超対称頂点代数のオペラッド

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
西中祐介 (Yusuke NISHINAKA)

概要

代数的なオペラッドと超対称頂点代数について概説し, 超対称頂点代数の構造を記述するオペラッドを導入する. このオペラッドを用いて超対称頂点代数の加群を係数にもつコチェイン複体が定義できることを説明し, その低次のコホモロジーの具体的な形を与える.

本稿は名大多元数理の柳田伸太郎准教授との共同研究 [NY22] に基づく.

1 導入

頂点代数は 1980 年代に Borcherds によって導入された代数系で, 二次元共形場理論の代数構造を記述する枠組みとして知られている. 頂点代数は線形空間 V と V 上の線形変換 T, V の元 $|0\rangle$ および線形写像 $Y\colon V \to (\mathrm{End}\, V)[\![z^{\pm 1}]\!]$ の組 $(V, T, |0\rangle, Y)$ でいくつかの条件を満たすものである (例えば [FBZ04, Definition 1.3.1]). Bakalov, De Sole, Heluani, Kac は [BDHK19, §6] で線形空間 V と V 上の線形変換 T に対して, オペラッド P_V^{ch} を構成し (V, T) 上の非単位的頂点代数の構造と Lie オペラッド $\mathcal{L}ie$ から P_V^{ch} へのオペラッドの射が一対一に対応することを示した. この意味でオペラッド P_V^{ch} は (V, T) 上の頂点代数の構造を記述していると言える. §2 では本稿に必要な範囲でオペラッドについて説明する.

[NY22] では [BDHK19] のオペラッド P_V^{ch} の超対称類似として, 超対称頂点代数の構造を記述するオペラッドを定義した. ここで超対称頂点代数 [HK07] とは, 頂点代数が線形空間 V の各元 a をボソン的な変数 z をもつ場 $Y(a, z)$ へ対応させるのに対し, 線形超空間 V の各元 a をボソン的な変数 z と N 個のフェルミオン的な変数 $\zeta^1, \dots, \zeta^N$ をもつ超場 $Y(a, z, \zeta^1, \dots, \zeta^N)$ へ対応させるものである. §3 では超対称頂点代数を定義し, そのオペラッドの構成について説明する. なお超対称頂点代数には N_W 型と N_K 型とよばれる 2 つのクラスがあるが, 本稿では N_W 型に限って話をする.

また [BDHK19, §7] ではオペラッド P_V^{ch} を用いて, 頂点代数 V の加群に係数をもつコチェイン複体を定義し低次のコホモロジーを調べている. §4 ではこの超対称類似について説明する.

記号と用語

- $\mathbb{N}$ は非負整数全体を表す: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. また集合 $\{1, \dots, n\}$ を $[n]$ で表す.
- $k, n \in \mathbb{N}$ に対し, 多重指数 $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ で $n_1 + \cdots + n_k = n$ を満たすもの全体のなす集合を $\mathbb{N}_n^k$ で表す.
- $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする. 単に線形空間や線形写像といったときは全て $\mathbb{K}$ 上のものとする. また $\mathbb{K}$ 上の線形空間のテンソル積 $\otimes_{\mathbb{K}}$ は $\mathbb{K}$ を省略して $\otimes$ と書く. 断らない限り, 代数といったら $\mathbb{K}$ 上の単位的な結合代数のこととする.
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-次数付き線形空間のことを線形超空間とよぶ. 線形超空間の偶奇 (parity) を p で表す. また線形超空間の偶奇を入れ替える関手を Π で表す.

2 オペラッド

この節では [LV12, Chapter 5] を参考にして, オペラッドとオペラッド上の代数という概念を導入する. オペラッドは任意の対称モノイダル圏 $\mathcal{M}$ で定義でき, 超対称頂点代数のオペラッドは $\mathcal{M}$ が線形超空間のなす圏の場合である. ここでは簡単のために $\mathcal{M}$ が線形空間のなす圏の場合に説明する.

対称群を $\mathfrak{S}_n$ で表し, 群環 $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$ 上の右加群のことを単に $\mathfrak{S}_n$-右加群とよぶ.

定義 2.1. 各 $n \in \mathbb{N}$ を $\mathfrak{S}_n$-右加群へ対応させる写像 $\mathcal{P}\colon n \mapsto \mathcal{P}(n)$ を $\mathfrak{S}$-加群とよぶ.

$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を $\mathfrak{S}$-加群とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n\colon \mathcal{P}(n) \to \mathcal{Q}(n)$ が $\mathfrak{S}_n$-右加群の準同型であるとき, 族 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ への $\mathfrak{S}$-加群の準同型とよぶ. $\mathfrak{S}$-加群全体のなすクラスは $\mathfrak{S}$-加群の準同型を射として圏をなす. この圏を $\mathfrak{S}$-Mod で表す.

以下では多重指数 $\nu = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_n^k$ に対し, 次の記号を用いる.

- 直積群 $\mathfrak{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{n_k}$ を $\mathfrak{S}_\nu$ で表し $\mathfrak{S}_n$ の部分群とみなす.
- $\mathfrak{S}$-加群 $\mathcal{P}$ に対し $\mathfrak{S}_\nu$-右加群 $\mathcal{P}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(n_k)$ を $\mathcal{P}(\nu)$ で表す.

定義 2.2. $\mathfrak{S}$-加群 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ に対し $\mathfrak{S}$-加群 $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}$ を

$$\begin{aligned}(\mathcal{P} \circ \mathcal{Q})(n) &\coloneqq \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Big(\mathcal{P}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} \bigoplus_{\nu\in\mathbb{N}_n^k} \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\nu}^{\mathfrak{S}_n} \mathcal{Q}(\nu)\Big) \\ &= \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Big(\mathcal{P}(k) \otimes_{\mathbb{K}[\mathfrak{S}_k]} \bigoplus_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}_n^k} \big(\mathcal{Q}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{Q}(n_k)\big) \otimes_{\mathbb{K}[\mathfrak{S}_{n_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{n_k}]} \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]\Big).\end{aligned}$$

により定義する. ただし $\mathfrak{S}_k$ は $\bigoplus_{\nu\in\mathbb{N}_n^k} \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\nu}^{\mathfrak{S}_n} \mathcal{Q}(\nu)$ に $\mathcal{Q}(\nu) = \mathcal{Q}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{Q}(n_k)$ の “テンソル積の成分の入れ替え” で左から作用している[1). $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}$ を $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の合成とよぶ.

$\mathfrak{S}$-加群の圏 $\mathfrak{S}$-Mod は合成 $\circ$ をテンソル積, $E \coloneqq (\delta_{n,1}\mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}} = (0, \mathbb{K}, 0, \ldots)$ を単位対象としてモノイダル圏をなす.

定義 2.3. モノイダル圏 $(\mathfrak{S}\text{-}\mathsf{Mod}, \circ, E)$ のモノイド対象をオペラッドとよぶ. すなわちオペラッドとは $\mathfrak{S}$-加群 $\mathcal{P}$ および $\mathfrak{S}$-加群の準同型 $\gamma\colon \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ と $\eta\colon E \to \mathcal{P}$ の組 $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ でモノイドの公理を満たすものである.

$(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ がオペラッドであるとき, γ を合成写像とよび η を単位射とよぶ. 各 $k, n \in \mathbb{N}$ と $\nu \in \mathbb{N}_n^k$ に対し, 合成写像を

$$X \circ (Y_1 \odot \cdots \odot Y_k) \coloneqq \gamma(X \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k) \quad (X \in \mathcal{P}(k),\ Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k \in \mathcal{P}(\nu))$$

と表す. また $\mathrm{id} \coloneqq \eta_1(1_\mathbb{K}) \in \mathcal{P}(1)$ と表し id を $\mathcal{P}$ の単位元とよぶ.

オペラッド全体のクラスがなす圏を Op で表す. オペラッドの射は $\mathfrak{S}$-Mod のモノイド対象としての射である.

オペラッドの例を挙げよう.

例 2.4. 自己準同型オペラッド $\mathcal{E}nd_V$ ([LV12, §5.2.11]): 線形空間 V に対し $\mathcal{E}nd_V(n) \coloneqq \operatorname{Hom}_\mathbb{K}(V^{\otimes n}, V)$ とすると $\mathcal{E}nd_V = (\mathcal{E}nd_V(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は次のようにしてオペラッドをなす.

- $\mathcal{E}nd_V(n)$ には $\mathfrak{S}_n$ を $V^{\otimes n}$ のテンソル積の成分の入れ替えで作用させる.

---

1) 正確には $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ を $\mathcal{Q}(\nu)$ にテンソル積の成分の入れ替えで作用させた後 σ と $\nu \in \mathbb{N}_n^k$ から定まる $\mathfrak{S}_n$ の元を右から作用させる.

- $k, n \in \mathbb{N}$ と $\nu \in \mathbb{N}_n^k$ に対し, 合成写像 $\gamma_\nu \colon \mathcal{E}nd_V(k) \otimes \mathcal{E}nd_V(\nu) \to \mathcal{E}nd_V(n)$ は写像の合成

$$\gamma_\nu(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) \coloneqq f \circ (g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) \quad (f \in \mathcal{E}nd_V(k),\ g_1 \otimes \cdots \otimes g_k \in \mathcal{E}nd_V(\nu))$$

  として定義する. (γ_ν が $\gamma \colon \mathcal{E}nd_V \circ \mathcal{E}nd_V \to \mathcal{E}nd_V$ を誘導する.)
- 単位元は $\mathrm{id}_V \in \mathcal{E}nd_V(1)$ とする.

例 2.5. (1) 結合オペラッド $\mathcal{A}ssoc$ [LV12, §5.2.10, Example 1]: $\mathfrak{S}$-加群としては $\mathcal{A}ssoc(n) \coloneqq \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$ ($\mathfrak{S}_n$ の正則表現) である.

(2) 可換オペラッド $\mathcal{C}om$ [LV12, §5.2.10, Example 2]: $\mathfrak{S}$-加群としては $\mathcal{C}om(n) \coloneqq \mathbb{K}$ ($\mathfrak{S}_n$ の自明表現) である.

(3) Lie オペラッド $\mathcal{L}ie$ [LV12, §5.2.10, Example 3]: $\mathcal{L}ie(n)$ は n 個の文字 $x_1, \ldots, x_n$ が生成する自由 Lie 代数のうち, 各 x_i ($i \in [n]$) がちょうど 1 つ現れる Lie 多項式が張る部分空間である. $\mathcal{L}ie(n)$ には $\mathfrak{S}_n$ を $x_1, \ldots, x_n$ の添字の入れ替えで作用させる. 例えば $\mathcal{L}ie(2) \cong \mathbb{K}c$ ($\mathfrak{S}_2$ の符号表現) となる.

定義 2.6. $\mathcal{O}$ をオペラッドとし V を線形空間とする. オペラッドの射 $\alpha \colon \mathcal{O} \to \mathcal{E}nd_V$ のことを V 上の $\mathcal{O}$ 代数の構造とよび, 組 (V, α) を $\mathcal{O}$ 代数とよぶ.

例 2.7. V を線形空間とする.

(1) $\mathcal{A}ssoc(2) = \mathbb{K}\,\mathrm{id} + \mathbb{K}(1,2)$ ($\mathfrak{S}_2$ の正則表現) であったことを思い出す. V 上の $\mathcal{A}ssoc$ 代数の構造 α に対し $\mu \coloneqq \alpha_2(\mathrm{id}) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^{\otimes 2}, V)$ とおくと (V, μ) は非単位的な結合代数となる. これにより $\mathcal{A}ssoc$ 代数の構造と V 上の非単位的な結合代数の構造が一対一に対応する.

(2) $\mathcal{C}om(2) = \mathbb{K}$ ($\mathfrak{S}_2$ の自明表現) であった. V 上の $\mathcal{C}om$ 代数の構造 α に対し $\mu \coloneqq \alpha_2(1_{\mathbb{K}})$ とおくと (V, μ) は非単位的な可換代数となる. これにより $\mathcal{C}om$ 代数の構造と V 上の非単位的な可換代数の構造が一対一に対応する.

(3) $\mathcal{L}ie(2) \cong \mathbb{K}c$ ($\mathfrak{S}_2$ の符号表現) であった. V 上の $\mathcal{L}ie$ 環の構造 α に対し $\mu \coloneqq \alpha_2(c)$ とおくと (V, μ) は Lie 環となる. これにより $\mathcal{L}ie$ 代数の構造と V 上の Lie 環の構造が一対一に対応する.

線形空間 V 上の $\mathcal{L}ie$ 代数の構造を次のように一般化する.

定義 2.8. オペラッド $\mathcal{P}$ に対し, オペラッドの射 $\alpha \colon \mathcal{L}ie \to \mathcal{P}$ のことを $\mathcal{P}$ 上の $\mathcal{L}ie$ 代数の構造とよぶ.

オペラッド $\mathcal{P}$ が与えられると dg Lie 環 $L(\mathcal{P}) = \bigoplus_{n \geq -1} L^n(\mathcal{P})$ が定まり $\mathcal{P}$ 上の $\mathcal{L}ie$ 代数の構造は $L(\mathcal{P})$ の Maurer-Cartan 方程式の解全体のなす集合 $\mathrm{MC}(L(\mathcal{P}))$ と一対一に対応する. このことを説明しよう.

まず線形空間としては, 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ について

$$L^n(\mathcal{P}) \coloneqq \{X \in \mathcal{P}(n+1) \mid X^\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) X \ (\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1})\}$$

である. ここで $X \in \mathcal{P}(n+1)$ への $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ の右作用を X^σ と書いた. $X \in L^m(\mathcal{P})$, $Y \in L^n(\mathcal{P})$ に対し

$$X \square Y \coloneqq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1,m}} (X \circ_1 Y)^{\sigma^{-1}}$$

とすることで, 線形写像 $\square \colon L(\mathcal{P}) \otimes L(\mathcal{P}) \to L(\mathcal{P})$ が定まる. ただし

$$\mathfrak{S}_{k,l} \coloneqq \{\sigma \in \mathfrak{S}_{k,l} \mid \sigma(1) < \cdots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)\},$$
$$X \circ_1 Y \coloneqq X \circ (Y \odot \mathrm{id} \odot \cdots \odot \mathrm{id}) \in \mathcal{P}(m+n+1)$$

である. $L(\mathcal{P})$ は

$$[X,Y] \coloneqq X\square Y - (-1)^{mn} Y\square X \quad (X\in L^m(\mathcal{P}),\ Y\in L^n(\mathcal{P}))$$

を括弧積とし, 微分を自明なものとすることで dg Lie 環をなす. dg Lie 環 $L(\mathcal{P})$ の Maurer-Cartan 方程式の解全体のなす集合は

$$\mathrm{MC}(L(\mathcal{P})) = \{X\in L^1(\mathcal{P}) \mid X\square X = 0\}$$

である.

命題 2.9. オペラッド $\mathcal{P}$ に対し, 全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Op}}(\mathcal{L}ie,\mathcal{P}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{MC}(L(\mathcal{P}))$ が存在する.

[BDHK19, §6] では, 線形空間 V と V 上の線形変換 T に対しオペラッド P_V^{ch} が定義されている. そして [BDHK19, Theorem 6.12] より, 全単射

$$\{(V,T) \text{ 上の頂点代数の構造 }\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{MC}(L(P_V^{\mathrm{ch}}))$$

の存在が分かる. したがって定義 2.8 の言葉を用いれば, 命題 2.9 より「(V,T) 上の頂点代数の構造とはオペラッド P_V^{ch} 上の $\mathcal{L}ie$ 代数の構造である」と言える.

3 超対称頂点代数のオペラッド

この節では $N_W = N$ 超対称頂点代数を定義し, そのオペラッド $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}$ を導入する. §1 では状態と場の対応 (state-field correspondence) Y を用いて頂点代数や超対称頂点代数を説明したが, ここでは超対称頂点代数を超対称 Lie 共形代数 (定義 3.3) 上に積が与えられた代数系として定義する. これら 2 つの定義は同値であることが知られている. 超対称頂点代数の詳細については [HK07] を参照されたい.

定義 3.1. A を集合とし各 $\alpha\in A$ 対して, 集合の列 $\Lambda_\alpha = (\lambda_\alpha, \theta_\alpha^1, \dots, \theta_\alpha^N)$ が与えられているとする. このとき偶なる λ_α $(\alpha\in A)$ と奇なる ζ_α^i $(\alpha\in A,\ i\in[N])$ を生成元とする $\mathbb{K}$ 上の自由可換超代数を $\mathbb{K}[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}$ で表す. 各 Λ_α を $\mathbb{K}[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}$ の $(1|N)_W$-超変数 ($(1|N)_W$-supervariable) とよぶ. $A=[n]$ のときは $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k\in[n]}$ の代わりに $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ と表す.

線形超空間 V と $(1|N)_W$-超変数 Λ_α $(\alpha\in A)$ に対し, 線形超空間 $V[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}$ を

$$V[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A} \coloneqq \mathbb{K}[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}\otimes V$$

により定める.

超対称頂点代数の定義を簡潔に述べるため, 便宜的に次の超代数 $\mathcal{H}_W$ を導入する.

定義 3.2. $\mathcal{H}_W$ を偶なる T と奇なる S^i $(i\in[N])$ を生成元とする $\mathbb{K}$ 上の自由可換超代数とする.

$\Lambda = (\lambda, \theta^1, \dots, \theta^N)$ を $(1|N)_W$-超変数とするとき $\mathcal{H}_W$ と $\mathbb{K}[\Lambda]$ は $T\mapsto -\lambda$, $S^i\mapsto -\theta^i$ $(i\in[N])$ により超代数として同型である.

以下, この節では $(1|N)_W$-超変数 $\Lambda = (\lambda, \theta^1, \dots, \theta^N)$ を一つ固定する.

定義 3.3. [HK07, Definition 3.2.2] V を $\mathcal{H}_W$-左超加群とし $[\cdot_\Lambda\cdot]\colon V\otimes V\to V[\Lambda]$ を偶奇 $\overline{N}$ の線形写像とする. 次の (i) から (iii) が成り立つとき, $(V,[\cdot_\Lambda\cdot])$ を $N_W=N$ 超対称 Lie 共形代数 ($N_W=N$ SUSY Lie conformal algebra) とよぶ.

(i) (半線形性) 任意の $a, b \in V$ に対し

$$[Ta_\Lambda b] = -\lambda[a_\Lambda b], \qquad [a_\Lambda Tb] = (\lambda + T)[a_\Lambda b],$$
$$[S^i a_\Lambda b] = -(-1)^N \theta^i [a_\Lambda b], \quad [a_\Lambda S^i b] = (-1)^{p(a)+\overline{N}}(\theta^i + S^i)[a_\Lambda b] \quad (i \in [N]).$$

(ii) (歪対称性) 任意の $a, b \in V$ に対し

$$[b_\Lambda a] = -(-1)^{p(a)p(b)+\overline{N}}[a_{-\Lambda-\nabla} b].$$

ただし $\nabla := (T, S^1, \ldots, S^N)$ とおいた.

(iii) (Jacobi の恒等式) 任意の $a, b, c \in V$ に対し

$$[a_{\Lambda_1}[b_{\Lambda_2} c]] = (-1)^{(p(a)+\overline{N})\overline{N}}[[a_{\Lambda_1} b]_{\Lambda_1+\Lambda_2} c] + (-1)^{(p(a)+\overline{N})(p(b)+\overline{N})}[b_{\Lambda_2}[a_{\Lambda_1} c]].$$

ただし Λ_1, Λ_2 は $(1|N)_W$-超変数である.

$N_W = N$ 超対称頂点代数を定義しよう. そのために次のような積分記号を導入する.

V を線形超空間とする. V 上の偶なる線形変換 F, G に対し, 線形写像 $\int_F^G d\Lambda \colon V[\Lambda] \to V$ を

$$\int_F^G d\Lambda\, \Lambda^{m|I} v := \frac{\delta_{I,[N]}}{m+1}(G^{m+1}v - F^{m+1}v) \quad (m \in \mathbb{N}, I \subset [N], v \in V) \tag{3.1}$$

により定義する. $\int_F^G d\Lambda \colon V[\Lambda] \to V$ は偶奇 $\overline{N}$ の線形写像である. また V が (単位的とも結合的とも限らない) 代数であるとき $a \in V$ と V 上の偶なる線形変換 F, G に対し, 線形写像 $\int_F^G d\Lambda\, a \colon V[\Lambda] \to V$ を

$$\left(\int_F^G d\Lambda\, a\right) \Lambda^{m|I} v := \left(\int_F^G d\Lambda\, \Lambda^{m|I} a\right) v \quad (m \in \mathbb{N}, I \subset [N], v \in V)$$

で定める. ただし右辺の $\int_F^G d\Lambda\, \Lambda^{m|I} a$ は (3.1) で定義されているものである.

定義 3.4. [HK07, Definition 3.3.15] $(V, [\cdot_\Lambda \cdot])$ を $N_W = N$ 超対称 Lie 共形代数とし $\mu \colon V \otimes V \to V$ を偶なる線形写像とする. 次の (i) から (iv) が成り立つとき $(V, [\cdot_\Lambda \cdot], \mu)$ を非単位的 $N_W = N$ 超対称頂点代数 (non-unital $N_W = N$ SUSY vertex algebra) とよぶ. ただし各 $a, b \in V$ について $ab := \mu(a \otimes b)$ とおく.

(i) 任意の $a, b \in V$ に対し

$$T(ab) = (Ta)b + a(Tb), \quad S^i(ab) = (S^i a)b + (-1)^{p(a)} a(S^i b) \quad (i \in [N]).$$

(ii) (擬可換性) 任意の $a, b \in V$ に対し

$$ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba = \int_{-T}^0 d\Lambda\, [a_\Lambda b].$$

(iii) (擬結合性) 任意の $a, b, c \in V$ に対し

$$(ab)c - a(bc) = \left(\int_0^T d\Lambda\, a\right)[b_\Lambda c] + (-1)^{p(a)p(b)} \left(\int_0^T d\Lambda\, b\right)[a_\Lambda c].$$

(iv) (Wick の公式) 任意の $a, b, c \in V$ に対し

$$[a_\Lambda bc] = [a_\Lambda b]c + (-1)^{(p(a)+\overline{N})p(b)} b[a_\Lambda c] + \int_0^\lambda d\Gamma\, [[a_\Lambda b]_\Gamma c].$$

ただし Γ は $(1|N)_W$-超変数である.

$(V,[\cdot_\Lambda\cdot],\mu)$ が非単位的 $N_W=N$ 超対称頂点代数であるとき $[\cdot_\Lambda\cdot]$ を V 上の Λ-括弧積とよび μ を V 上の積とよぶ.

定義 3.5. V を非単位的 $N_W=N$ 超対称頂点代数とする. V の偶なる元 $|0\rangle$ で任意の $a\in V$ に対し $a\,|0\rangle=|0\rangle\,a=a$ を満たすものが存在するとき V を $N_W=N$ 超対称頂点代数とよぶ.

次に $\mathcal{H}_W$-左超加群 V に対してオペラッド $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}$ を構成しよう. 以下では $\Lambda=(\lambda,\theta^1,\dots,\theta^N)$ に加えて $\Lambda_k=(\lambda_k,\theta_k^1,\dots,\theta_k^N)$ $(k\in\mathbb{Z}_{>0})$ も $(1|N)_W$-超変数とする.

正の整数 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ は次のようにして $(\mathcal{H}_W^{\otimes n},\mathcal{H}_W)$-両側超加群の構造をもつ: まず $\mathcal{H}_W\cong\mathbb{K}[\Lambda]$ より $\mathcal{H}_W$ の任意の元は, ある $\varphi(\Lambda)\in\mathbb{K}[\Lambda]$ を用いて $\varphi(\nabla)$ と一意的に表せることに注意する. すると $\varphi_1(\nabla)\otimes\cdots\varphi_n(\nabla)\in\mathcal{H}_W^{\otimes n}$ $(\varphi_1,\dots,\varphi_n\in\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n)$ を各 $a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\in\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ に

$$(\varphi_1(\nabla)\otimes\cdots\otimes\varphi_n(\nabla))\cdot a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)=\varphi_1(-\Lambda_1)\cdots\varphi_n(-\Lambda_n)a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)$$

と作用させることで $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ は $\mathcal{H}_W^{\otimes n}$-左超加群となる. また $\mathcal{H}_W$ の生成元 $\nabla=(T,S^1,\dots,S^N)$ を各 $a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\in\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ に

$$a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\cdot T\coloneqq a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\left(-\sum_{k=1}^n\lambda_k\right),\quad a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\cdot S^i\coloneqq a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\left(-\sum_{k=1}^n\theta_k^i\right)$$

と作用させることで $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ は $\mathcal{H}_W$-右超加群となる.

定義 3.6. V を $\mathcal{H}_W$-左超加群とする. 各 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\mathcal{H}_W^{\otimes n}$-左超加群 $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ を

$$V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n\coloneqq\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n\otimes_{\mathcal{H}_W}V$$

により定める. また $n=0$ のとき $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ は線形超空間

$$V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n\coloneqq\mathbb{K}\otimes_{\mathcal{H}_W}V\cong V/\nabla V$$

を表すものとする. ただし $\nabla V\coloneqq TV+\sum_{i=1}^N S^iV\subset V$ とおいた.

以下では $V[\Lambda_k]_{k=1}^n$ の元を $a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)v$ $(a\in\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n,\ v\in V)$ のようにテンソル積を省略して表し, $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ の元は $a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v$ と表す. 次の補題 3.7 は $\mathcal{H}_W$ の作用の定義より明らかである.

補題 3.7. V を $\mathcal{H}_W$-左超加群とする. このとき $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ から $V[\Lambda_k]_{k=1}^{n-1}$ への線形写像

$$a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\otimes v\mapsto a(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1},-\Lambda_1-\cdots-\Lambda_{n-1}-\nabla)v\quad(a\in\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n,\ v\in V)$$

により $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ と $V[\Lambda_k]_{k=1}^{n-1}$ は線形超空間として同型である.

定義 3.8. $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ とし $Z_k=(z_k,\zeta_k^1,\dots,\zeta_k^N)$ $(k\in[n])$ を $(1|N)_W$-超変数とする. $k,l\in\mathbb{N}$ に対し

$$z_{k,l}\coloneqq z_k-z_l,\quad \zeta_{k,l}^i\coloneqq\zeta_k^i-\zeta_l^i,\quad(i\in[N]),\quad Z_{k,l}\coloneqq(z_{k,l},\zeta_{k,l}^1,\dots,\zeta_{k,l}^N)$$

とおく.

- $\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\subset\mathbb{K}[Z_k]_{k=1}^n[z_{k,l}^{-1}]_{1\le k<l\le n}$ を $\{z_{k,l}^{\pm1}\mid 1\le k<l\le n\}\cup\{\zeta_{k,l}^i\mid i\in[N],1\le k<l\le n\}$ で生成される部分超代数とする.
- $\mathcal{D}_n\subset\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[Z_k]_{k=1}^n)$ を $Z_k=(z_k,\zeta_k^1,\dots,\zeta_k^N)$ と $\partial_{Z_k}=(\partial_{z_k},\partial_{\zeta_k^1},\dots,\partial_{\zeta_k^N})$ $(k\in[n])$ で生成される部分超代数とする.
- $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}\subset\mathcal{D}_n$ を $\{z_{k,l},\zeta_{k,l}^i\mid i\in[N],1\le k<l\le n\}\cup\{\partial_{z_k},\partial_{\zeta_k^i}\mid i\in[N],k\in[n]\}$ で生成される部分超代数とする.

以下, この節では $\mathcal{H}_W$-左超加群 V を固定する.

正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$ は次のような $\mathcal{D}_n$-右超加群の構造をもつ: 各 $v \in V^{\otimes n}$ と $f \in \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$ に対し

$$(v \otimes f) \cdot z_k \coloneqq v \otimes f z_k, \quad (v \otimes f) \cdot \zeta_k^i \coloneqq v \otimes f \zeta_k^i \quad (i \in [N], k \in [n])$$

および

$$\begin{aligned}
&(v \otimes f) \cdot \partial_{z_k} \coloneqq T^{(k)} v \otimes f - v \otimes \partial_{z_k} f,\\
&(v \otimes f) \cdot \partial_{\zeta_k^i} \coloneqq (-1)^{p(v)+p(f)} (S^i)^{(k)} v \otimes f + (-1)^{p(f)} v \otimes \partial_{\zeta_k^i} f \quad (i \in [N], k \in [n]).
\end{aligned}$$

ここで線形変換 $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}} V$ に対し $\varphi^{(k)}$ は $V^{\otimes n}$ 上の線形変換 $\varphi^{(k)} \coloneqq \mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \overset{k}{\varphi} \otimes \cdots \mathrm{id}_V$ を表す.

正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $V_{\nabla}[\Lambda_k]_{k=1}^n \cong V[\Lambda_k]_{k=1}^{n-1}$ は次のような $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$-右超加群の構造をもつ: 各 $a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \in \mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ と $v \in V$ に対し

$$\begin{aligned}
&\big(a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}, \Gamma) v\big) \cdot z_k \coloneqq -\partial_{\lambda_k} a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}, \Gamma) v,\\
&\big(a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}, \Gamma) v\big) \cdot \zeta_k^i \coloneqq -(-1)^{p(a)} \partial_{\theta_k^i} a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}, \Gamma) v,
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
&\big(a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \otimes v\big) \cdot \partial_{z_k} \coloneqq -\lambda_k a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \otimes v,\\
&\big(a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \otimes v\big) \cdot \partial_{\zeta_k^i} \coloneqq -(-1)^{p(a)+p(v)} \theta_k^i a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \otimes v.
\end{aligned}$$

ただし $\Gamma = -\Lambda_1 - \cdots - \Lambda_{n-1} - \nabla$ とおいた.

$\mathcal{D}_n$ の作用を $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$ に制限することで $V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$ と $V_{\nabla}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ は $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$-右超加群となる.

定義 3.9. V を $\mathcal{H}_W$-左超加群とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 線形超空間 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ を次のようにして定める:

$$\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n) \coloneqq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}}(V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}, V_{\nabla}[\Lambda_k]_{k=1}^n).$$

つまり $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ は線形写像 $X\colon V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}} \to V_{\nabla}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ で

$$X((v \otimes f) \cdot \varphi) = X(v \otimes f) \cdot \varphi \quad (v \in V^{\otimes n}, f \in \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}, \varphi \in \mathcal{D}_n^{\mathrm{T}})$$

を満たすもの全体が張る $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}, V_{\nabla}[\Lambda_k]_{k=1}^n)$ の部分線形超空間である. $(1|N)_W$-超変数 $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ を強調するために $X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ を $X_{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n}$ とも表す.

例 3.10. $n = 0, 1$ に対し $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ は次のようになる:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(0) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, V/\nabla V) \cong V/\nabla V,\\
&\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(1) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_1^{\mathrm{T}}}(V, V_{\nabla}[\Lambda]) \cong \operatorname{End}_{\mathcal{H}_W} V.
\end{aligned}$$

定義 3.11. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ と線形写像 $X\colon V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}} \to V_{\nabla}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ に対し, 線形写像 $X^{\sigma}\colon V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}} \to V_{\nabla}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ を

$$X^{\sigma}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes f) \coloneqq X_{\sigma(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)}(\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes \sigma f) \quad (v_1, \ldots, v_n \in V,\ f \in \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}})$$

により定義する. ただし

$$\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)=\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ \sigma(i)>\sigma(j)}}(-1)^{p(v_i)p(v_j)}(v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)}),$$

$$\sigma(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\coloneqq(\Lambda_{\sigma^{-1}(1)},\dots,\Lambda_{\sigma^{-1}(n)}),\quad (\sigma f)(Z_{k,l})\coloneqq f(Z_{\sigma^{-1}(k),\sigma^{-1}(l)})$$

である.

$X\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ ならば $X^\sigma\in\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}$ $(\sigma\in\mathfrak{S}_n)$ であり, この $\mathfrak{S}_n$ の作用で $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ は $\mathfrak{S}_n$-右超加群となる. よって $\mathfrak{S}$-超加群 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}\coloneqq\big(\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ が得られた.

定義 3.12. $k,n\in\mathbb{N}$, $(n_1,\dots,n_k)\in\mathbb{N}_n^k$ とし $N_i\coloneqq n_1+\cdots+n_i$ $(i\in[k])$ とおく.

(i) 線形写像 $Y_i\colon V^{\otimes n_i}\otimes\mathcal{O}_{n_i}^{\star\mathrm{T}}\to V_\nabla[\Lambda_l]_{l=1}^{n_i}$ $(i\in[k])$ に対し, 線形写像

$$Y_1\odot\cdots\odot Y_k\colon V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\to\bigotimes_{i=1}^k V_\nabla[\Lambda_l]_{l=N_{i-1}+1}^{N_i}\otimes\mathcal{O}_k^{\star\mathrm{T}}\cong\bigotimes_{i=1}^k V[\Lambda_l]_{l=N_{i-1}+1}^{N_i-1}\otimes\mathcal{O}_k^{\star\mathrm{T}}$$

を次のようにして定める: $v_1,\dots,v_n\in V$ に対し

$$\begin{aligned}&(Y_1\odot\cdots\odot Y_k)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes f)\\ &\coloneqq\pm(Y_1)_{\Lambda_1-\partial_{Z_1},\dots,\Lambda_{N_1}-\partial_{Z_{N_1}}}(w_1\otimes f_1)\otimes\cdots\\ &\qquad\qquad\cdots\otimes(Y_k)_{\Lambda_{N_{k-1}+1}-\partial_{Z_{N_{k-1}+1}}}(w_k\otimes f_k)\otimes f_0|_{Z_j=Z_{N_i}\ (N_{i-1}+1\le j\le N_i)}.\end{aligned}$$

ただし

$$w_i\coloneqq v_{N_{i-1}+1}\otimes\cdots\otimes v_{N_i},\quad \pm\coloneqq\prod_{1\le i<j\le k}(-1)^{(p(w_i)+p(f_i))p(Y_j)}$$

とおいた. また f を

$$f(Z_1,\dots,Z_n)=f_0(Z_1,\dots,Z_n)\prod_{i=1}^k f_i(Z_{N_{i-1}+1},\dots,Z_{N_i}),$$

$$(f_0\text{ は各 }N_{i-1}+1\le j\le N_i\text{ について }z_j=z_i\text{ に極をもたない})$$

と表した.

(ii) 線形写像 $X\colon V^{\otimes k}\otimes\mathcal{O}_k^{\star\mathrm{T}}\to V_\nabla[\Lambda_l]_{l=1}^k$ と $Y_i\colon V^{\otimes n_i}\otimes\mathcal{O}_{n_i}^{\star\mathrm{T}}\to V_\nabla[\Lambda_l]_{l=1}^{n_i}$ $(i\in[k])$ に対し, 線形写像の合成

$$V^{\otimes k}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\xrightarrow{Y_1\odot\cdots\odot Y_k}\bigotimes_{i=1}^k V[\Lambda_l]_{l=N_{i-1}+1}^{N_i-1}\otimes\mathcal{O}_k^{\star\mathrm{T}}\xrightarrow{X_{\Lambda'_1,\dots,\Lambda'_k}}V_\nabla[\Lambda_l]_{l=1}^n$$

を $X\circ(Y_1\odot\cdots\odot Y_k)\colon V^{\otimes n}\otimes\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}\to V_\nabla[\Lambda_l]_{l=1}^n$ で表す. ただし $\Lambda'_i\coloneqq\Lambda_{N_{i-1}+1}+\cdots+\Lambda_{N_i}$ とおいた. また $X_{\Lambda'_1,\dots,\Lambda'_k}$ は各 $a_i\in\mathbb{K}[\Lambda_l]_{l=N_{i-1}+1}^{N_i-1}$ と $v_i\in V$ $(i\in[k])$ および $f\in\mathcal{O}_k^{\star\mathrm{T}}$ に対し

$$a_1v_1\otimes\cdots\otimes a_kv_k\otimes f\mapsto\pm(a_1\cdots a_k)X_{\Lambda'_1,\dots,\Lambda'_k}(v_1\otimes\cdots\otimes v_k\otimes f),$$

$$\pm\coloneqq\prod_{1\le i<j\le k}(-1)^{p(v_i)p(a_j)}\cdot\prod_{i=1}^k(-1)^{p(a_i)p(X)}$$

とすることで定まる線形写像を表す.

$k, n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}_n^k$ とする．このとき $X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(k)$ と $Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(\nu)$ に対して

$$X \circ (Y_1 \odot \cdots \odot Y_k) \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$$

が成り立つ.

命題 3.13. $\mathfrak{S}$-超加群 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}$ は $X \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k \mapsto X \circ (Y_1 \odot \cdots \odot Y_k)$ を合成写像, $\mathrm{id}_V \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(1)$ を単位元としてオペラッドになる.

定義 3.14. $\mathcal{H}_W$-左超加群 V に対し, オペラッド $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}$ を V 上の $N_W = N$ 超対称カイラルオペラッド ($N_W = N$ SUSY chiral operad) とよぶ.

次の定理 3.15 が本稿の主定理である.

定理 3.15. V を $\mathcal{H}_W$-左超加群とする．このとき

(1) $\mathrm{MC}\big(L(\mathcal{P}_{\Pi^N V}^{\mathrm{ch}N_W})\big)$ の偶なる元 X に対し, 線形写像 $[\cdot_\Lambda \cdot]_X : V \otimes V \to V[\Lambda]$ と $\mu_X : V \otimes V \to V$ を

$$[a_\Lambda b]_X \coloneqq (-1)^{p(a)\overline{N}} X_{\Lambda, -\Lambda-\nabla}(a \otimes b \otimes 1_{\mathbb{K}}),$$
$$\mu_X(a \otimes b) \coloneqq (-1)^{p(a)\overline{N}+\overline{1}} \operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1} X_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a \otimes b \otimes z_{1,2}^{-1})\big) \quad (a, b \in V)$$

により定める．すると $(V, [\cdot_\Lambda \cdot]_X, \mu_X)$ は非単位的 $N_W = N$ 超対称頂点代数である.

(2) 写像 $X \mapsto ([\cdot_\Lambda \cdot]_X, \mu_X)$ は, 全単射

$$\mathrm{MC}\big(L(\mathcal{P}_{\Pi^N V}^{\mathrm{ch}N_W})\big)_{\overline{0}} \xrightarrow{\sim} \{V \text{ 上の非単位的 } N_W = N \text{ 超対称頂点代数の構造}\}$$

を与える.

4 超対称頂点代数のコホモロジー

$N_W = N$ 超対称頂点代数 V に対して V 上の加群に係数をもつコホモロジーを定義し, 低次のコホモロジーの具体的な形を与える．超対称頂点代数の加群の定義は省略する．[NY22, Definition 4.2.2] を参照されたい.

定義 4.1. V を非単位的 $N_W = N$ 超対称頂点代数とし M を V 上の加群とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $C^n(V, M)$ を

$$X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}}\big((V \oplus M)^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}, M_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n\big) \subset \mathcal{P}_{V \oplus M}^{\mathrm{ch}N_W}(n)$$

であり

$$X^\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) X \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n), \quad X(x \otimes f) = 0 \quad (x \in M^{\otimes n},\ f \in \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}})$$

を満たすもの全体がなす $\mathcal{P}_{V\oplus M}^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ の部分線形超空間とする．$C^n(V, M) \subset L^{n-1}(\mathcal{P}_{V\oplus M}^{\mathrm{ch}N_W})$ が成り立つ.

以下 V を非単位的 $N_W = N$ 超対称頂点代数とし M を V 上の加群とする．M の加群構造を

$$V \otimes M \to M[\Lambda], \quad a \otimes x \mapsto a_\Lambda x,$$
$$V \otimes M \to M, \quad a \otimes x \mapsto a \cdot x$$

と表す．定理 3.15 を用いて, 微分 $\partial^n : C^n(V, M) \to C^{n+1}(V, M)$ を定めよう.

線形写像 $[\cdot_\Lambda\cdot]\colon V\oplus M\to (V\oplus M)[\Lambda]$ と $\mu\colon V\oplus M\to V\oplus M$ を，各 $a,b\in V$ と $x,y\in M$ に対し

$$[(a+x)_\Lambda(b+y)]\coloneqq [a_\Lambda b]+a_\Lambda y+x_\Lambda b,\quad \mu((a+x)\otimes(b+y))\coloneqq ab+a\cdot y+x\cdot b$$

とすることで定める．すると $\mathcal{H}_W$-左超加群 $V\oplus M$ はこの $[\cdot_\Lambda\cdot]$ と μ により非単位的 $N_W=N$ 超対称頂点代数をなす．定理 3.15 より，この構造に対応する $\mathrm{MC}\big(L\big(\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W}_{\Pi^N(V\oplus M)}\big)\big)$ の偶なる元が存在する．それを X としよう．

任意の $Y\in C^n(\Pi^N V,\Pi^N M)$ に対し $[X.Y]\in C^{n+1}(\Pi^N V,\Pi^N M)$ であることが分かる．そこで ∂^n を

$$\partial^n\colon C^n(\Pi^N V,\Pi^N M)\to C^{n+1}(\Pi^N V,\Pi^N M),\quad Y\mapsto [X,Y]$$

と定めると $X\square X=0$ より $\partial^{n+1}\circ\partial^n=0$ がしたがう．よってコチェイン複体

$$C^\bullet(\Pi^N V,\Pi^N M)\coloneqq (C^n(\Pi^N V,\Pi^N M),\partial^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

が得られた．これを V の M に係数をもつコチェイン複体とよぶ．$C^\bullet(\Pi^N V,\Pi^N M)$ の n 次のコホモロジーを

$$H^n_{\mathrm{ch}}(\Pi^N V,\Pi^N M)\coloneqq H^n(C^\bullet(\Pi^N V,\Pi^N M))=\operatorname{Ker}\partial^n/\operatorname{Im}\partial^{n-1}$$

と表す．$n=0,1,2$ のコホモロジーは次のようになる．

定理 4.2. V を非単位的 $N_W=N$ 超対称頂点代数とし M を V 上の加群とする．

(1) 0 次のコホモロジーについて

$$H^0_{\mathrm{ch}}(V,M)\cong \mathrm{Cas}(V,M).$$

ただし $\mathrm{Cas}(V,M)$ は Casimir 元 ([NY22, Definition 4.2.8]) 全体のなす線形超空間である．

(2) 1 次のコホモロジーについて

$$H^1_{\mathrm{ch}}(V,M)\cong \mathrm{Der}(V,M)/\mathrm{Inder}(V,M).$$

ただし $\mathrm{Der}(V,M)$ と $\mathrm{Inder}(V,M)$ はそれぞれ V から M への微分全体と内部微分全体 ([NY22, Definition 4.2.10]) のなす線形超空間である．

(3) 2 次のコホモロジーについて，偶部分 $H^2_{\mathrm{ch}}(V,M)_{\bar{0}}$ は M による V の $\mathcal{H}_W$-分裂拡大 ([NY22, Definition 4.2.11]) 全体のなす線形空間と同型である．

参考文献

[BDHK19] B. Bakalov, A. De Sole, R. Heluani, V. G. Kac, *An operadic approach to vertex algebra and Poisson vertex algebra cohomology*, Jpn. J. Math., **14**, 249–342 (2019).

[FBZ04] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, 2nd ed., Math. Surv. Monog., **88**, Amer. Math. Soc., Province RI (2004).

[HK07] R. Heluani, V. G. Kac, *Supersymmetric Vertex Algebras*, Comm. Math. Phys., **271**, 103–178 (2007).

[LV12] J-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren Math. Wiss., **346**, Springer (2012).

[NY22] Y. Nishinaka, S. Yanagida, *Algebraic Operad of SUSY Vertex Algebra*, preprint (2021), arXiv:2209.14617.