単項式指数をもつ空隙級数の数論的性質について

弘前大学大学院 理工学研究科 安全システム工学専攻
村上慎太郎 (Shintaro Murakami)

概要

2019 年, V. Kumar は Kronecker の稠密定理を用いて, ある条件の下で単項式指数をもつ空隙級数の線形独立性に関する結果を与えた. 本講演では, Kumar の定理における条件を取り除き, 線形独立性に関する結果の一般化をいくつか示す. 証明では, S. Chowla(1947) と P. Erdős(1948) らによる合同式を用いた空隙の発見法および, K. Mahler(1953) の結果から導かれる不定方程式の解の有限性を用いる.

1 導入

Eisenstein 級数の値の代数的独立性を与えた Nesterenko[7] の結果を受けて, D. Bertrand[1] および, D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka, I. Shiokawa[3] はヤコビテータ関数の代数的数における有理数体上の代数独立性をそれぞれ独立に示した. この 2 つの結果の特別な場合として次の定理が導かれる.

定理 1. 複素数 q $(0 < |q| < 1)$ に対し, $\theta_3(q)$ を次のように定める.

$$\theta_3(q) := 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}.$$

このとき, 任意の代数的数 α $(0 < |\alpha| < 1)$ に対し, $\theta_3(\alpha), \theta_3'(\alpha), \theta_3''(\alpha)$ は超越数.

この定理から特に次のことがわかる.

系 1. 任意の代数的数 α $(0 < |\alpha| < 1)$ に対し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2}$$

は超越数.

一方, 3 以上の整数 k に対する $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^k}$ の超越性は現在未解決である.
また, V. Kumar[5] は, 有理数体上における級数の線形独立性に関する定理を示した. Kumar の定理の詳細については 3 章で述べる. 本講演では Kumar の定理における条件を取り除き、線形独立性に関する結果の一般化をいくつか示す.

2　空隙

本節ではタイトルにある空隙について説明する．はじめに, 無理性に関する次の命題を述べる．

命題 1. 実数 $0 < \alpha < 1$ の b 進法展開を次で定める．

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}.$$

ここで, $a_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$．このとき, ある整数 t $(0 < t \leq b-1)$ に対し, $a_i = t$ となる正整数 i が無限個存在して, かつ任意の正整数 N に対して, $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_{k+N} = 0$ となる正整数 k が存在するとき, α は無理数である．

例 1. 命題 1 を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4n^2}} \tag{1}$$

は無理数であることを示す．いま, (1) の 2 進展開を次で定める．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4n^2}} =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

ここで, $a_n \in \{0, 1\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. このとき, 繰り上がりを考慮すれば、

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = (2k-1)^2, 4k^2 - 1 \ (k = 1, 2, \ldots) \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

これより, 任意の正整数 N に対し, $a_{(2N+1)^2} = 1, a_{(2N+1)^2+1} = \cdots = a_{(2N+1)^2+N} = 0$. よって, 命題 1 より, (1) は無理数.

例 1 では線形結合の 2 進展開において, 零でない a_n の周りに任意の長さの零列をもつことを示した. 以降, このような零列を空隙と呼ぶ．3 章及び 4 章にて紹介する定理の証明の基本方針は任意の長さの空隙をもつことを示すことである．本講演では各定理における空隙の発見法についても説明していく．

3　先行結果

2019 年に Kumar は, 次の定理を示した.

定理 2 (V. Kumar, 2019). $k, b \geq 2$ を整数とする．また, 整数 $1 \leq a_1 < \cdots < a_m$ に対して, $\sqrt[k]{a_i/a_j}$ $(i \neq j)$ は無理数とする．このとき,

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{a_1 n^k}}, \quad \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{a_m n^k}}$$

は有理数体上線形独立性である.

Kumar は定理 2 の証明においてクロネッカーの稠密定理を用いて空隙を発見した．定理 2 の具体的な例を 1 つ挙げる．

例 2.

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{5n^2}}$$

は有理数体上線形独立である．

定理 2 は $\sqrt[k]{a_i/a_j}(i \neq j)$ が無理数であるという条件がある．これにより, 例えば次の数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4n^2}}$$

の線形独立性を定理 2 を用いて示すことはできない．定理 2 の条件を取り除き, 一般化した結果を 4 章で解説する．

4 主定理

定理を述べる為の準備をする．$M := \{(i,j) \mid i = 1,2,\ldots, j = 2,3,\ldots\}$ とする．各 $(i,j) \in M$ に対して, 集合 $S_{i,j}$ を初項 $h_{i,j}$, 公差 $d_{i,j} > 0$ が互いに素である等差数列上の素数をすべて含む $\mathbb{N}$ の無限部分集合とする．例えば, $S_{i,j}$ として $\mathbb{N}$, 4 を法として 1 と合同な素数全体の集合, 奇数全体の集合などが選択できる．また, $\{a_{i,j}(n)\}$ を有界な非零整数列とする．例えば, $a_{i,j}(n)$ として, ある定数の級数や交代級数をとることができる．このとき, 次が成り立つ．

定理 3 (M. , Y. Tachiya, 2022+). $b \geq 2$ を整数とする．このとき,

$$1, \quad \sum_{n \in S_{i,j}} \frac{a_{i,j}(n)}{b^{in^j}}, \quad (i,j) \in M$$

は有理数体上線形独立である．

定理 3 では S. Chowla[2] と P. Erdős[4] らによる合同式を用いた空隙の発見法が用いられている．
定理 3 において, 任意の $(i,j) \in M$ に対して, $S_{i,j} = \mathbb{N}$, $a_{i,j}(n) = 1$ とすると, 次の系を得る．

系 2. $b \geq 2$ を整数とする．このとき,

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{in^j}}, \quad (i,j) \in M$$

は有理数体上線形独立である．

系 2 は定理 2 の拡張を与える．系 2 の例を 1 つ挙げる．

例 3.

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{5n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{5n^3}}$$

は有理数体上線形独立である.

例 3 の結果は例 1, 例 2 の結果の拡張になっている.
さて, 定理 3 における集合 $S_{i,j}$ には条件が課されていたが, これを一般の $\mathbb{N}$ の無限部分集合に置き換えた場合, 定理 4 は成り立たない. 例えば,

$$\sum_{n=2k}\frac{1}{2^{n^3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{8n^3}}$$

は有理数体上線形従属である. 実は, 定理 2 における Kumar の条件を考慮することにより, 集合 $S_{i,j}$ を一般の $\mathbb{N}$ の無限部分集合に置き換えることができる.

定理 4 (M. , Y. Tachiya, 2022+). $b \geq 2$ を整数, L を M の部分集合とする. このとき, 任意の無限集合 $T_{i,j} \subset \mathbb{N}$ $((i,j) \in L)$ に対して

$$1, \quad \sum_{n \in T_{i,j}}\frac{a_{i,j}(n)}{b^{in^j}}, \qquad (i,j) \in L$$

が有理数体上線形独立となるための必要十分条件は, 次の (i), (ii) が満たされることである.
(i) $(i_1,j_1),(i_2,j_2) \in L$ が相異なるとき, すべての整数 u, v に対して $i_1 u^{j_1} \neq i_2 v^{j_2}$.
(ii) $j = 2$ となる $(i,j) \in L$ は高々 1 つ.

定理 4 の証明においては, K. Mahler[6] の結果から導かれる不定方程式の解の有限性を用いて空隙を発見している. 定理 4 において, j を $k \geq 3$ で固定することにより, 次の系を得る.

系 3. $k \geq 3, b \geq 2$ を整数とする. また, 整数 $1 \leq a_1 < \cdots < a_m$ に対して, $\sqrt[k]{a_i/a_j}$ $(i \neq j)$ は無理数とする. このとき, 任意の無限集合 $T_{i,j} \subset \mathbb{N}$ $((i,j) \in L)$ に対して,

$$1, \quad \sum_{n \in T_1}\frac{1}{b^{a_1 n^k}}, \quad \ldots, \quad \sum_{n \in T_m}\frac{1}{b^{a_m n^k}}$$

は有理数体上線形独立性である.

系 3 は定理 2 の (系 2 とは別の) 拡張を与える. 系 3 の例を 1 つ挙げる.

例 4.

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^3}}, \quad \sum_{n:\text{prime}}\frac{1}{2^{2n^3}}, \quad \sum_{n=2k}\frac{1}{2^{3n^3}}, \quad \sum_{n=k^2}\frac{1}{2^{4n^3}}, \quad \sum_{\substack{n \equiv 5 \\ (\text{mod } 10)}}\frac{1}{2^{5n^3}}$$

は有理数体上線形独立である.

例 4 では T_i として偶数全体の集合, 平方数の集合, 10 を法として 5 と合同な正数の集合などを選んでいる. これらの集合は定理 4 における集合 $S_{i,j}$ として選ぶことはできない.

5 今後の研究について

実数 $x(|x|<1)$ に対し,

$$f(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n},\quad g(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

とおく. 1947 年に Chowla[2] は次の定理を示した.

定理 5 (S. Chowla, 1947). 任意の整数 $t\geq 5$ に対して, $g(1/t)$ は無理数.

また, 1948 年に Erdős[4] は定理 5 を拡張して任意の整数 $t>1$ に対して, $f(1/t), g(1/t)$ は無理数であることを示した. Chowla と Erdős らは合同式を用いて空隙を発見しており, 4 節で説明した通り, 定理 3 の証明においても利用している. これまでの手法を拡張することで, 任意の整数 $t>1$ に対し,

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^n-1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^{in^j}},\quad (i,j)\in M$$

は有理数体上で線形独立であることを示す研究を現在行っている.

参考文献

[1] D. Bertrand, *Theta functions and transcendence*, Ramanujan J. 1 (1997), 339-350.

[2] S. Chowla, *On series of the Lambert type which assume irrational values for rational values of the argument*, Proc. Natl. Inst. Sci. India Part A 13 (1947), 171-173.

[3] D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka, and I. Shiokawa, *Transcendence of Jacobi's theta series,* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 72 (1996), 202-203.

[4] P. Erdős, *On arithmetical properties of Lambert series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 12 (1948), 63-66.

[5] V. Kumar, *Linear independence of certain numbers*, Arch. Math. (Basel) 112 (2019), 377-385.

[6] K. Mahler, *On the greatest prime factor of* ax^m+by^n, Nieuw Arch. Wisk. 1 (1953), 113-122.

[7] Yu. V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence questions*, Mat. Sb. 187 (1996) 65-96; English transl. Sb. Math. 187 1319-1348.