特異拡散を含む擬放物型偏微分方程式の適切性

千葉大学大学院教育学研究科 学校教育学専攻 理数・技術系
水野 大樹 (Daiki MIZUNO)

概要

本小論では, 特異拡散を含む項を緩和することによって得られる擬放物型偏微分方程式を考える．この問題は, 結晶粒界運動を記述するモデルや画像のノイズ除去問題のモデルなどで現れる, 特異拡散を含む放物型偏微分方程式を擬放物型近似することで得られる問題である．初めに時間離散化によって得られる楕円型境界値問題の可解性や正則性を議論した後, 極限操作によって元の問題の可解性及び, 方程式の適切性について触れる．なお, 本小論は白川 健氏（千葉大学）との共同研究に基づく．

1 導入

本小論を通して, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ は有界な領域とし, その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は十分なめらかであるとする．n_Γ は Γ の外向き単位法線ベクトルを表すものとする．$0 < T < \infty$ とし,

$$\begin{cases} Q := (0,T) \times \Omega, \ \Sigma := (0,T) \times \Gamma, \\ H := L^2(\Omega), \ V := H^1(\Omega), \ \mathscr{H} := L^2(0,T;\, H) \end{cases}$$

と置く．

本小論では, 以下の特異拡散を含む擬放物型偏微分方程式のクラス $(\mathrm{P})_\varepsilon$ $(\varepsilon \in [0,1])$ を考える:

$$(\mathrm{P})_\varepsilon := \begin{cases} \partial_t u - \mathrm{div}\,(\alpha\partial\gamma_\varepsilon(\nabla u) + \beta\nabla\partial_t u) \ni f \quad \text{in } Q, \\ (\alpha\partial\gamma_\varepsilon + \beta\nabla\partial_t u)\cdot n_\Gamma \ni 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{for a.e. } x \in \Omega. \end{cases}$$

ここに, $f \in \mathscr{H}$, $0 \leq \alpha \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $\beta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ とし,

$$\delta_* := \inf \beta(\Omega) > 0$$

とする．γ_ε は以下で定義される $\mathbb{R}^N$ 上の凸関数の族である:

$$\gamma_\varepsilon : y \in \mathbb{R}^N \mapsto \gamma_\varepsilon(y) := \sqrt{\varepsilon^2 + |y|^2} \in \mathbb{R}, \ \forall \varepsilon \in [0,1].$$

ここに, $|\cdot|$ はユークリッドノルムである．初期値 u_0 は次に定める解のクラス D_0 に属する関数である:

$$D_0 := \left\{ \varphi \in H^2(\Omega) \,|\, \nabla\varphi|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0 \text{ in } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}.$$

定義 1. $u : (0,T) \longrightarrow H$ が方程式 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解であるとは, $u \in W^{1,2}(0,T;V)$ でかつ, 以下を満たすことである:

$$\exists \boldsymbol{w} \in \mathscr{H} \text{ s.t. } \boldsymbol{w}(t) \in \alpha\partial\gamma_\varepsilon(\nabla u(t)), \text{ a.e. } t \in (0,T) \text{ and}$$
$$\int_\Omega \partial_t u(t)\varphi\,dx + \int_\Omega (\boldsymbol{w}(t) + \beta\nabla\partial_t u(t))\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f(t)\varphi\,dx,\ \forall\varphi \in V.$$

問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ は次の特異拡散を含む初期値境界値問題を擬放物型近似することによって得られた問題である:

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}\left(\alpha\dfrac{Du}{|Du|}\right) = f \text{ in } Q, \\ \left(\alpha\dfrac{Du}{|Du|}\right)\cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Sigma, \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ for a.e. } x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

(1.1) は結晶粒界運動を記述するモデル (cf. [8]) や, 画像のノイズ除去のモデル (cf. [5]) などで現れる方程式である. [3] により, (1.1) は

$$\inf\alpha(\Omega) > 0 \text{ and } u_0 \in BV(\Omega)\cap H$$

という条件のもとで, 次のような正則性を持つ解が存在することがわかっている:

$$u \in W^{1,2}(0,T;H) \text{ and } |u(\cdot)|_{BV(\Omega)} \in L^\infty(0,T).$$

本問題における大きな特徴に, 拡散の速度を表す項 $-\operatorname{div}(\beta\nabla\partial_t u)$ がある. このような項を加えて擬放物型近似した方程式には, 拡散が線形もしくは準線形の場合, [6, 10, 11] などによって次の正則性を持つ解の一意存在が確認されている:

$$u \in W^{1,2}(0,T;H^2(\Omega)).$$

本小論は, 特異性を持つ項による正則性の低下と擬放物型近似による正則性の向上という二つの相対する性質が解に与える影響に注目する.

2 準備

X を実 Hilbert 空間とする. $|\cdot|_X$ を X 上のノルムとし, $(\cdot,\cdot)_X$ は X 上の内積を表すとする. また, $|\cdot|$ はユークリッド空間におけるノルムを表すとし, $\mathbb{R}^d$ 上の内積を以下で記述する:

$$y\cdot\tilde{y} := \sum_{i=1}^d y_i\tilde{y}_i, \quad \forall y = [y_1,\dots y_d],\ \tilde{y} = [\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_d] \in \mathbb{R}^d.$$

$\Psi : X \longrightarrow (-\infty,\infty]$ を適正下半連続凸関数とし, Ψ の実効領域を $\operatorname{dom}\Psi$ と表す. $u \in \operatorname{dom}\Psi$ における Ψ の劣微分 $\partial\Psi(u)$ を次で定義する:

$$\partial\Psi(u) := \{v \in X;\ (v,\varphi-u)_H \le \Psi(\varphi) - \Psi(u),\ \forall\varphi \in X\}.$$

また, $\{u \in X;\ \partial\Psi(u) \neq \emptyset\}$ を $\partial\Psi$ の定義域とする.

例 1. 先に定めた γ_ε について, $D(\partial\gamma_\varepsilon) = \mathbb{R}^N$ でかつ, 次が成り立つ:

$$\partial\gamma_\varepsilon(x) = \{\nabla\gamma_\varepsilon(x)\}\ (\varepsilon > 0),\ \partial\gamma_0(x) = \partial\left(|\cdot|\right)(x) = \mathrm{Sgn}(x).$$

例 2. 適正下半連続凸関数 $\Psi_\varepsilon : [H]^N \longrightarrow [0,\infty)$ を次で定める:

$$\Psi_\varepsilon(\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \alpha\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{v})\,dx,\ \forall \boldsymbol{v} \in [H]^N.$$

この時, $\partial\Psi_\varepsilon(\boldsymbol{v}) := \{\alpha\boldsymbol{w} \in [H]^N;\ \boldsymbol{w} \in \partial\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{v})\}$ と表される. さらに, $\widehat{\Psi}_\varepsilon : [\mathscr{H}]^N \longrightarrow [0,\infty)$ を

$$\widehat{\Psi}_\varepsilon(\widehat{\boldsymbol{v}}) := \int_0^T \Psi_\varepsilon(\widehat{\boldsymbol{v}}(t))\,dt,\ \forall \widehat{\boldsymbol{v}} \in [\mathscr{H}]^N$$

として定める時, 以下が成り立つ:

$$\partial\widehat{\Psi}_\varepsilon(\widehat{\boldsymbol{v}}) = \{\alpha\widehat{\boldsymbol{w}} \in [\mathscr{H}]^N;\ \widehat{\boldsymbol{w}}(t) \in \partial\Psi_\varepsilon(\widehat{\boldsymbol{v}}(t))\ \text{a.e.}\ t \in (0,T)\}.$$

次に時間離散化に関する記法を導入する. $\tau > 0$ を時間幅を示す正定数とし, 時間の列 $\{t_i\}_{i=0}^\infty$ を

$$t_i := i\tau,\ \forall i = 0,1,2,\dots$$

として定める. 任意の列 $\{t_i,\eta_i\}_{i=0}^\infty \subset [0,\infty) \times X$ に対して, 3 通りの補完 $[\overline{\eta}]_\tau \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$, $[\underline{\eta}]_\tau \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$, $[\eta]_\tau \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$ を次によって定める:

$$\begin{cases} [\overline{\eta}]_\tau(t) := \chi_{(-\infty,0]}\eta_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^\infty \chi_{(t_{i-1},t_i]}(t)\eta_i, \\ [\underline{\eta}]_\tau(t) := \displaystyle\sum_{i=0}^\infty \chi_{(t_i,t_{i+1}]}(t)\eta_i, & \text{in } X,\ \forall t \geq 0 \\ [\eta]_\tau(t) := \displaystyle\sum_{i=1}^\infty \chi_{[t_{i-1},t_i)}(t)\left(\frac{t-t_{i-1}}{\tau}\eta_i + \frac{t_i - t}{\tau}\eta_{i-1}\right), \end{cases}$$

ここに, $\chi_E : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ は, 集合 $E \subset \mathbb{R}$ の特性関数とする. これらの補完について, 以下の性質が成り立つ:

命題 1. $q \in [1,\infty)$, $\eta \in L^q(0,T;X)$ とし,

$$\eta_i := \frac{1}{\tau}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \eta(t)\,dt,\quad \text{in } X$$

として $\{\eta_i\}_{i=0}^\infty$ を定める時,

$$[\overline{\eta}]_\tau \to \eta,\ [\underline{\eta}]_\tau \to \eta,\ [\eta]_\tau \to \eta \text{ in } L^q(0,T;X) \text{ as } \tau \downarrow 0$$

が成り立つ.

最後に主定理の証明の鍵となる Mosco 収束について, 定義とその性質について紹介する.

定義 2 (cf. [9])**.** X を Hilbert 空間とする. $\Psi : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ を適正下半連続凸関数とし, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X 上で定義された適正下半連続凸関数の列とする. Ψ_n が Ψ に X 上で Mosco 収束するとは, 以下の条件 (M1), (M2) を満たすことである:

(M1) $\check{w} \in X$, $\{\check{w}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, が $\check{w}_n \to \check{w}$ weakly in X as $n \to \infty$ を満たす時, $\varliminf_{n\to\infty} \Psi_n(\check{w}_n) \geq \Psi(\check{w})$ が成り立つ.

(M2) 任意の $\hat{w} \in D(\Psi)$ に対し, $\hat{w}_n \to \hat{w}$ in X, $\Psi_n(\hat{w}_n) \to \Psi(\hat{w})$as $n \to \infty$ を満たすような $\{\hat{w}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が存在する.

命題 2 (cf. [1], [7])**.** X, Ψ, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は定義 2 で与えたものとする.

$$\Psi_n \to \Psi \text{ on } X, \text{ in the sense of Mosco, as } n \to \infty,$$

及び,

$$\begin{cases} [w, w^*] \in X \times X, \quad [w_n, w_n^*] \in \partial\Psi_n \text{ in } X \times X,\ n \in \mathbb{N}, \\ w_n \to w \text{ in } X \text{ and } w_n^* \to w^* \text{ weakly in } X, \text{ as } n \to \infty. \end{cases}$$

を仮定する時, 以下が成り立つ:

$$[w, w^*] \in \partial\Psi \text{ in } X \times X, \text{ and } \Psi_n(w_n) \to \Psi(w), \text{ as } n \to \infty.$$

補足 1. 例 2 において定義した $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ について,

$$\widehat{\Psi}_\varepsilon \to \widehat{\Psi}_0 \text{ on } [\mathscr{H}]^N, \text{ in the sense of Mosco, as } \varepsilon \downarrow 0$$

が成り立つ (cf. [2, 4]). 本小論においては, $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ に対して命題 2 を適用する.

3 主定理

まず初めに, 境界における意味づけを与えるため, 作用素 $[(\cdot) \cdot n_\Gamma]_\Gamma$ を定義する:

定義 3. $[\,(\cdot) \cdot n_\Gamma\,]_\Gamma : \bigl\{ \boldsymbol{w} \in [H]^N ; \operatorname{div} \boldsymbol{w} \in H \bigr\} \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ を次の式によって定義する:

$$[\boldsymbol{v} \cdot n_\Gamma]_\Gamma(\varphi|_\Gamma) := \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{v} \cdot \varphi \, dx + \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi \, dx, \ \forall \boldsymbol{v} \in \{\boldsymbol{w} \in [H]^N ; \operatorname{div} \boldsymbol{w} \in H\}, \ \forall \varphi \in V.$$

本章では先の準備や記法を元として, 問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ について得られた結果を記述する. 特異性を持つ項を緩和した $\varepsilon > 0$ と $\varepsilon = 0$ の場合の間には, 正則性や意味づけに関して幾らかの差異が見られた.

定理 1. 任意の $\varepsilon \in (0, 1]$ に対し, $(\mathrm{P})_\varepsilon$ は解 u_ε をただ一つ持ち, 次の $\mathbf{(S0)}_\varepsilon$–$\mathbf{(S2)}_\varepsilon$ を満たす:

$\mathbf{(S0)}_\varepsilon$ $u \in W^{1,2}(0, T; H^2(\Omega))$ and $u_\varepsilon(0) = u_0$ in H

$\mathbf{(S1)}_\varepsilon$ u_ε は境界において次の意味で特徴づけられる:

$$\nabla u(t)|_\Gamma \cdot n_\Gamma = \nabla\partial_t u(t)|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma, \quad \text{for a.e. } t \in (0, T)$$

$\mathbf{(S2)}_\varepsilon$ 初期値を $u_0^1, u_0^2 \in D_0$ とする時, 二つの解 $u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2$ は次の不等式を満たす:

$$\left| u_\varepsilon^1(t) - u_\varepsilon^2(t) \right|_V^2 \leq C_\beta |u_0^1 - u_0^2|_V^2, \ \forall t \in (0, T)$$

定理 2. $\varepsilon = 0$ の時, $(\mathrm{P})_0$ は解 u をただ一つ持ち, 次の **(S0)**–**(S2)** を満たす:

(S0) $u \in W^{1,2}(0,T;V)$ and $u(0) = u_0$ in H

(S1) 解 u は境界において次の意味で特徴づけられる:

$$[(\boldsymbol{w}(t) + \beta\nabla\partial_t u(t)) \cdot n_\Gamma]_\Gamma = 0 \text{ in } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{ for a.e. } t \in (0,T).$$

(S2) 初期値を $u_0^1, u_0^2 \in D_0$ とする時, 二つの解 u^1, u^2 は次の不等式を満たす:

$$\left|u^1(t) - u^2(t)\right|_V^2 \leq C_\beta |u_0^1 - u_0^2|_V^2, \ \forall t \in (0,T)$$

4 証明の概要

本章は, 重要な補題の紹介および主定理の証明の概略を記述する.

4.1 証明のための準備

主定理において, 解は $\varepsilon > 0$ の場合における, $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の時間離散化スキームの極限によって得られる. $\tau > 0$ を時間幅とし, 以下の時間離散化スキームの解の存在を考える:
$(\mathrm{AP})_\tau^\varepsilon$: 以下の方程式を満たすような関数列 $\{u_{\varepsilon,i}\}_{i=1}^\infty \subset \{\varphi \in H^2(\Omega) \,|\, \nabla\varphi|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma\}$ を求める:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(u_{\varepsilon,i} - u_{\varepsilon,i-1}) - \mathrm{div}\left(\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u_{\varepsilon,i}) + \beta\nabla\left(\dfrac{u_{\varepsilon,i} - u_{\varepsilon,i-1}}{\tau}\right)\right) = f_i \text{ in } \Omega, \\ \nabla u_{\varepsilon,i}|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma, \quad i = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ここに, u_0 は先に与えた初期値とし, f_i は各時間幅における積分平均とする. すなわち:

$$f_i(x) := \frac{1}{\tau}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,x)\,dt, \quad \forall x \in \Omega.$$

この方程式は次の楕円型境界値問題に帰着させることができる:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u) + \beta\nabla u) + \alpha_0 u = f \text{ in } \Omega, \\ \nabla u|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma, \quad i = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ここで, $0 \leq \alpha \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $\beta \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\alpha_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ とし,

$$\inf \beta(\Omega) \cup \inf \alpha_0(\Omega) > 0$$

とする. この問題には, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, クラス D_0 に属する解が一意に存在することが確かめられており, したがって $(\mathrm{AP})_\tau^\varepsilon$ には解 $\{u_{\varepsilon,i}\}_{i=1}^\infty \subset D_0$ がただ一つ存在する. すなわち, $\{u_{\varepsilon,i}\}_{i=1}^\infty$ は各 i について, 次の変分不等式を満たす:

$$\frac{1}{\tau}(u_{\varepsilon,i} - u_{\varepsilon,i-1}, \varphi)_H + \left(\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u_{\varepsilon,i}) + \frac{\beta}{\tau}\nabla(u_{\varepsilon,i} - u_{\varepsilon,i-1}), \nabla\varphi\right)_{[H]^N} = (f_i, \varphi)_H, \ \forall\varphi \in V.$$

4.2　主定理 1 の証明の概略

主定理の証明は主に Ascoli のコンパクトな埋め込み定理 (cf. [12, Corollary 4]) に依拠する．したがって, 次の有界性に関する補題を導くことが証明の鍵である．

補題 3. ある適当な τ_* が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$, $\tau \in (0,\tau_*)$ に対して以下の不等式が成り立つ:

$$|[u_\varepsilon]_\tau|^2_{L^\infty(0,T;\,H^2(\Omega))} \leq C_{\Omega,T,\alpha,\beta,f}(1+|u_0|^2_{H^2(\Omega)}), \tag{4.1}$$

$$|[u_\varepsilon]_\tau|^2_{W^{1,2}(0,T;\,V)} \leq C_{\Omega,T,\alpha,\beta,f}(1+|u_0|^2_V), \tag{4.2}$$

$$|[u_\varepsilon]_\tau|^2_{W^{1,2}(0,T;\,H^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\varepsilon}\, C_{\Omega,T,\alpha,\beta,f}(1+|u_0|^2_{H^2(\Omega)}).$$

この補題により,

$$\tau_* > \tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_n \downarrow 0 \text{ as } n \to \infty$$

を満たす列 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と, 関数列の極限 $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\,H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;\,H^2(\Omega))$ が存在して,

$$[u_\varepsilon]_{\tau_n} \to u_\varepsilon \text{ in } C([0,T];\,V), \text{ weakly in } W^{1,2}(0,T;\,H^2(\Omega)) \text{ as } n \to \infty,$$
$$[\overline{u_\varepsilon}]_{\tau_n} \to u_\varepsilon \text{ in } L^2(0,T;\,V) \text{ as } n \to \infty.$$

が成り立つ．これらの収束により,

$$(\partial_t u_\varepsilon(t), \varphi)_H + (\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon(t)) + \beta\nabla\partial_t u_\varepsilon(t), \varphi)_{[H]^N} = (f(t), \varphi)_H, \quad \forall \varphi \in V, \text{ a.e. } t \in (0,T). \tag{4.3}$$

及び,

$$\nabla u_\varepsilon(t)|_\Gamma \cdot n_\Gamma = \partial_t\left(\nabla u_\varepsilon(t)|_\Gamma \cdot n_\Gamma\right) = \nabla\partial_t u_\varepsilon(t)|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0, \text{ on } \Gamma, \text{ a.e. } t \in (0,T).$$

を得る．以上で $(\mathrm{S1})_\varepsilon$, $(\mathrm{S2})_\varepsilon$ が確かめられた．解の一意性, 連続依存性は (4.3) において $\varphi = u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2$ を代入することによって得られる．

4.3　主定理 2 の証明の概略

主定理 1 によって得られた関数列 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ は (4.1), (4.2) から $L^\infty(0,T;\,H^2(\Omega))$ 及び $W^{1,2}(0,T;\,V)$ で有界である．また, 関数列 $\{\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ は $[\mathscr{H}]^N$ で有界である．したがって,

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_n \downarrow 0 \text{ as } n \to \infty$$

を満たす $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及び, $u \in W^{1,2}(0,T;\,V)$, $\boldsymbol{w} \in [\mathscr{H}]^N$ が存在して,

$$u_{\varepsilon_n} \to u \text{ in } C([0,T];\,V), \text{ weakly in } W^{1,2}(0,T;\,V) \text{ as } n \to \infty,$$
$$\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u_{\varepsilon_n}) \to \boldsymbol{w} \text{ weakly in } [\mathscr{H}]^N \text{ as } n \to \infty$$

が成り立つ．したがって,

$$(\partial_t u(t), \varphi)_H + (\boldsymbol{w}(t) + \beta\nabla\partial_t u(t), \varphi)_{[H]^N} = (f(t), \varphi)_H, \; \forall \varphi \in V, \text{ a.e. } t \in (0,T). \tag{4.4}$$

また, 例 2 において定義した $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ に対して,

$$\alpha \nabla u_{\varepsilon_n}(t) \in \partial \widehat{\Psi}_{\varepsilon_n}(\nabla u_{\varepsilon_n}(t)), \text{ a.e. } t \in (0,T), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

が成り立つ. 命題 2 を適用して,

$$\boldsymbol{w}(t) \in \partial \widehat{\Psi}_0(\nabla u(t)) = \alpha \partial \gamma_0(\nabla u(t)), \text{ a.e. } t \in (0,T).$$

を得る. 以上により u は $(\mathrm{P})_0$ の解であることが示された.

次に, 境界において満たす性質を確かめる. (4.4) により,

$$\partial_t u(t) - \mathrm{div}\,(\boldsymbol{w}(t) + \beta \nabla \partial_t u(t)) = f \text{ in } H, \text{ a.e. } t \in (0,T). \tag{4.5}$$

(4.4), (4.5) から,

$$\begin{aligned} &[(\boldsymbol{w}(t) + \beta \nabla \partial_t u(t)) \cdot n_\Gamma]_\Gamma\,(\varphi|_\Gamma) \\ &\quad = (\mathrm{div}\,(\boldsymbol{w}(t) + \beta \nabla \partial_t u(t)), \varphi)_H + (\boldsymbol{w}(t) + \beta \nabla \partial_t u(t), \nabla \varphi)_{[H]^N} = 0, \ \forall \varphi \in V, \text{ a.e. } t \in (0,T) \end{aligned}$$

が成り立ち, (S2) が確かめられた. 連続依存性, 解の一意性は (4.4) において $\varphi = u^1 - u^2$ を代入することで容易に得られる.

参考文献

[1] H. Attouch. *Variational Convergence for Functions and Operators*. Applicable Mathematics Series. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.

[2] Pierluigi Colli, Gianni Gilardi, Ryota Nakayashiki, and Ken Shirakawa. A class of quasi-linear Allen–Cahn type equations with dynamic boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, Vol. 158, pp. 32–59, 2017.

[3] Mi-Ho Giga and Yoshikazu Giga. Very singular diffusion equations: second and fourth order problems. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, Vol. 27, No. 3, pp. 323–345, 2010.

[4] Yoshikazu Giga, Yohei Kashima, and Noriaki Yamazaki. Local solvability of a constrained gradient system of total variation. *Abstr. Appl. Anal.*, No. 8, pp. 651–682, 2004.

[5] Yoshikazu Giga, Hirotoshi Kuroda, and Noriaki Yamazaki. An existence result for a discretized constrained gradient system of total variation flow in color image processing. *Interdiscip. Inform. Sci.*, Vol. 11, No. 2, pp. 199–204, 2005.

[6] V. R. Gopala Rao and T. W. Ting. Solutions of pseudo-heat equations in the whole space. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 49, pp. 57–78, 1972/73.

[7] N. Kenmochi. Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications. *Bull. Fac. Education, Chiba Univ.*, Vol. 30, pp. 1–87, 1981.

[8] Ryo Kobayashi, James A. Warren, and W. Craig Carter. A continuum model of grain boundaries. *Phys. D*, Vol. 140, No. 1-2, pp. 141–150, 2000.

[9] Umberto Mosco. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Math.*, Vol. 3, pp. 510–585, 1969.

[10] Mariya Ptashnyk. Nonlinear pseudoparabolic equations as singular limit of reaction-diffusion equations. *Appl. Anal.*, Vol. 85, No. 10, pp. 1285–1299, 2006.

[11] R. E. Showalter and T. W. Ting. Pseudoparabolic partial differential equations. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 1, pp. 1–26, 1970.

[12] Jacques Simon. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, Vol. 146, pp. 65–96, 1987.