電磁場中のシュレーディンガー方程式の解の特異性伝播について *

東京理科大学 大学院理学研究科数学専攻 博士後期課程 3 年
村松 亮 (Ryo MURAMATSU)

概要

本研究では, 電磁場中のシュレーディンガー方程式の解の波面集合を, 波束変換を用いて初期値で特徴づけた. シュレーディンガー方程式は, 量子力学における電磁場中の荷電粒子の運動を記述する偏微分方程式である. 初期値の特異点が時間経過で解に伝播する現象を特異性伝播というが, シュレーディンガー方程式の解の特異性伝播は, シュレーディンガー方程式に対応する古典力学的粒子の運動が反映されている. 本研究では, 特異点の位置と伝播する方向を同時に記述する波面集合によって, 電磁場中のシュレーディンガー方程式の解の特異性伝播現象を明らかにすることが目的である.

1 導入

本研究では, 以下のベクトルポテンシャル付きシュレーディンガー方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\left(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x)\right)^2 u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $u(t,x)$, $u_0(x)$ はそれぞれ $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ についての複素数値関数であり, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$, $\boldsymbol{a} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ で, $\boldsymbol{a}(t,x) = (a_1(t,x), \cdots, a_n(t,x))$ とし, $(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x))^2 = \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} - ia_k(t,x))^2$ である. さらに, $\boldsymbol{a}(t,x)$ には以下の仮定 A, B のいずれか一方を課す.

仮定 A. $k = 1, \ldots, n$ に対し, $\boldsymbol{a}$ の第 k 成分 $a_k(t,x)$ は $b_{k,l} \in C^\infty(\mathbb{R})$ $(l,k = 1,\ldots,n)$ を用いて

$$a_k(t,x) = \sum_{l=1}^n b_{k,l}(t) x_l \tag{2}$$

と表される.

仮定 B. 各 $j = 1, \cdots, n$ に対し $a_j : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級であり, $\rho < 1$ が存在して任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し,

$$^\exists C_\alpha > 0 \text{ s.t. } {}^\forall(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n; \ \max_{1\le j\le n} |\partial_x^\alpha a_j(t,x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{\rho-|\alpha|}.$$

* 本研究は安部 文人氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく.

関数の滑らかさはフーリエ変換の減衰の速さで置き換えることができる．波面集合は遠方での ξ の減少度を方向別にみることで, 関数の特異性を方向別に精密化した概念である．

定義 1.1 (波面集合)**.** $(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し, $(x_0,\xi_0)\notin WF(f)$ であるとは, x_0 の近傍上で $\chi(x)\equiv 1$ となる $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し $C_N>0$ が存在して

$$|\widehat{\chi f}(\xi)|\le C_N(1+|\xi|)^{-N},\quad \xi\in\Gamma$$

をみたすことである．

定義 1.2 (波束変換)**.** $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$, $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき, 窓関数 φ による f の波束変換 $W_\varphi f$ を, 以下で定める:

$$W_\varphi f(x,\xi)\ =\ \int_{\mathbb{R}^n}\overline{\varphi(y-x)}e^{-iy\cdot\xi}f(y)dy,\quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

2 主結果

本研究では, 仮定 A または仮定 B のいずれかをみたすベクトルポテンシャル $\boldsymbol{a}(t,x)$ を付与したシュレーディンガー方程式 (1) の解の波面集合を, 波束変換を用いて初期値によって特徴づけた．ここで, $x(\tau)=x(\tau;t_0,x,\lambda\xi)$ と $\xi(\tau)=\xi(\tau;t_0,x,\lambda\xi)$ は以下の常微分方程式の解とする．

$$\begin{cases}\dot{x}(\tau)=(\nabla_\xi H)(\tau,x(\tau),\xi(\tau)), & x(t_0)=x,\\ \dot{\xi}(\tau)=-(\nabla_x H)(\tau,x(\tau),\xi(\tau)), & \xi(t_0)=\lambda\xi,\end{cases}\tag{3}$$

ただし, $H(t,x,\xi)=\frac{1}{2}\left|\xi-\boldsymbol{a}(t,x)\right|^2$.

主定理. $\boldsymbol{a}(t,x)$ は仮定 A または仮定 B のいずれかをみたすとし, $u(t,x)$ は $u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする, $C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する (1) の解とする．このとき, ある $b\in(0,1)$ が存在して, 任意の $t_0\in\mathbb{R}$ に対し, 以下は同値である．

(i) $(x_0,\xi_0)\notin WF(u(t_0,\cdot))$.

(ii) x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\ge 1$, $\varphi_0(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ に対し, 正定数 $C_{N,a,\varphi_0}>0$ が存在し, 任意の $\lambda\ge 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a:=\left\{\xi\in\Gamma\middle| a^{-1}\le|\xi|\le a\right\}$ に対し

$$\left|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi))\right|\le C_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N}\tag{4}$$

をみたす．ただし, $W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x,\xi)$ は u_0 の $\varphi_\lambda^{(-t_0)}(x)$ を窓関数とした波束変換であり, $\varphi_\lambda^{(t)}(x)$ は, 初期値が $\varphi_{0,\lambda}(x)=\lambda^{nb/2}\varphi_0\left(\lambda^b x\right)$ で, 仮定 A のときは (1) を, 仮定 B のときは自由シュレーディンガー方程式をみたす初期値問題の解である．

(iii) $\varphi_0(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ と x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\ge 1$ に対し, 正定数 $C_{N,a}>0$ が存在し, 任意の $\lambda\ge 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a$ に対して (8) をみたす．

3 背景

波面集合は 1970 年代に L. Hörmander によって定義された概念であり, Hörmander は双曲型方程式の解の特異性伝播定理を波面集合を用いて示した．双曲型方程式の最も簡単な場合である波動方程式を例にとろう．この場合, 解の特異点は初期値と特性曲線を用いて完全に決定される．すなわち, (x, ξ) が初期値の波面集合に入っているならば, $(x \pm \xi t, \xi)$ は時刻 t における解の波面集合に属する．これから, 初期値の特異点は速度 ξ で直線的にスライドして解に伝わるということがわかる．平たく言えば, 初期値が微分可能でなければ, 解も微分可能ではない．

一方シュレーディンガー方程式の場合は, 解の特異性伝播は解の (超局所的) 平滑化作用, 物理的には波動関数のもつ分散性と関係している．このことを説明するために, まずシュレーディンガー方程式の解の平滑化作用について説明する．自由シュレーディンガー方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{\Delta}{2} u(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5}$$

の解作用素は, フーリエ変換 $\mathcal{F}$ を用いて $e^{it\Delta/2} := \mathcal{F}^{-1} e^{-it\xi^2/2} \mathcal{F}$ と表される．解作用素と位置作用素 x との交換関係: $e^{it\Delta/2} x = (x + it\nabla) e^{it\Delta/2}$ により, もし $x^2 u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ならば

$$\|(x + it\nabla)^2 u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|e^{it\Delta/2}(x^2 u_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|x^2 u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

従って $t \neq 0$ で $u(t,x) \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ となることがわかる．初期値には滑らかさの仮定を課していないため, これは初期値の空間遠方での減衰によって解の微分可能性が「回復した」ととらえることができる．これが (自由) シュレーディンガー方程式の解の平滑化作用である．微分可能性が初期値の減衰度に依存すること, いくらでも回復するわけではないことが熱方程式のそれと異なる．

平滑化作用は Craig, Kappeler, Strauss によって超局所的な性質として一般化された ([1])．すなわち, 初期値がある方向の錐近傍 Γ 上で $x^N u_0(x) \in L^2(\Gamma)$ $(N \in \mathbb{N})$ をみたすなら, $t > 0$ での解 $u(t,x)$ は, その方向では滑らかになる．この結果は実際には波面集合を用いて記述されており, シュレーディンガー方程式のもつ超局所的平滑化作用が特異性伝播現象に関係することを示した最初の結果であろう．Craig らの結果はポテンシャル付きの変数係数シュレーディンガー作用素に対する結果として一般化した状態で記述されているが, 主要部は Δ に近く, ポテンシャルは増大度が小さい短距離型を仮定している．長距離型ポテンシャルを含み, 各時刻における解の波面集合を初期値を用いて特徴づけた結果が中村 [10], [11] であり, Craig らの結果を最も精密にした結果の一つである．ここで, ポテンシャルが特異性伝播の結果にどのような影響を及ぼすのかについて, 平滑化作用の直観的な意味から説明する．

微分可能性はフーリエ変換後の変数 ξ に関する減衰度であるととらえることができる．この ξ は量子力学の文脈では古典粒子の運動量または速度に対応する．平滑化作用が言っているのは, 自由シュレーディンガー方程式において特異性に関係する速度 ξ の大きい部分は初期時刻を離れた瞬間に無限遠方に飛び去り, $t \neq 0$ では ξ が小さい部分しか残らないため, 初期値がたとえ特異性を持ったとしても解は微分できるようになる, ということである．この原理に基づくと, 速度の大きい粒子が遠方に飛び去るような場合なら同様の平滑化作用が期待できるが, ポテンシャルによって

は粒子がポテンシャル中に閉じ込められる場合がある．典型例は調和振動子のポテンシャルであるが, 実際その場合は初期値の特異性が周期的に回帰する現象を観ることができる (Zelditch [16] や Kapitanski–Rodnianski–Yajima [3] 等を参照されたし)．さらに, ポテンシャルの空間増大度が 2 次よりも大きい場合, ポテンシャルによる粒子の閉じ込めが強くなった結果, 特異性が同じ場所に周期的に回帰するのではなくいたるところに爆発的に発生することが知られている．これについては谷島 [14] を参照されたい．

中村 [10], [11] の結果は, ポテンシャルの空間増大度が 2 未満であれば, 粒子がポテンシャル中に閉じ込められるということはあまり起こらず, 速度の大きい粒子はほとんど無限遠方に飛び去る自由の場合に近いであろう, という描像を示している．調和振動子の場合における特異性の回帰現象と比較すると, (ポテンシャルの空間増大度)$=2$ が特異性伝播における分水嶺であることが察せられるが, ポテンシャルの増大度と特異性伝播について, 各時刻における解の波面集合の特徴づけという形で統一的に扱った研究は多くない．

一方, 波面集合を, 波束変換を用いることで特徴づけられることは以前から知られていた．具体的には, 次の命題が成立する:

命題 3.1 (G. B. Folland [2], T. Ōkaji [12] and [13], K. Kato–M. Kobayashi–S. Ito [7]). *$(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $0<b<1$ とする．このとき, 以下は同値である．*

(i) $(x_0,\xi_0)\notin WF(f)$

(ii) x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\geq 1$, $\varphi_0(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ に対し, 正定数 $C_{N,a,\varphi_0}>0$ が存在し, 任意の $\lambda\geq 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a:=\left\{\xi\in\Gamma\middle|a^{-1}\leq|\xi|\leq a\right\}$ に対して

$$|W_{\varphi_\lambda}f(x,\lambda\xi)|\leq C_{N,a,\varphi}\lambda^{-N} \tag{6}$$

をみたす．ただし, $\varphi_\lambda(x)=\lambda^{\frac{nb}{2}}\varphi\left(\lambda^b x\right)$.

(iii) $\varphi_0(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ と x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\geq 1$ に対し, 正定数 $C_{N,a}>0$ が存在し, 任意の $\lambda\geq 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a$ に対し (6) をみたす．

また, 加藤, 小林, 伊藤 [6] によって自由シュレーディンガー方程式の解を波束変換を用いて具体的に書き下すことができることが分かった．のちに調和振動子のシュレーディンガー方程式の解の波束変換を使った表示も得られ, 上記の命題 3.1 と組み合わせることで解の波面集合を波束変換を用いて特徴づけた結果 [5] が得られた．この結果は, 局所平滑化作用が発生する自由の場合と, 平滑化は起こらず特異性の回帰が起こる調和振動子の場合の波面集合の特徴づけが, 並列に論じられているという点で興味深い．

さらにこの結果は, 時間依存する長期型ポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x)+\frac{\Delta}{2}u(t,x)=V(t,x)u(t,x), & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{7}$$

の解に対しても拡張できることが分かった．以下がその結果である．

定理 3.2 (K. Kato–S. Ito [4]). *$u(t,x)$ は $u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする, $C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する*

(7) の解とする．さらに，$V(t,x)$ は $\rho<2$ が存在し，任意の多重指数 α に対して，$C_\alpha>0$ が存在して

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^{\rho-|\alpha|}$$

をみたすとする．このとき，ある $b\in(0,1)$ が存在して，任意の $t_0\in\mathbb{R}$ に対し，以下は同値である．

(i) $(x_0,\xi_0)\notin WF(u(t_0,\cdot))$.

(ii) x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して，任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\geq 1$, $\varphi_0(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ に対し，正定数 $C_{N,a,\varphi_0}>0$ が存在し，任意の $\lambda\geq 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a:=\left\{\xi\in\Gamma \middle| a^{-1}\leq|\xi|\leq a\right\}$ に対し

$$\left|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi))\right| \leq C_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N} \tag{8}$$

をみたす．ただし，$W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x,\xi)$ は u_0 の $\varphi_\lambda^{(-t_0)}(x)$ を窓関数とした波束変換であり，$\varphi_\lambda^{(t)}(x)$ は，初期値が $\varphi_{0,\lambda}(x)=\lambda^{nb/2}\varphi_0\left(\lambda^b x\right)$ の自由シュレーディンガー方程式をみたす初期値問題の解である．

(iii) $\varphi_0(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ と x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して，任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\geq 1$ に対し，正定数 $C_{N,a}>0$ が存在し，任意の $\lambda\geq 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a$ に対して (8) をみたす．

ただし，$x(\tau)=x(\tau;t_0,x,\lambda\xi)$ と $\xi(\tau)=\xi(\tau;t_0,x,\lambda\xi)$ は以下の常微分方程式の解である．

$$\begin{cases}\dot{x}(\tau)=\xi(\tau), & x(t_0)=x,\\ \dot{\xi}(\tau)=-(\nabla_x V)(\tau,x(\tau)), & \xi(t_0)=\lambda\xi,\end{cases} \tag{9}$$

本研究は，この結果を磁場に対応するベクトルポテンシャルがついた方程式 (1) に対して応用したものである．磁場に対する結果は Mao による結果 [8, 9] が知られているが，例えば [8] ではポテンシャル $V(x)$ も考慮しているが時間依存しない場合に限られること，本研究の波面集合より弱い概念である H^s 波面集合を用いている点が本研究との違いである．さらに本研究の結果は，(時間に依存しない場合は) 一般に特異性の回帰が起こりやすい定磁場の場合 (仮定 A) と，局所平滑化が起こりやすい空間減衰磁場 (仮定 B) における解の波面集合を同時に記述しており，特異性伝播を統一的に研究しているという点が重要である．

4 証明の概略

$\boldsymbol{a}(t,x)$ が仮定 A をみたす場合と仮定 B をみたす場合とで証明の方法が変わるが，本稿では仮定 B をみたす場合のみ証明の概略を示す．

STEP1: **波束変換を用いた (1) の解の表示**

まず，$t\in\mathbb{R}$, $x,\xi\in\mathbb{R}^n$ に対し，特性曲線 $x(s)=x(s;t,x,\lambda\xi)$, $\xi(s)=\xi(s;t,x,\lambda\xi)$ を

$$\begin{cases}\dot{x}(s)=\xi(s)-\boldsymbol{a}(s,x(s)), & x(t)=x,\\ \dot{\xi}(s)=\nabla_x(\xi(s)\cdot\boldsymbol{a}(s,x(s))-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2(s,x(s))), & \xi(t)=\lambda\xi\end{cases} \tag{10}$$

の解とする．ただし $\dot{a}=\frac{d}{ds}a$. この特性曲線と波束変換を用いることで, 積分不等式による解の表示

$$\begin{aligned}\left|W_{\varphi_\lambda^{(t-t_0)}}u(t,x,\xi)\right| &\le \left|W_{\varphi_{0,\lambda}}u_0(x(0;t,x,\lambda\xi),\xi(0;t,x,\lambda\xi)\right| \\ &\quad+\left|\int_0^t \left|R_{\varphi_\lambda^{(\tau)}}u(\tau,x(\tau;t,x,\lambda\xi),\xi(\tau;t,x,\lambda\xi))\right|d\tau\right|\end{aligned} \tag{11}$$

が得られる．ここで,

$$\begin{aligned}R_{\varphi^{(\tau)}}u(\tau,x,\xi) &= \sum_{j=1}^n \xi_j \times \bigg(\iiint \overline{\varphi_{k,l}(\tau,y-x)}\varphi(\tau,y-z)W_{\varphi^{(\tau)}}u(\tau,z,\eta) \\ &\qquad \times R_j(\tau,y,x)e^{iy\cdot(\eta-\xi)}dydz\bar{d}\eta\bigg) + (\xi\text{の低階項}), \\ R_j(\tau,y,x) &= (a_j(t,y)\text{ を } x \text{ 周りでテイラー展開したものの 2 次以上の項}).\end{aligned}$$

のちのために, 三角不等式を用いて次のように変形しておく:

$$\left|\left|W_{\varphi_\lambda^{(t-t_0)}}u(t,x(t),\xi(t))\right|-\left|W_{\varphi_{0,\lambda}}u_0(x(0),\xi(0))\right|\right| \le \left|\int_0^t \left|R_{\varphi_\lambda^{(\tau-t_0)}}u(\tau,x(\tau),\xi(\tau))\right|d\tau\right| \tag{12}$$

STEP2: **十分条件の用意**

$(ii) \Rightarrow (iii)$ は明らかだから, $(i) \Rightarrow (ii)$ および $(iii) \Rightarrow (i)$ を示せばよい．命題 3.1 より, $(i) \Rightarrow (ii)$ が成立することと,

“任意の $N\in\mathbb{N}$, $\varphi_0(x)\in\mathcal{S}\setminus\{0\}$, $a\ge 1$ に対し, $C_{N,a,\varphi}>0$ が存在し, 任意の $\lambda\ge 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a$ に対して

$$\left|W_{\varphi_{0,\lambda}}u(t_0,x,\xi)\right| \le C_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N}$$

が成り立つならば, $C'_{N,a,\varphi}>0$ が存在し, 任意の $\lambda\ge 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a$ に対して

$$\left|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi))\right| \le C'_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N}.$$

となる”ことに等しい．また $(iii) \Rightarrow (i)$ の成立も,

“$\varphi_0\in\mathcal{S}\setminus\{0\}$ が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\ge 1$ に対し, $C_{N,a}>0$ が存在し, 任意の $\lambda\ge 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a$ に対して

$$\left|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi))\right| \le C_{N,a}\lambda^{-N}.$$

ならば, $C'_{N,a}>0$ が存在し, 任意の $\lambda\ge 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a$ に対して

$$\left|W_{\varphi_{0,\lambda}}u(t_0,x,\xi)\right| \le C'_{N,a}\lambda^{-N}$$

となる”ことと同値である．従って (12) の表示より, 次の補題が示されれば, 数学的帰納法を用いることで両方とも示すことができる．

補題 4.1. $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a \geq 1$, $\varphi_0 \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ とする．$C_{N,a,\varphi_0} > 0$ が存在して, 任意の $\lambda \geq 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$, $t \in [0, t_0]$ に対して

$$\left| W_{\varphi_\lambda^{(t-t_0)}} u(t, x(t), \xi(t)) \right| \leq C_{N,a,\varphi_0} \lambda^{-N} \tag{13}$$

ならば, $C'_{N,a,\varphi_0} > 0$ と $b \in (0,1)$ が存在して, 任意の $\lambda \geq 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$, $t \in [0, t_0]$ に対し

$$\left| \int_0^t \left| R_{\varphi_\lambda^{(\tau-t_0)}} u(\tau, x(\tau), \xi(\tau)) \right| d\tau \right| \leq C'_{N,a,\varphi_0} \lambda^{-N-2b}.$$

STEP3: **補題 4.1 の証明**

$R_{\varphi_\lambda^{(\tau-t_0)}} u(\tau, x(\tau), \xi(\tau))$ の中に $W_{\varphi_\lambda^{(t-t_0)}} u(t, x(t), \xi(t))$ があるから, (13) を用いて λ^{-N} の減衰は出すことができる．残りは λ^{-2b} の減衰であるが, $R_j(\tau, y, x(\tau))$ を, (i) テイラー多項式の項 と (ii) 剰余項の二つに分けて特性曲線を評価することで導出する．このとき, 特性曲線の評価にかかわる次の 2 つの補題を用いる．

補題 4.2. $p < 1$ とする．このとき λ_0 が存在して, 任意の $\lambda \geq \lambda_0$, $s : \lambda^{p-1} \leq |s - t_0| \leq t_0$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$ に対し

$$\begin{cases} \frac{1}{2a} |s - t_0| \lambda \leq |x(s - t_0)| \leq 2a|s - t_0|\lambda \\ \frac{1}{2a} \lambda \leq |\xi(s - t_0)| \leq 2a\lambda. \end{cases}$$

補題 4.3. $\delta > 0$ とする．このとき $T_0 \in (0,1)$ と $C_\delta > 0$ が存在して任意の $T \in (0, T_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\int_0^T \frac{|\xi(\tau; t, x, \xi)|}{\langle x(\tau; t, x, \xi) \rangle^{1+\delta}} d\tau \leq C_\delta (1 + T).$$

ここで重要なのは, $a_j(t, y)$ のテイラー展開を十分大きい次数まで行うことである．$R_j(\tau, y, x(\tau))$ のうち剰余項の部分からはいくらでも λ の減衰が出せるが, テイラー多項式の部分は多項式の次数を十分大きくしないと λ^{-2b} を得ることができない． また, $R_{\varphi_\lambda^{(\tau-t_0)}} u(\tau, x(\tau), \xi(\tau))$ 内にある $\xi(\tau)$ の一次増大項が厄介であるが, 定数 C'_{N,a,φ_0} が実は時刻 t_0 には依存してもよいことを踏まえて, 予め $R_{\varphi_\lambda^{(\tau-t_0)}} u(\tau, x(\tau), \xi(\tau))$ の時間積分区間を非常に短い区間に切り分けることで補題 4.3 を用いて処理するのもポイントである．

参考文献

[1] W. Craig, T. Kappeler, W. Strauss, Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equations, Commun. Pure Appl. Math. 48 (1995) 760–860.

[2] G.B. Folland, Harmonic Analysis in Phase Space, Prinston Univ. Press, 1989.

[3] L. Kapitanski, I. Rodnianski, K. Yajima, On the fundamental solution of a perturbed harmonic oscillator, Topological methods in nonlinear analysis, J. Juliusz Schauder Cent. 9 (1997) 77–106.

[4] K. Kato, S. Ito, Singularities for solutions time dependent Schrödinger equations with subquadratic potential, SUT J. Math. 50 (2014) 383–398.

[5] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator, SUT J. Math. 47 (2011) 175–183.

[6] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Representation of Schrödinger operator of a free particle via short time Fourier transform and its applications, Tohoku Math. J. 64 (2012) 223–231.

[7] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Remark on characterization of wave front set by wave packet transform, Osaka J. Math. 54 (2) (2017) 209–228.

[8] S. Mao, Singularities of solutions to Schrödinger equations with constant magnetic fields, Funkcial. Ekvac. 54 (2011) 157–171

[9] S. Mao, Singularities for solutions to Schrödinger equations with asymptotically constant magnetic fields, J. Math. Phys. 53 (2012) 073707, 15

[10] S. Nakamura, Propagation of the homogeneous wave front set for Schrödinger equations, Duke Math. J. 126 (2003) 349–367.

[11] S. Nakamura, Semiclassical singularities propagation property for Schrödinger equations, J. Math. Soc. Jpn. 61 (2009) 177–211.

[12] T. Ōkaji, A note on the wave packet transforms, Tsukuba J. Math. 25 (2001) 383–397.

[13] T. Ōkaji, Propagation of wave packets and its applications, Oper. Theory: Adv. Appl. J. Math. 126 (2001) 239–243.

[14] K. Yajima, Smoothness and nonsmoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations, Commun. Math. Phys. 181 (1996) 605–629.

[15] K. Yajima, On fundamental solution of time dependent Schrödinger equations, Cotemp. Math. 217 (1998) 49–68.

[16] S. Zelditch, Reconstruction of singularities for solutions of Schrödinger's equation, Commun. Math. Phys. 90 (1983) 1–26.