Homogeneous ACM bundles on Grassmannianians of exceptional types

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学・応用数理専攻
中山 勇祐 (Yusuke Nakayama)

Abstract

Picard rank one の等質多様体上の homogeneous arithmetically Cohen-Macaulay (ACM) bundles の分類は A 型の場合 Costa と Miró-Roig によって知られていた. 最近 B, C, D 型の場合は Du, Fang および Ren によって与えられた.

本公演では, 例外型の Picard rank one の等質多様体上の homogeneous ACM bundles の分類に関する結果を紹介する. 応用として, 例外型の Picard rank one の等質多様体上の既約な homogeneous ACM bundles は line bundles のテンソルを除いて有限個であることを紹介する. さらに, Cayley Plane 上の既約な homogeneous bundles がどのような highest weight を持つ時に ACM bundles になるのかを決定する. 時間が許せば Freudenthal variety でも同様の結果を紹介する.

1 等質多様体上の等質 ACM 束の先行研究と今回得られた内容

射影多様体上のベクトル束は長年にわたって研究されてきた. 例えば, Horrocks [3] は標数が 0 である体上の射影多様体上のベクトル束が直線束の直和として分解することとそのベクトル束の中間のコホモロジー群が消えることが同値であることを示した. この結果が確立されてから, 中間のコホモロジー群が消えるようなベクトル束の研究は多くの数学者の注目を集めてきた. Arithmetically Cohen-Macaulay (ACM) 束はそのようなベクトル束の一つである.

定義 1.1. $\iota : X \subset \mathbb{P}^N$ を $\mathcal{O}_X(1) := \iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ をみたす射影多様体とする. X 上のベクトル束 E が *arithmetically Cohen−Macauley (ACM)* とは次の性質をみたすときを言う*:*

$$H^i(X, E(t)) = 0, \text{ where } E(t) := E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(t), \text{ for all } i = 1, \cdots, \dim X - 1 \text{ and } t \in \mathbb{Z}.$$

射影多様体として特に等質多様体の場合を考える. グラスマン多様体上の等質 ACM 束は Costa と Miró-Roig [1] によって分類された. 最近になり B, C, D 型の等方型グラスマン多様体上の等質 ACM 束の分類が Du, Fang および Ren [2] によってなされた.

ここでは, Picard rank one の等質多様体上の等質 ACM 束の分類に関する結果を紹介する. この結果は Costa と Miró-Roig および Du, Fang と Ren の仕事の一般化である. 特に, 証明は統一的に与えて例外型の Picard rank one の等質多様体も含まれていてそれらが新しい. 応用として, Picard rank one の等質多様体上の既約な等質 ACM 束は直線束のテンソルを除いて有限個であることを紹介する. さらに, Cayley Plane や Freudenthal 多様体などを含むいくつかの例外型の等質多様体上の既約な等質ベクトル束ががどのような最高ウェイトを持つ時に ACM 束になるのかを決定する.

2 主結果とその応用と例

2.1 主結果とその応用

G を複素数体上の半単純線形代数群とし, P_{α_k} を単純ルート α_k に付随する極大放物型部分群とする. 等質多様体 G/P_{α_k} 上のベクトル束 E が等質ベクトル束であるとは $E \cong G \times_\rho V$ となるような P_{α_k} の表現 $\rho : P_{\alpha_k} \to GL(V)$ が存在する時をいう. もしこの表現が既約であれば E を既約な等質ベクト

ル束と呼ぶ. 最高ウェイト λ を持つ P_{α_k} の既約表現から生じる既約な等質ベクトル束を E_λ と書く. $\Phi^+_{k,G}$ を以下のように定義する:

$$\Phi^+_{k,G} := \{\alpha \in \Phi^+_G \mid (\varpi_k, \alpha) \neq 0\},$$

ここで Φ^+_G は正ルートの集合で $(,)$ は Killing 形式を表し, ϖ_k は基本ウェイトを表す. 任意の $\alpha \in \Phi^+_{k,G}$ に対して, (ϖ_k, α) を $c_{\alpha,k}$ と書く. さらに, 等質多様体 G/P_{α_k} 上の最高ウェイト λ を持つ任意の既約な等質ベクトル束 E_λ に対して, $T^G_{\lambda,k}$ を次のように定義する:

$$T^G_{\lambda,k} := \left\{ \frac{1}{c_{\alpha,k}}(\lambda + \rho, \alpha) \mid \alpha \in \Phi^+_{k,G} \right\}.$$

任意の正整数 n に対して, $\{1, 2, \cdots, n\}$ を $[1, n]$ で表す. ここで, 技術的ではあるが次の定義を用意する. 等質多様体 G/P_{α_k} 上のベクトル束 E が *initialized* であるとは次の性質をみたすときをいう.

$$H^0(G/P_{\alpha_k}, E(-1)) = 0 \ \text{ and } \ H^0(G/P_{\alpha_k}, E) \neq 0.$$

次の定理が今回の主結果である.

定理 2.1. E_λ を等質多様体 G/P_{α_k} 上の最高ウェイト λ を持つ *initialized* 既約な等質ベクトル束とする. この時, E_λ が *ACM* 束であることと $T^G_{\lambda,k} \cap \mathbb{Z} = [1, M^G_{\lambda,k}]$ を満たすことは必要十分である, ここで $M^G_{\lambda,k}$ は $T^G_{\lambda,k}$ の最大元を表す.

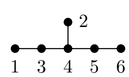
この定理から次の系を得ることができる.

系 2.2. 等質多様体 G/P_{α_k} 上の等質 *ACM* 束は直線束のテンソルを除いて有限個である.

さらに, 定理 2.1 を用いれば Cayley Plane や Freudenthal 多様体などを含むある特定の等質多様体上の既約な等質ベクトル束ががどのような最高ウェイトを持つ時に ACM 束になるのかを決定することができる. 最後の節でそれを紹介する.

2.2 定理 2.1 の例

ここでは, E_6 型に対する $M^{E_6}_{\lambda,k}$ と定理の例を与える. 以下この節では E_6 と書けば以下の Dynkin 図形を持つ単連結な単純線形代数群とする.



単純ルートを以下のように選ぶ.

$$\Delta_{E_6} = \{\alpha_1 := \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8),\ \alpha_2 := \epsilon_1 + \epsilon_2,\ \alpha_i := \epsilon_{i-1} - \epsilon_{i-2}\ (3 \leq i \leq 6)\}.$$

このとき, $M^{E_6}_{\lambda,k}$ は以下で与えられる.

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 + 11 & \text{if } k = 1, 6 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 + 10 & \text{if } k = 2 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_5 + a_6 + 8 & \text{if } k = 3, 5 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 6 & \text{if } k = 4 \end{cases}.$$

例を考察するために, 記号を準備する. $\alpha_{(i_1,\cdots,i_j)}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq 7;\ j \text{ is even.})$ と書けば ϵ_{i_l} $(l = 1, \cdots, j)$ の係数が $-\frac{1}{2}$ であって残りの係数は $\frac{1}{2}$ であるような正ルートとする.

例 2.3. E_λ と E_μ を E_6/P_{α_2} 上の $\lambda = 2\varpi_1 + \varpi_3$ と $\mu = \varpi_4 + \varpi_5$ であるような *initialized* 既約な等質ベクトル束とする. Φ^+_{2,E_6} は $\epsilon_i + \epsilon_j$, $\alpha_{i,j,6,7}$$(1 \leq i < j \leq 5)$ もしくは $\alpha_{6,7}$ から成り, この集合の

濃度は E_6/P_{α_2} の次元と等しいことに注意する．定理の主張を見やすくするために次の行列を導入する．

$$\frac{1}{c_{\alpha,2}}\begin{pmatrix} 0 & (\lambda+\rho,\epsilon_1+\epsilon_2) & (\lambda+\rho,\epsilon_1+\epsilon_3) & (\lambda+\rho,\epsilon_1+\epsilon_4) & (\lambda+\rho,\epsilon_1+\epsilon_5) \\ (\lambda+\rho,\alpha_{1,2,6,7}) & 0 & (\lambda+\rho,\epsilon_2+\epsilon_3) & (\lambda+\rho,\epsilon_2+\epsilon_4) & (\lambda+\rho,\epsilon_2+\epsilon_5) \\ (\lambda+\rho,\alpha_{1,3,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{2,3,6,7}) & 0 & (\lambda+\rho,\epsilon_3+\epsilon_4) & (\lambda+\rho,\epsilon_3+\epsilon_5) \\ (\lambda+\rho,\alpha_{1,4,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{2,4,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{3,4,6,7}) & 0 & (\lambda+\rho,\epsilon_4+\epsilon_5) \\ (\lambda+\rho,\alpha_{1,5,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{2,5,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{3,5,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{4,5,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{6,7}) \end{pmatrix}$$

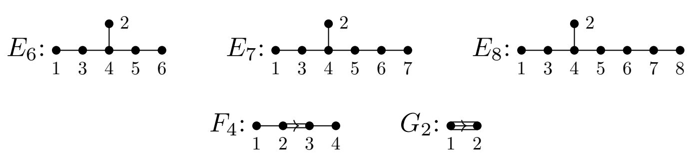
ここで α は各行列の成分に現れる *pairing* の中に含まれる Φ^+_{2,E_6} の正ルートを表す．この行列と $T^{E_6}_{\lambda,2}$ を同一視する．E_μ に関しても同様に考える．このとき，

$$T^{E_6}_{\lambda,2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 14 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 13 & 11 & 0 & 6 & 7 \\ 12 & 10 & 9 & 0 & 8 \\ 11 & 9 & 8 & 7 & \frac{15}{2} \end{pmatrix},\ T^{E_6}_{\mu,2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 15 & 0 & 4 & 6 & 7 \\ 13 & 12 & 0 & 8 & 9 \\ 11 & 10 & 8 & 0 & 11 \\ 10 & 9 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

である．E_λ について，$M^{E_6}_{\lambda,2}=14$ であって *(* $T^{E_6}_{\lambda,2}$ の行列要素を再び集合の要素として見て *)* $T^{E_6}_{\lambda,2}\cap\mathbb{Z}=[1,M^{E_6}_{\lambda,2}]$ であることが確認できる．したがって定理 *2.1* より，E_λ は *ACM* 束である．一方，$M^{E_6}_{\mu,2}=15$ であって $2,14\notin T^{E_6}_{\mu,2}\cap\mathbb{Z}$ であるから $T^{E_6}_{\mu,2}\cap\mathbb{Z}\neq[1,M^{E_6}_{\mu,2}]$ であることがわかる．したがって定理 *2.1* より，E_μ は *ACM* 束ではない．

3　いくつかの例外型の等質多様体上の等質 ACM 束の決定

最後にこの節では定理 2.1 の系として，ある特定の等質多様体上の既約な等質ベクトル束ががどのような最高ウェイトを持つ時に ACM 束になるのかを決定できるという結果を紹介する．以下 G は以下のいずれかの Dynkin 図形を持つ単連結な単純線形代数群とする．



3.1　Cayley Plane

まずは Cayley Plane E_6/P_{α_1} 上の等質 ACM 束を決定する．

系 3.1. E_λ を *Cayley Plane* E_6/P_{α_1} 上の最高ウェイト $\lambda=\sum_{i=1}^6 a_i\varpi_i$ を持つ *initialized* 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が *ACM* 束であるためには $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ が $(0,0,0,0,i,j)$ と等しいことが必要十分である，ここで $i=0,1$ *and* $j=0,1,2,3$.

3.2　Freudenthal 多様体

次に Freudenthal 多様体 E_7/P_{α_7} 上の等質 ACM 束を決定する．

系 3.2. E_λ を *Freudenthal* 多様体 E_7/P_{α_7} 上の $\lambda=\sum_{i=1}^7 a_i\varpi_i$ をもつ *initialized* 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が *ACM* 束であることと $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ が $(0,i,0,0,0,0,0)$ と等しいことが必要十分である，ここで $i=0,1,2$.

3.3 E_8 型

ここでは単純ルート α_8 に付随する放物型部分群で割った等質多様体 E_8/P_{α_8} を考えよう．このとき，次の結果が得られた．

系 3.3. *E_λ を等質多様体 E_8/P_{α_8} 上の $\lambda = \sum_{i=1}^{8} a_i\varpi_i$ をもつ initialized 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が ACM 束であることと $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ が $(i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(i, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(j, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ もしくは $(0, k, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ と等しいことが必要十分である，ここで $0 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 4$ そして $1 \leq k \leq 2$.*

3.4 F_4 型

等質多様体 F_4/P_{α_1} 上の等質 ACM 束に関しても定理 2.1 を用いれば決定することができる．

系 3.4. *E_λ を等質多様体 F_4/P_{α_1} 上の $\lambda = \sum_{i=1}^{4} a_i\varpi_i$ をもつ initialized 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が ACM 束であることと (a_1, a_2, a_3, a_4) が $(0, 0, 0, i)$ もしくは $(0, 0, 1, j)$ と等しいことが必要十分である，ここで $0 \leq i \leq 4$, $j = 0, 1, 2, 3, 5$.*

3.5 G_2 型

最後に G_2 型について考察する．G_2/P_{α_k} 上の等質 ACM 束に関しては k が 1 もしくは 2 のどちらの場合でも決定することができる．

系 3.5. *E_λ を等質多様体 G_2/P_{α_1} 上の $\lambda = a_1\varpi_1 + a_2\varpi_2$ をもつ initialized 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が ACM 束であることと $a_1 = a_2 = 0$ であることは必要十分である．*

系 3.6. *E_λ を等質多様体 G_2/P_{α_2} 上の $\lambda = a_1\varpi_1 + a_2\varpi_2$ をもつ initialized 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が ACM 束であることと $a_1 = 0, 1$ or 2 かつ $a_2 = 0$ であることは必要十分である．*

References

[1] L. Costa and R. Maria Miró-Roig, Homogeneous ACM bundles on a Grassmannian, *Advances in Mathematics*, 289:95 − 113, 2016.

[2] R. Du, X. Fang, and P. Ren, Homogeneous ACM bundles on isotropic Grassmannians, arXiv:2206.09172v1.

[3] G. Horrocks, Vector bundles on the punctured spectrum of local ring, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(4):689 − 713, 1964.

[4] Y. Nakayama, Arithmetically Cohen–Macaulay bundles on homogeneous varieties of Picard rank one, arXiv:2211,00950v2.