Homological representation of braid groups

千葉大学大学院 融合理工学府
根上春 (Haru NEGAMI)

概要

ブレイド群 B_n は，$n-1$ 個の生成元で生成されブレイド関係式を満たすものである．ブレイド群の表現の分類は完了しておらず，既知の表現から新しい既約表現を得る手法の研究は有用である．本講演では，ブレイド群の既知の表現から新しい表現を得る手法である Long-Moody 構成（LM 構成）について概説したのち，その一般化について述べる．また，一般化された LM 構成の応用例として KZ 型方程式のモノドロミー表現との関連について述べる．

1 導入

1.1 ブレイド群

ブレイド群は 1925 年に E. Artin によって代数的に定義された [1]．そして，1962 年に R. H. Fox により n 点の順序なし配置空間の基本群と同型であることが示された [2]．1969 年には J. Birman により，n 点つき閉円盤の写像類群との同型が示された [3]．このように，ブレイド群には様々な解釈があるため，様々な分野への応用が知られている．その中でもブレイド群の表現の分類は未解決であり，ブレイド群の表現の構成方法の研究は重要である．本稿では，ブレイド群の表現の構成方法である Long-Moody 構成に注目し，その一般化を与え，KZ 型方程式のモノドロミー表現との関連に触れる．

定義 1.1 (Artin のブレイド群 B_n)**.** $n > 1$ とする．$n-1$ 個の生成元 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ で生成され，以下のブレイド関係式を満たすものを Artin のブレイド群 B_n という．

[BR1] $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ $(|j-i| > 1)$

[BR2] $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, n-2)$

定義 1.2 (純ブレイド群 P_n)**.** $\Pi\colon B_n \longrightarrow S_n$ の核を純ブレイド群という．

F_n を $x_1, \cdots, x_n$ で生成される階数 n の自由群とする．

定義 1.3 (F_n のブレイド自己同型群 $\widetilde{B_n}$)**.** $\widetilde{f}$ を F_n の自己同型写像とする．$\widetilde{f}$ が以下を満たすとき，ブレイド自己同型という．

1. ある $\mu \in S_n$ が存在して，すべての $i = 1, \cdots, n$ で $\widetilde{f}(x_k)$ が $\widetilde{f}(x_{\mu(k)})$ と F_n で共役.
2. $\widetilde{f}(x_1x_2\cdots x_n) = x_1x_2\cdots x_n$.

定義からわかるようにブレイド自己同型写像の全体は群をなす．これをブレイド自己同型群 $\widetilde{B_n}$ という．そして以下の対応により $\widetilde{B_n}$ は B_n と同型となる．

まず，F_n と B_n の生成元をそれぞれ $x_j, \sigma_i, j = 1, \cdots, n, i = 1, \cdots, n-1$ とするとき，

$$\widetilde{\sigma_i}(x_j) = \begin{cases} x_{i+1} & (j = i) \\ x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1} & (j = i+1) \\ x_j & (j \neq i, i+1) \end{cases}$$

は F_n のブレイド自己同型となる．

このとき，$\sigma_i \mapsto \widetilde{\sigma_i}$ により $\widetilde{B_n}$ は B_n と同型となる．

1.2 Long-Moody 構成

以下，体をひとつ固定し，それを k とする．

Long と Moody [4] は，F_n と B_n の半直積の既知の線形表現から B_n の新しい線形表現を構成する方法（Long-Moody 構成）を与えた．Burau 表現 [5] や，純ブレイド群の表現である Gassner 表現，Hecke 環の表現とも関連の深い Lawrence-Krammer-Bigelow 表現などもこの方法を用いて構成出来ることが知られている．

ここで F_n と B_n の半直積は次の関係式で入れるものとする．F_n と B_n の生成元をそれぞれ $x_j, \sigma_i, j = 1, \cdots, n, i = 1, \cdots, n-1$ とするとき，

$$\sigma_i x_j \sigma_i^{-1} = \begin{cases} x_{i+1} & (j = i) \\ x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1} & (j = i+1) \\ x_j & (j \neq i, i+1) \end{cases} .$$

定理 1.4 (Long-Moody 構成)**.** V を有限次元ベクトル空間とする．

$$\rho\colon F_n \rtimes B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

に対して，

$$\widetilde{\rho}\colon B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V^{\oplus n})$$

を構成できる．

1.3 KZ 型方程式

定義 1.5 (KZ 型方程式)**.** $n > 1$, N を 自然数とし ,$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ とする．

$A_{i,j}$ を $N \times N$ の定数行列とし，以下の常微分方程式の Pfaffian system を KZ 型方程式という．

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{A_{ij}}{z_i - z_j} \right) u$$

更に次の可積分条件を課すものとする．

$$[A_{i,j},\ A_{k,l}] = O\ (\{i,j\} \cap \{k,l\} \neq \emptyset)$$

$$[A_{i,j},\ A_{i,k} + A_{j,k}] = O\ (i \neq j, i \neq k, j \neq k)$$

KZ 型方程式の定義域の基本群は純ブレイド群になる．

$Q_n := \{z_1, \cdots, z_n\}$ とし，$\mathbb{C}$ 上の経路 σ_{ij} を，z_i を基点とし，Q_n の点では z_j のみを内部に含むような反時計回りの単純閉曲線とする．そして，この経路に沿った解析接続を σ_{ij*} と書くとする．このとき解析接続 σ_{ij*} に対応するモノドロミー行列は，方程式の解空間を $\mathcal{U}$ とすると，$\sigma_{ij*}\mathcal{U} = \mathcal{U}M_{ij}$ と書ける．

原岡は，この KZ 型方程式のモノドロミー表現 $(M_{ij})_{1 \leq i < j \leq n-1}$ から新しいモノドロミー表現 $(N_{ij})_{1 \leq i < j \leq n-1}$ を構成する方法を構築した [6]．N_{ij} は M_{ij} の多項式を成分に持つ $n-1 \times n-1$ 行列となる．

2 主結果

2.1 Long-Moody 構成の一般化

廣惠一希氏との共同研究により，Dettweiler-Reiter のコンボリューション [7] により，LM 構成の一般化である，$F_n \rtimes B_n$ の誘導表現を構成する手法を構築した．

定義 2.1 (Dettweiler-Reiter のコンボリューション)**.** V を体を k とする有限次元線形空間とする．

$\lambda \in k^{\times}, F_n$ の生成元を x_i とする．

与えられた $\rho\colon F_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ に対して，

$$\rho^c_\lambda\colon F_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

$$\rho^c_\lambda(x_i)\colon= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \lambda(\rho(x_1)-1) & \cdots & \lambda(\rho(x_{i-1})-1) & \lambda\rho(x_i) & \rho(x_{i+1})-1 & \cdots & \rho(x_n)-1 \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

を Dettweiler-Reiter のコンボリューションという．

定理 2.2. V を体を k とする有限次元線形空間とする．x_i を F_n の生成元とし，$\forall B \subseteq B_n$，$\lambda \in k^{\times}$ とする．このとき，

$$\rho\colon \quad F_n \rtimes B \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

に対して，群準同型 $\widetilde{\rho}^{c}_{\lambda}\colon F_n \rtimes B \longrightarrow \mathrm{GL}(V^{\oplus n})$ を次のようにして構成できる．

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}^{c}_{\lambda}(x_i) :=& \rho^{c}_{\lambda}(x_i)\\ \widetilde{\rho}^{c}_{\lambda}(\sigma_i) :=& \rho(\sigma_i)\end{aligned}$$

2.2 KZ 型方程式との関連

前の章で構成した LM 構成の一般化の応用例を次に示す．原岡によるモノドロミー表現の構成は，KZ 型方程式の定義域の基本群が純ブレイド群であることに注意すると P_n の表現から P_n の誘導表現を構成する方法であるともみなせる．さらに，$P_n \simeq F_{n-1} \rtimes P_{n-1}$ であることから，今回構成した LM 構成の一般化との対応を作ることが出来る．

参考文献

[1] E. Artin. Theorie der zöpfe. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Vol. 4, No. 1, pp. 47–72, Dec 1925.

[2] R. FOX and L. NEUWIRTH. The braid groups. *Mathematica Scandinavica*, Vol. 10, pp. 119–126, 1962.

[3] J. S. Birman. Mapping class groups and their relationship to braid groups. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 2, pp. 213–238, 1969.

[4] D.D. Long. Constructing representations of braid groups. *Communications in Analysis and Geometry*, Vol. 2, No. 2, pp. 217–238, 1994.

[5] W. Burau. Über zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte verkettungen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Vol. 11, No. 1, pp. 179–186, Dec 1935.

[6] Y. Haraoka. Multiplicative middle convolution for kz equations. *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 294, No. 3, pp. 1787–1839, 2020.

[7] M. Dettweiler and S. Reiter. Middle convolution of fuchsian systems and the construction of rigid differential systems. *Journal of Algebra*, Vol. 318, No. 1, pp. 1–24, 2007.