{id}}$ と $\boldsymbol{u}^{L+1,\mathrm{id}}$ の間の接続行列を考える. 定義より,

$$
u_0^{L,\mathrm{id}}=\prod_{i=L+1}^{M}t_i^{-\beta_i}\cdot\mathcal{F}_{N,M}^{L}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right),
$$
$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{N,M}^{L}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)\\
&=\sum_{m_1,\dots,m_M\ge0}\prod_{j=1}^{N}\frac{(a_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)}}{(c_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)}}\prod_{i=1}^{M}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=1}^{L}t_i^{m_i}\prod_{i=L+1}^{M}\left(\frac{q}{b_it_i}\right)^{m_i}\\
&=\sum_{m_1,\dots,m_L,m_{L+2},\dots,m_M\ge0}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{(a_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)'}}{(c_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)'}}\prod_{\substack{1\le i\le M\\ i\ne L+1}}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=1}^{L}t_i^{m_i}\prod_{i=L+2}^{M}\left(\frac{q}{b_it_i}\right)^{m_i}\right.\\
&\qquad\left.\times\,{}_{N+1}\varphi_N\left(\begin{matrix}\{qb_{L+1}\cdots b_M/c_jq^{m(L)'}\}_{1\le j\le N},\,b_{L+1}\\ \{qb_{L+1}\cdots b_M/a_jq^{m(L)'}\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\prod_{j=1}^{N}\frac{c_j}{a_j}\cdot\frac{q}{b_{L+1}t_{L+1}}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

とできる. 最右辺の ${}_{N+1}\varphi_N$ に接続公式 (3.1) を適用し, 整理することで以下を得る：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{N,M}^{L}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)\\
&=\prod_{j=1}^{N}\frac{(qb_{L+2}\cdots b_M/a_j,qb_{L+1}\cdots b_M/c_j)_\infty}{(qb_{L+1}\cdots b_M/a_j,qb_{L+2}\cdots b_M/c_j)_\infty}\cdot\frac{\theta(t_{L+1}a_1\cdots a_N/c_1\cdots c_N)}{\theta(t_{L+1}b_{L+1}a_1\cdots a_N/c_1\cdots c_N)}\\
&\qquad\times\mathcal{F}_{N,M}^{L+1}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)
\end{aligned}
$$

$$
+\sum_{d=1}^{N}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{(c_d/a_j)_\infty}{(qb_{L+1}\cdots b_M/a_j)_\infty}\prod_{\substack{1\le j\le N\\ j\ne d}}\frac{(qb_{L+1}\cdots b_M/c_j)_\infty}{(c_d/c_j)_\infty}\cdot\frac{(b_{L+1})_\infty}{(c_d/qb_{L+2}\cdots b_M)_\infty}\right.
$$

$$
\times\frac{\theta(t_{L+1}a_1\cdots a_Nc_d/qb_{L+2}\cdots b_Mc_1\cdots c_N)}{\theta(t_{L+1}b_{L+1}a_1\cdots a_N/c_1\cdots c_N)}
$$

$$
\left.\times\mathcal{F}_{N,M}^{L+1;d,L+1}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)\right\}.
$$

また, $u_{k,L+1}^{L,\mathrm{id}}$ の接続も同様に求めることができる. さらに, $l\ne L+1$ のときは $u_{k,l}^{L,\mathrm{id}}=u_{k,l}^{L+1,\mathrm{id}}$ となる. 以上より $\boldsymbol{u}^{L,\mathrm{id}}=A^{L,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};t_{L+1}\right)\boldsymbol{u}^{L+1,\mathrm{id}}$ となる行列 $A^{L,\mathrm{id}}$ を, ${}_{N+1}\varphi_N$ の接続公式を用いることで明示的に求めることができる. このような, 「多重和の一部を一般 q 超幾何函数 ${}_{N+1}\varphi_N$ とみなし, そこに接続公式を適用する」という手法を用いれば, $\boldsymbol{u}^{L,\mathrm{id}}=B^{L,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};t_L\right)\boldsymbol{u}^{L-1,\mathrm{id}}$, $\boldsymbol{u}^{M,s_r}=S_{s_r}^{M,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\frac{t_r}{t_{r+1}}\right)\boldsymbol{u}^{M,\mathrm{id}}$ となる行列 $B^{L,\mathrm{id}}$, $S_{s_r}^{M,\mathrm{id}}$ も同様に求めることができる. $A^{L,\mathrm{id}}$, $B^{L,\mathrm{id}}$, $S_{s_r}^{M,\mathrm{id}}$ の具体形については省略する ([3] を参照されたい). さらに, $A^{L,\sigma}=A^{L,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};t_{\sigma(L+1)}\right)$, $B^{L,\sigma}=B^{L,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};t_{\sigma(L)}\right)$, $S_{s_r}^{M,\sigma}=S_{s_r}^{M,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\frac{t_{\sigma(r)}}{t_{\sigma(r+1)}}\right)$ とおけば, $\boldsymbol{u}^{L,\sigma}=A^{L,\sigma}\boldsymbol{u}^{L+1,\sigma}$, $\boldsymbol{u}^{L,\sigma}=B^{L,\sigma}\boldsymbol{u}^{L-1,\sigma}$,$\boldsymbol{u}^{M,s_r\sigma}=S_{s_r}^{M,\sigma}\boldsymbol{u}^{M,\sigma}$ となる. 以上により, 次の主定理を得る.

Theorem 3.2 ([3])**.** $0\le L_1,L_2\le M$, $\sigma_1,\sigma_2\in\mathfrak{S}_M$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{L_2,\sigma_2}=A^{L_2,\sigma_2}A^{L_2+1,\sigma_2}\cdots A^{M-1,\sigma_2}S_{s_{r_1}}^{M,s_{r_2}\cdots s_{r_I}\sigma_1}S_{s_{r_2}}^{M,s_{r_3}\cdots s_{r_I}\sigma_1}\cdots S_{s_{r_I}}^{M,\sigma_1}\\
\times B^{M,\sigma_1}B^{M-1,\sigma_1}\cdots B^{L_1+1,\sigma_1}\boldsymbol{u}^{L_1,\sigma_1},
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

である. ただし, $\sigma_2=s_{r_1}\cdots s_{r_I}\sigma_1$, $s_r=(r,r+1)\in\mathfrak{S}_M$ とする.

参考文献

[1] Gasper G., Rahman M., Basic hypergeometric series, 2nd ed., *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] Gelfand I.M., Zelevinsky A.V., Kapranov M.M., Hypergeometric functions and toric varieties, *Funct. Anal. Appl.* **23** (1989), 94–106.

[3] Nobukawa T., Connection problem for an extension of q-hypergeometric system, *SIGMA* **18** (2022), 080, 21 pages, arXiv:2102.09175.

[4] Park K., A certain generalization of q-hypergeometric functions and their related monodromy preserving deformation, *J. Integrable Syst.* **3** (2018), xyy019, 14 pages, arXiv:1804.08921.

[5] Park K., A certain generalization of q-hypergeometric functions and their related monodromy preserving deformation II, arXiv:2005.04992.

[6] Watson G.N., The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **21** (1910), 281–299.

[7] 青本和彦, 喜多通武, 超幾何関数論, 丸善出版, 1994.

[8] 原岡喜重, すうがくの風景 超幾何関数, 朝倉書店, 2002.

[9] 吉田正章, 私説超幾何関数 —対称領域による点配置空間の一意化—, 共立出版, 1997.