非整数階時間微分を含む非線形抽象発展方程式の可解性とその応用

東北大学大学院理学研究科数学専攻
中島慶人 (Yoshihito NAKAJIMA)

概要

整数階微積分学ではライプニッツ則や連鎖律など多くの計算公式が古典的な微分法と比べて複雑化するため, 応用上さまざまな困難をもたらす. 特にヒレ・吉田の定理やブレジス・高村理論に代表される古典的な発展方程式の理論と比べると, 非整数階時間微分作用素を伴う抽象発展方程式の研究は未だ発展途上にあると言える. 本稿では, 非整数階時間微分作用素を含む実ヒルベルト空間上の非凸汎関数に対する勾配流型発展方程式の可解性について考え, その応用例として非整数階時間偏微分作用素を含む爆発項付きの退化放物型方程式に対する初期値境界値問題の可解性について論じる. 本発表は赤木剛朗教授（東北大学）との共同研究に基づく.

1 導入

本稿では, 実ヒルベルト空間 H に於ける次の非線形発展方程式の可解性について考える.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t)+\partial\varphi(u(t))-\partial\psi(u(t))\ni f(t),\quad 0<t<T. \tag{P}$$

ただし, $\partial\varphi,\partial\psi : H\to 2^H$ はそれぞれ適正 ($\varphi,\psi\not\equiv+\infty$) 下半連続凸汎関数 $\varphi,\psi : H\to[0,+\infty]$ の劣微分作用素 (定義 3.1 参照) を表し, $u_0\in D(\varphi)$, $T>0$, $f\in L^2(0,T;H)$ とする. 以後, 作用素 $A:X\to 2^Y$ とグラフ $G(A)\subset X\times Y$ を同一視する. また非整数階時間微分作用素を例として含むように, 積分核 $k=k(t)$ は次の仮定をみたすものとする:

(A.0) 関数 k は $L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ に属する非負値単調非増加関数とし, さらにある非負値単調非増加関数 $\ell\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ が存在して $k*\ell\equiv 1$ が成り立つ (以後, この条件を $(k,\ell)\in P.C.$ とあらわすことにする).

ただし, 合成積 $*$ は次により定義する.

$$(f*g)(t):=\int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s\quad\text{for}\ \ t>0. \tag{1}$$

仮定 (A.0) を満たす積分核 k (および ℓ) の具体例としては, 以下が挙げられる: $\alpha\in(0,1)$ に対して

$$k(t)=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\quad \ell(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\quad\text{for}\ \ t>0.$$

このとき対応する微分作用素 $(d/dt)[k*(u-u_0)]$ は α 階のリーマン・リュービル微分 $\partial_t^\alpha(u-u_0)$ と一致する.

論文 [1] では, いわゆる Brézis-高村理論と呼ばれるヒルベルト空間上の凸汎関数に対する勾配流方程式に関する理論を非整数階時間微分を含む問題 (すなわち $\psi \equiv 0$ の場合) へと拡張し, その応用例として非整数階時間微分を含む非線形拡散方程式や Allen-Cahn 方程式の時間大域的適切性を証明した. しかし, [1] では対応する汎関数が λ-convex である場合に制限されているため, 汎関数が λ-convex にならない場合 (たとえば爆発項を伴うような問題) は扱えていなかった. それゆえ解が有限時間で爆発しうるような場合は適用範囲に含まれない. 一方, 時間微分が 1 階の古典的な場合については, 論文 [4] の結果が知られており, そこで得られた結果は p-Laplacian を含む爆発項付きの放物型方程式の時間局所可解性の証明に応用されている. 本研究では, [4] の結果を非整数階時間微分を含む問題 (P) へ拡張し, それを非整数階時間微分を含む爆発項付き退化放物型方程式に対する初期値境界値問題に応用することを目的とする.

2 主結果

問題 (P) の強解を次のように定義する.

定義 2.1 ((P) の強解)**.** 与えられた関数 $f \in L^2(0,T;H)$, $u_0 \in D(\varphi)$ および $S \in (0,T]$ に対して, 次の 2 つの条件が成立するとき, $u \in L^2(0,S;H)$ を $[0,S]$ における問題 (P) の**強解**と呼ぶ.

(i) $k * (u - u_0) \in W^{1,2}(0,S;H)$ であり, $[k * (u-u_0)](0) = 0$ が成り立つ.

(ii) ほとんどすべての $t \in (0,S)$ に対して $u(t) \in D(\partial\varphi) \cap D(\partial\psi)$ であり, また次をみたすような $g_1, g_2 \in L^2(0,S;H)$ が存在する:
- ほとんどすべての $t \in (0,S)$ に対して $g_1(t) \in \partial\varphi(u(t))$, $g_2(t) \in \partial\psi(u(t))$ が成り立つ.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[k * (u-u_0)] + g_1 - g_2 = f \quad \text{in } L^2(0,S;H)$ が成り立つ.

次に主結果で用いる仮定を導入する. ただし, 証明の概略を簡単にするため, 少し強い仮定を導入する.

(A.1) 任意の実数 L に対して, 集合 $\{u \in H : \varphi(u) \le L\}$ は H の強位相に関してコンパクトである.

(A.2) $D(\partial\varphi) \subset D(\partial\psi)$ が成り立つ. さらに, 次をみたすような定数 $\nu_1 \in [0,1)$ および単調増加関数 $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ が存在する.

$$|\partial\mathring{\psi}(u)|_H \le \nu_1 |\partial\mathring{\varphi}(u)|_H + M(\varphi(u)) \quad \text{for all} \quad u \in D(\partial\varphi).$$

ただし $\partial\mathring{\varphi}(u)$, $\partial\mathring{\psi}(u)$ はそれぞれ $\partial\varphi(u)$, $\partial\psi(u)$ の minimal section すなわち, $\partial\mathring{\varphi}(u)$ は $\partial\varphi(u)$ の元で H のノルムを最小にするものである (その存在, 一意性は命題 3.3 参照).

(A.3) $D(\varphi) \subset D(\psi)$ が成り立つ. さらに, 次をみたすような定数 $\nu_2 \in [0,1)$, $C > 0$, $\beta \in [0,2)$ が存在する.

$$\psi(u) \le \nu_2 \varphi(u) + C(|u|_H^\beta + 1) \quad \text{for all} \quad u \in D(\varphi).$$

主結果は以下のとおりである.

定理 2.1 (時間局所解の存在)**.** 仮定 (A.0), (A.1), (A.2) が成立するとき, 任意の $u_0 \in D(\varphi)$, およ

び $\ell * |f|_H^2 \in L^\infty(0,T)$ をみたす $f \in L^2(0,T;H)$ に対して, ある $0 < T_0 \le T$ が存在し, $[0,T_0]$ における (P) の強解 $u \in L^2(0,T_0;H)$ が存在する.

定理 2.2 (時間大域解の存在)**.** 仮定 (A.0), (A.1), (A.2), (A.3) が成立するとき, 任意の $u_0 \in D(\varphi)$ および $f \in W^{1,2}(0,T;H)$ に対して, $[0,T]$ における (P) の強解 $u \in L^2(0,T;H)$ が存在する.

次に定理 2.1 および定理 2.2 の偏微分方程式への応用例について述べる. まず $\alpha \in (0,1)$, $1 < p,q < \infty$ とし, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ はなめらかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とする. 次の初期値境界値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha\big(u-u_0\big)(t,x) - \Delta_p u(t,x) - |u(t,x)|^{q-2}\, u(t,x) = f(t,x), & (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \\ u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T)\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{PP}$$

ここで ∂_t^α は α 階のリーマン・リュービル微分を表し, また $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ は p-Laplace 作用素とする. 上で述べた主結果を応用することで次の結果が得られる.

定理 2.3. $1 < p,q < \infty$ かつ $p^* > 2$, $q \le (p^*/2)+1$ とする. ただし $p^* = Np/(N-p)_+$ はソボレフ臨界指数とする. このとき, 任意の $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, および $\ell * |f|_{L^2(\Omega)}^2 \in L^\infty(0,T)$ をみたす $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ に対して, 以下が成立する.

(i) ある $T_0 \in (0,T]$ が存在し, $[0,T_0]$ における (PP) の強解 $u \in L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$ が存在する.

(ii) 特に $q < p$ および $f \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ が成立するとき, $[0,T]$ における (PP) の強解 $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ が存在する.

また $p=2$ の場合, 仮定 $q \le (2^*/2)+1$ をソボレフ劣臨界条件 $q < 2^*$ に置き換えても, 上の主張が成立する.

3 準備

3.1 劣微分作用素

定義 3.1. 実ヒルベルト空間 H における適正 $(\varphi \not\equiv \infty)$ 下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty,+\infty]$ に対して, 次をみたす多価作用素 $\partial\varphi \subset H \times H$ を φ の **劣微分作用素** と呼ぶ.

$$\partial\varphi = \{[w,\xi] \in H\times H : 任意の\ z \in H\ に対して\ \varphi(z)-\varphi(w) \ge (\xi, z-w)_H\}.$$

また, $D(\varphi) := \{u \in H : \varphi(u) < \infty\}$, $D(\partial\varphi) := \{u \in H : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$ とする.

劣微分作用素の例として, 次の例が挙げられる.

例 3.1 ([2], Proposition 2.7, Theorem 2.18)**.** $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界開集合, $p,q \in (1,\infty)$ とする. また, $\varphi_p, \psi_q : L^2(\Omega) \to [0,\infty]$ を以下の適正下半連続凸関数とする.

$$\varphi_p(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x & \text{if } u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad \psi_q(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}\displaystyle\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x & \text{if } u \in L^q(\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき, φ_p, ψ_q の劣微分作用素 $\partial\varphi_p$, $\partial\psi_q$ は $D(\partial\varphi_p) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) : -\Delta_p u \in L^2(\Omega)\}$, $D(\partial\psi_q) = L^{2(q-1)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ であり, 次をみたす作用素となる.

$$\partial\varphi_p(u) = \{-\Delta_p u\} \quad \text{if } u \in D(\partial\varphi_p), \quad \partial\psi_q(u) = \{|u|^{q-2}u\} \quad \text{if } u \in D(\partial\psi_q).$$

まず, 次の命題が成立することが知られている.

命題 3.1 ([2], Proposition 1.1)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して, 次をみたすような $a \in H$, $b \in \mathbb{R}$ が存在する.

$$\varphi(u) \geq (a, u)_H + b \quad \text{for all} \quad u \in H.$$

命題 3.2 ([2], Theorem 2.10)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi, \psi : H \to (-\infty, \infty]$ に対して $D(\varphi) \cap \mathrm{int}D(\psi) \neq \emptyset$ とする. このとき, $D(\partial(\varphi + \psi)) = D(\partial\varphi) \cap D(\partial\psi)$ であり, 次の性質をみたす.

$$\partial(\varphi + \psi)(u) = \partial\varphi(u) + \partial\psi(u) := \{v_1 + v_2 : v_1 \in \partial\varphi(u),\ v_2 \in \partial\psi(u)\} \quad \text{for all} \quad u \in H.$$

注意 3.1. 適正下半連続凸関数 $\varphi, \psi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して, 命題 3.1 より, 次をみたすような $a_1, a_2 \in H$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ が存在する.

$$\begin{aligned} \varphi(u) &\geq (a_1, u)_H + b_1 \quad \text{for all} \quad u \in H, \\ \psi(v) &\geq (a_2, v)_H + b_2 \quad \text{for all} \quad v \in H. \end{aligned}$$

ここで, $L_1(\cdot) := -(a_1, \cdot)_H - b_1$, $L_2(\cdot) := -(a_2, \cdot)_H - b_2$, $\widehat{\varphi} := \varphi + L_1$, $\widehat{\psi} := \psi + L_2$ とする. このとき, 適正下半連続凸関数 L_1, L_2 の劣微分作用素 ∂L_1, ∂L_2 は $D(\partial L_1) = D(\partial L_2) = H$ であり, 次をみたす作用素となる.

$$\partial L_1(u) = \{-a_1\} \quad \text{for all } u \in H, \quad \partial L_2(v) = \{-a_2\} \quad \text{for all } v \in H.$$

命題 3.2 より適正下半連続凸関数 $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} : H \to [0, \infty]$ の劣微分作用素 $\partial\widehat{\varphi}, \partial\widehat{\psi}$ は $D(\partial\widehat{\varphi}) = D(\partial\varphi)$, $D(\partial\widehat{\psi}) = D(\partial\psi)$ であり $\partial\widehat{\varphi} = \partial\varphi + \{-a_1\}$, $\partial\widehat{\psi} = \partial\psi + \{-a_2\}$ をみたす. 従って, $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}$ および $\widehat{f} := f - a_1 - a_2$ に対して定理 2.1, 定理 2.2 を適用することにより, 非負値とは限らない適正下半連続凸関数 $\varphi, \psi : H \to (-\infty, \infty]$ に対しても定理 2.1, 定理 2.2 が成立する.

また, 適正下半連続凸関数の劣微分作用素は極大単調作用素であることが知られている ([2], Theorem 2.8 参照). 極大単調作用素の理論を用いることにより, 次の命題が成り立つ.

命題 3.3 ([2], Proposition 2.1)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ の劣微分作用素 $\partial\varphi$ は次の性質をみたす.

任意の $u \in D(\partial\varphi)$ に対して, H の部分集合 $\partial\varphi(u)$ は凸集合かつ閉集合である.

特に, ヒルベルト空間の性質から, 任意の $u \in D(\partial\varphi)$ に対して $\partial\varphi(u)$ の minimal section $\partial\mathring{\varphi}(u)$ が一意に存在する.

命題 3.4 ([2], Theorem 2.9)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ と任意の $\lambda > 0$ に対して, $\varphi_\lambda : H \to (-\infty, \infty]$ を以下の関数とする (関数 φ_λ を φ のモロー・吉田正則化と呼ぶ).

$$\varphi_\lambda(u) := \inf\left\{\varphi(v) + \frac{1}{2\lambda}|v - u|_H^2 : v \in H\right\} \quad \text{for } u \in H.$$

このとき, φ_λ は次の性質をみたす.

(i) φ_λ は凸であり, H 上全体でフレシェ微分可能である.

(ii) 任意の $u \in H$, $\lambda > 0$ に対して, $\varphi(J_\lambda u) \leq \varphi_\lambda(u) \leq \varphi(u)$ である. ただし $J_\lambda = (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}$ とする. また $\lambda \to +0$ とすると, $\varphi_\lambda(u) \to \varphi(u)$ となる.

(iii) 任意の $\lambda > 0$ に対して, $\partial(\varphi_\lambda)(u) = \{\varphi'_\lambda(u)\}$, $|\varphi'_\lambda(u)|_H \leq |\partial\mathring{\varphi}(u)|_H$ である. ここで, $\varphi'_\lambda(u)$ は点 u における φ_λ のフレシェ微分である. また, $\partial\varphi$ の吉田近似 $(\partial\varphi)_\lambda$ と φ_λ の劣微分作用素 $\partial(\varphi_\lambda)$ は一致する (以後, $\partial(\varphi_\lambda)(u)$ の括弧を省略して $\partial\varphi_\lambda(u)$ と書く. また, $\partial\varphi_\lambda$ を多価関数ではなく関数 $\partial\varphi_\lambda : H \to H$ と同一視する).

(iv) 任意の $\lambda > 0$ に対して, $\partial\varphi_\lambda : H \to H$ はリプシッツ連続である.

(v) 任意の点列 $v_n = \partial\varphi_{1/n}(u_n)$ および $(u,v) \in H \times H$ に対して, u_n が u に H 上で強収束し, v_n が v に H 上で弱収束するならば, $(u,v) \in \partial\varphi$ となる.

劣微分作用素の吉田近似の例として, 次の例が挙げられる.

命題 3.5 ([5], IV.Example 2.C)**.** 測度有限な可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$, 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して, $\Psi^\varphi : L^2(\Omega; H) \to (-\infty, +\infty]$ を以下の適正下半連続凸関数とする.

$$\Psi^\varphi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \varphi(u(x))\,\mathrm{d}x & \text{if } \varphi(u(\cdot)) \in L^1(\Omega), \\ +\infty & \text{if } \varphi(u(\cdot)) \notin L^1(\Omega). \end{cases}$$

このとき, Ψ^φ は次の性質が成り立つ.

(i) 任意の $\lambda > 0$ に対して, 適正下半連続凸関数 Ψ^φ のモロー・吉田正則化 Ψ^φ_λ は次をみたす関数となる.

$$\Psi^\varphi_\lambda(u) = \int_\Omega \varphi_\lambda(u(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{for all} \quad u \in L^2(\Omega; H).$$

また, 劣微分作用素 $\partial\Psi^\varphi$ の吉田近似 $\partial\Psi^\varphi_\lambda$ は次をみたす作用素となる.

$$\partial\Psi^\varphi_\lambda(u) = \varphi_\lambda(u(\cdot)) \quad \text{for all} \quad u \in L^2(\Omega; H).$$

(ii) 劣微分作用素 $\partial\Psi^\varphi$ は次をみたす作用素となる.

$$\partial\Psi^\varphi(u) = \{g \in L^2(\Omega; H) : g(x) \in \partial\varphi(u(x)) \text{ for a.e. } x \in \Omega\} \quad \text{for all } u \in L^2(\Omega; H).$$

3.2 連鎖律

通常の 1 階微分の場合, 次の凸汎関数に関する連鎖律がよく知られている.

命題 3.6 ([5], IV Lemma 4.3)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to [0, \infty]$ と $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ に対して, $g_u(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたす $g_u \in L^2(0,T;H)$ が存在するとする. このとき, $\varphi(u(\cdot)) \in W^{1,1}(0,T)$ であり, 次の等式が成立する.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(u(t)) = \left(h, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right)_H \quad \forall\, h \in \partial\varphi(u(t)) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

非整数階時間微分のように合成積を伴う微分の場合, 次の連鎖律が成り立つ.

命題 3.7 ([1], Proposition 3.4)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して, $u_0 \in D(\varphi)$ とする. また $k \in W^{1,1}(0,T)$ は $k(t) \geq 0, k'(t) \leq 0$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたすとする. さらに $u, g \in L^2(0,T;H)$ は $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$ および $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたすとする. このとき, 次の不等式が成立する.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u-u_0)](t), g(t)\right)_H \geq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[k*(\varphi(u(\cdot))-\varphi(u_0))\big](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

しかし非整数階時間微分を考える場合, 考える積分核 k_α は非負かつ非増加であるが, 原点で特異性を持つためソボレフ空間 $W^{1,1}(0,T)$ の元にならず, 上の命題をそのまま適用することができない. しかし, 増大作用素の理論, および completely positive kernel の理論を用いることにより, 命題 3.7 と同等の不等式を得ることができる.

3.3 増大作用素

定義 3.2. 実バナッハ空間 X に対し, 次をみたす多価作要素 $A \subset X \times X$ を A の **増大作用素** と呼ぶ.

$$|x_1 - x_2|_X \leq |(x_1 + \alpha y_1) - (x_2 + \alpha y_2)|_X \quad \text{for all } \ [x_1, y_1] \in A,\ [x_2, y_2] \in A,\ \alpha > 0.$$

さらに, 増大作用素 $A \subset X \times X$ が次をみたすとき, A を **m-増大作用素** と呼ぶ.

任意の $\alpha > 0$, $w \in X$ に対して, $w = x + \alpha y$ をみたすような $[x, y] \in A$ が存在する.

また, $D(A) = \{u \in X : Au \neq \emptyset\}$ とする.

定義 3.3. 任意の $\lambda > 0$, m-増大作用素 A に対して, $J_\lambda^A : X \to D(A)$, $A_\lambda : X \to X$ を以下の作用素とする.

$$J_\lambda^A(u) := (I + \lambda A)^{-1}(u) \quad \text{for all } u \in X, \quad A_\lambda := \frac{1}{\lambda}\left(I - J_\lambda^A\right)(u) \quad \text{for all } u \in X.$$

ここで, $I : X \to X$ は恒等写像とする.

命題 3.8 ([5], IV Proposition 7.1, IV Proposition 7.2)**.** m-増大作用素 $A \subset X \times X$ は次の性質をみたす.

(i) 任意の $u \in X$, $\lambda > 0$ に対して, $A_\lambda u \in A(J_\lambda^A u)$ である.
(ii) 任意の $u \in \overline{D(A)}^X$ に対して, $\lim_{\lambda \to +0} J_\lambda^A(u) = u$ である.
(iii) グラフ $A \subset X \times X$ は閉である. 特に A が線形作用素のとき, グラフ A が凸集合となるため弱閉となり次が成立する.

任意の数列 $(u_n, v_n) \in A$ および $(u, v) \in X \times X$ に対して,
u_n が u に弱収束し, v_n が v に弱収束するならば $(u, v) \in A$ である.

3.4 Completely positive kernels

まず, 次の命題が成り立つことが知られている.

命題 3.9 ([3], Theorem 2.2)**.** $(k,\ell) \in P.C.$ とする. 任意の $\lambda > 0$ に対して, $s_\lambda \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ を次のボルテラ方程式の解とする.

$$s_\lambda + \lambda(\ell * s_\lambda) = 1.$$

このとき, $s_\lambda \geq 0$, $s'_\lambda \leq 0$ をみたす. 特に, $k_\lambda := \lambda s_\lambda \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ とすると $k_\lambda \geq 0$, $k'_\lambda \leq 0$ となる.

ここで, X を実バナッハ空間, $1 \leq p \leq \infty$ とし, 線形作用素 $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset L^p(0,T;X) \to L^p(0,T;X)$ を次で定める.

$$\begin{aligned} &D(\mathcal{B}) := \{v \in L^p(0,T;X) : k * v \in W^{1,p}(0,T;X),\ k * v(0) = 0\}, \\ &\mathcal{B}v := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k * v) \quad \text{for } v \in D(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

このとき, 命題 3.9 から次の事実が成り立つ. 特に, $\mathcal{B}$ は m-増大作用素となる.

- 任意の $f \in L^p(0,T;X)$ に対して, $J_\lambda(f) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ell * k_\lambda * f]$ とすると, $J_\lambda(f) + \dfrac{1}{\lambda}J_\lambda(f) = f$.
- 任意の $f, g \in L^p(0,T;X)$ に対して, $|J_\lambda(f) - J_\lambda(g)|_{L^p(0,T;X)} \leq |f - g|_{L^p(0,T;X)}$.

従って, 命題 3.8 より, 次の命題が従う.

命題 3.10 ([1], Section 3)**.** 実バナッハ空間 X, $1 \leq p \leq \infty$, $(k,\ell) \in P.C.$ とする. また, $v \in L^p(0,T;X)$ であり, $k * v \in W^{1,p}(0,T;X)$ かつ $(k * v)(0) = 0$ とする. このとき,

$$k_n \to k \quad \text{in } L^1(0,T), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k_n * v] \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k * v] \text{ in } L^p(0,T;X).$$

また, 任意の点列 $u_n \in D(\mathcal{B})$ および $v_n := \mathcal{B}u_n$ に対して, u_n が u に $L^p(0,T;X)$ 上で弱収束し, v_n が v に $L^p(0,T;X)$ 上で弱収束するならば, $u \in D(\mathcal{B})$ であり, $v = \mathcal{B}u$ となる.

命題 3.7 および命題 3.10 を組み合わせることにより, 次の主張が成立する.

命題 3.11. 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to [0,+\infty]$ に対して, $u_0 \in D(\varphi)$, $(k,\ell) \in P.C.$ とする. さらに, $u \in L^2(0,T;H)$ が $k * (u - u_0) \in W^{1,2}(0,T;H)$, $[k * (u - u_0)](0) = 0$, $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$ をみたすとする. また, $g(t) \in L^2(0,T;H)$ が $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたすとする. このとき, 次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} &\left[\ell * \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[k * (u - u_0)](\cdot), g(\cdot)\right)_H\right](t) \geq \varphi(u(t)) - \varphi(u_0) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T), \\ &\int_0^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[k * (u - u_0)](s), g(s)\right)_H \mathrm{d}s \geq [k * (\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0))](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T). \end{aligned}$$

3.5 強コンパクト性定理

強収束する部分列が存在することを保証するために, 次の命題を用いる.

命題 3.12 ([6], Theorem 1)**.** X を実バナッハ空間とし, $1 \leq p < \infty$ とする. また, 集合 $\mathcal{F} \subset L^p(0,T;X)$ が次の性質をみたすとする.

(i) $\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(s)\,\mathrm{d}s : f \in \mathcal{F}, 0 < t_1 < t_2 < T\right\}$ は X 上で相対コンパクトである.

(ii) $|f(t+h) - f(t)|_{L^p(0,T-h;X)} \to 0 \quad \text{as} \quad h \to +0 \quad \text{uniformly in } f \in \mathcal{F}.$

このとき, $\mathcal{F}$ は $L^p(0,T;X)$ 上で相対コンパクトである.

4 証明の概略

定理 2.3 は, 定理 2.1, 定理 2.2 に例 3.1 を適用して得られる結果であるため, ここでは時間局所解の存在に関する定理 2.1 および時間大域解の存在に関する定理 2.2 の証明のみについて述べる.

4.1 定理 2.1 の証明の概略

まず, 近似方程式の可解性を証明する. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次の問題 (P) にあらわれる劣微分作用素 $\partial\psi$ をその吉田近似 $\partial\psi_{1/n}$ によって近似した問題 (P_n) の可解性を考える.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u - u_0)\right](t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi_{1/n}(u(t)) \ni f(t), \quad 0 < t < T. \tag{P_n}$$

すると, (P_n) の可解性を証明することができる.

補題 4.1. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次をみたす $(u_n, \xi_n) \in L^\infty(0,T;H) \times L^2(0,T;H)$ が一意に存在する.

$$\begin{aligned}
&k * (u_n - u_0) \in W^{1,2}(0,T;H),\ \left[k * (u_n - u_0)\right](0) = 0, \\
&\varphi(u_n) \in L^\infty(0,T), \\
&\xi_n(t) \in \partial\varphi(u_n(t)) \qquad \text{for a.e. } t \in (0,T), \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u_n - u_0)\right] + \xi_n - \partial\psi_{1/n}(u_n) = f.
\end{aligned} \tag{2}$$

つぎに, ア・プリオリ評価を行う. 方程式 (2) の両辺に ξ_n をかけ, ℓ と合成積をとると, 次の等式が得られる.

$$\ell * \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u_n - u_0)\right], \xi_n\right)_H + \ell * |\xi_n|_H^2 - \ell * \left(\partial\psi_{1/n}(u_n), \xi_n\right)_H = \ell * (f, \xi_n)_H$$

for a.e. $t \in (0,T)$. ここで, 仮定 (A.2) と命題 3.4 より, 次の不等式が成立する.

$$|\partial\psi_{1/n}(u_n)|_H \leq \nu_1|\xi_n|_H + M(\varphi(u_n)).$$

また命題 3.11 で述べたように, 次の連鎖律不等式が成立する.

$$\varphi(u_n(t)) - \varphi(u_0) \leq \left[\ell * \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[k*(u_n - u_0)], \xi_n\right)_H\right](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

ヘルダーの不等式を用いて変形を行うことにより, 次が得られる.

$$\begin{cases} \exists C_0 \in [0,\infty),\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \varphi(u_n) + \ell * |\xi_n|_H^2 \leq C_0\left(1 + \left(\ell * \left[M(\varphi(u_n))\right]\right)\right) \text{ for a.e. } t \in (0,T). \end{cases} \tag{3}$$

ここで, (3) から, $\varphi(u_n)$ の局所有界性を証明することができる.

$$\exists T_0 \in (0,T],\ \exists C \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad |\varphi(u_n(\cdot))|_{L^\infty(0,T_0)} \leq C.$$

さらに, $\varphi(u_n)$ の局所有界性, (2), (3) から次のア・プリオリ評価が成立する.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\ell * |\xi_n|_H^2\right|_{L^\infty(0,T_0)} < \infty,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|_{L^2(0,T_0;H)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |k * \ell * |\xi_n|_H^2|_{L^\infty(0,T_0)} < \infty.$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\partial\psi_{1/n}(u_n)|_{L^2(0,T_0;H)} < \infty,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |(d/dt)\left[k*(u_n - u_0)\right]|_{L^2(0,T_0;H)} < \infty.$$

特に, $G_n := f - \partial\psi_{1/n}(u_n) - \xi_n \in L^2(0,T_0;H)$ とすると, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |G_n|_{L^2(0,T_0;H)} < \infty$ である. 最後に, 近似解の収束を証明する. 次の同程度連続性が, G_n の評価および (2) から得られる.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n(\cdot + h) - u_n(\cdot)|_{L^2(0,T_0-h;H)} \to 0 \quad \text{as } h \to +0.$$

また, 上のア・プリオリ評価と仮定 (A.1) を用いることにより, 次の事実が成り立つ.

$$\left\{\int_{t_1}^{t_2} u_n(s)\,\mathrm{d}s : n \in \mathbb{N}, 0 < t_1 < t_2 < T_0\right\} \text{ は } H \text{ 上で相対コンパクトである.}$$

従って, 命題 3.12 から強収束する部分列が存在する.

$$\exists u \in L^2(0,T_0;H),\ \exists \{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{u_n\}_{n=1}^\infty\ u_{n_k} \to u \ \text{ in } L^2(0,T_0;H).$$

ここで命題 3.4, 命題 3.5, 命題 3.10 を用いると, u が $[0,T_0]$ における (P) の強解であることを示すことができる.

4.2 定理 2.2 の証明の概略

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次の (P) にあらわれる劣微分作用素 $\partial\psi$ を $\partial\psi_{1/n}$ により近似をし, さらに $(1/n)(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(u-u_0)$ を加えた近似問題 (P''_n) の可解性を考える.

$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_n - u_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi_{1/n}(u(t)) \ni f(t), \quad 0 < t < T. \tag{P''_n}$$

このとき, (P''_n) の可解性を証明することができる.

補題 4.2. 次をみたす $(u_n, g_{u_n}) \in W^{1,2}(0,T;H) \times L^2(0,T;H)$ が一意に存在する.

$$u_n(0) = u_0, \quad g_{u_n}(t) \in \partial\varphi\left(u_n(t)\right) \qquad \text{for a.e. } t \in (0,T),$$
$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_n - u_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u_n-u_0)\right] + g_{u_n} - \partial\psi_{1/n}(u_n) = f. \tag{4}$$

ここで, 時間局所解の存在とは異なり $(1/n)(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(u-u_0)$ の項を付け加えることによって, 命題 3.6 の連鎖律を用いることができるため, より多くの一様評価が成り立つような近似問題となっている. つぎにア・プリオリ評価を導出する. 方程式 (4) の両辺に $(d/dt)(u_n-u_0)$ をかけ, $(0,t)$ で積分を行うことにより, 命題 3.6 および命題 3.11 の連鎖律を用いて次の不等式を示すことができる.

$$\begin{aligned}&\int_0^t \frac{1}{n}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(u_n-u_0\right)(s)\right|_H^2 \mathrm{d}s+\left[\ell*\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}k*(u_n-u_0)\right|_H^2\right](t)+\varphi(u_n(t))-\psi_{1/n}(u_n(t))\\ \leq&\varphi(u_0)+\psi(u_0)+f(t)(u_n-u_0)(t)-\int_0^t\left(\left(u_n-u_0\right)(s),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(s)\right)_H \mathrm{d}s\end{aligned}$$

for a.e. $t\in(0,T)$. ここで, 次の不等式が成立することに注意する.

$$|u_n(t)-u_0|_H^2 \leq |\ell|_{L^1(0,T)}\left[\ell*\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}k*(u_n-u_0)\right|_H^2\right](t) \quad \text{for a.e. } t\in(0,T). \tag{5}$$

仮定 (A.3) および (5) を用いることにより, $\varphi(u_n)+|u_n|_H$ の一様有界性が得られる.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|\varphi(u_n)+|u_n|_H|_{L^\infty(0,T)}<\infty$$

以降の証明は, 定理 2.1 の証明と同様である.

参考文献

[1] G. Akagi, Fractional flows driven by subdifferentials in Hilbert spaces, Israel J. Math. **234** (2019), 809–862.

[2] V. Barbu, *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[3] Ph. Clément and J.A. Nohel, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels, SIAM J. Math. Anal., **12** (1981), 514–535.

[4] M. Ôtani, On the existence of strong solutions for $du/dt(t)+\partial\psi^1(u(t))-\partial\psi^2(u(t))\ni f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24** (1977), 575–605.

[5] R.E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 49, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[6] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **146** (1987), 65–96.