Maximal regularity of distributional solutions to degenerate elliptic systems for locally integrable data

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
宮川寛基 (Hiroki MIYAKAWA)

概要

p-Laplacian に代表される退化楕円型作用素を含む楕円型方程式においては, 与えられた外力項にある程度の可積分性がある場合, その弱解の存在が知られている. しかし外力の可積分性が低い場合には, 弱解の存在はよく分かっていない. 本発表では, p-Laplacian 型の楕円型作用素とそれよりも高い増大度を持つ吸収項を伴う楕円型方程式系を考え, 局所可積分な外力項に対するある種の弱解の存在およびその正則性について論じる. 本発表は赤木剛朗教授（東北大学）との共同研究に基づく.

1 導入

本小論では $d, N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を非有界な Lipschitz 領域とする. そして次の方程式系を考える.

$$(\mathsf{P}) \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{r-2}u = -\mathrm{div}(|f|^{p-2}f) + |g|^{r-2}g & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし $1 < p < r < \infty$, $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ とする. また $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$, $g \in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ は与えられた関数で, $\max\{1, p-1\} < q < p$, $\max\{1, r-1\} < s < r$ とする.

問題 (P) に関する研究は $\Omega = \mathbb{R}^d$, $p = 2$, $N = 1$, $f \equiv 0$, $|g|^{r-2}g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ の場合に対する Brezis [1] の結果が先駆的である. Brezis は吸収項にまつわるある種のエネルギー評価を用いることで局所可積分なデータに対して超関数解が存在することを示したが, 一方で超関数解の正則性, 特に最大正則性に関しては十分な議論が成されていなかった.

ここで楕円型方程式の解の最大正則性とは, 与えられたデータから期待されうる超関数解 u の最大の正則性を意味する. 例えば

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -\mathrm{div}(|f|^{p-2}f) & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

という方程式では, $f \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$ のとき, 方程式において対応している ∇u についても, $\nabla u \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$ であることが期待される. 実際, $p \leq q$ のときには p-Laplacian が, $W^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{R}^N)$ から $(W^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{R}^N))^*$ への極大単調作用素であることを用いてこれを証明することができる.

問題 (P) の場合であれば, $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$, $g \in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ に対して, $\nabla u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$, $u \in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ が, 最大正則性にあたる. 一方, 有界領域や可積分なデータに対しては, 近年,

p-Laplacian に代表される非線形楕円型作用素を含む問題 (ただし吸収項は伴わない) に対しても最大正則性に関する結果が得られるようになり (例えば [3] を参照), 線形楕円型方程式に対するいわゆる楕円型正則性理論の p-Laplacian 版が盛んに研究されている. 特に $q<p$, $s<r$ の場合には relative truncation 法を用いた新しいエネルギー評価法の発展が重要な役割を果たしている. 一方, relative truncation 法が非有界領域における局所可積分な外力項を持つ方程式にどの程度適用できるかは未知数であり, 実際, (P) で挙げた問題に対する解の最大正則性に関する結果は見当たらない. 本小論の目的は, 局所可積分な外力項を備えた方程式 (P) に対する超関数解の存在と, その最大正則性評価について議論することである.

2 準備

準備としていくつかの定義を与える.

定義 2.1. (i) 可測関数 $\omega:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ が $\omega>0$ a.e. in $\mathbb{R}^d$ をみたすとき, ω は**重み関数**であるという.

(ii) 指数 $\rho\in(1,\infty)$ と重み関数 $\omega\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に対し, ある定数 $C>0$ が存在して, 任意の開球 $B\subset\mathbb{R}^d$ に対して

$$\left(\fint_B \omega\,\mathrm{d}x\right)\left(\fint_B \omega^{-(\rho'-1)}\,\mathrm{d}x\right)^{1/(\rho'-1)}\le C$$

が成り立つとき, ω は **Muckenhoupt class** $\mathcal{A}_\rho$ に属しているといい, $\omega\in\mathcal{A}_\rho$ とかく. ただし, $\rho'=\rho/(\rho-1)$ は ρ の Hölder 共役指数であり, $\fint_B\omega\,\mathrm{d}x=\mu(B)^{-1}\int_B\omega\,\mathrm{d}x$ である. ここで μ は Lebesgue 測度とする.

(iii) 指数 $\rho\in[1,\infty)$, 重み関数 ω および可測集合 $D\subset\mathbb{R}^d$ に対して,

$$L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^N):=\left\{f:D\to\mathbb{R}^N\colon f\ \text{は可測関数で}\int_D|f|^\rho\omega\,\mathrm{d}x<+\infty\right\},$$
$$W^{1,\rho}_\omega(D;\mathbb{R}^N):=\left\{f\in L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^N)\ :\ \nabla f\in L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^{d\times N})\right\}$$

と定める. 関数空間 $L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^N)$ と $W^{1,\rho}_\omega(D;\mathbb{R}^N)$ は, ノルムをそれぞれ

$$\|f\|_{L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^N)}:=\left(\int_D|f|^\rho\omega\,\mathrm{d}x\right)^{1/\rho},\quad \|f\|_{W^{1,\rho}_\omega(D;\mathbb{R}^N)}:=\|f\|_{L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^N)}+\|\nabla f\|_{L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^{d\times N})}$$

で定めれば, どちらも回帰的 Banach 空間である.

(iv) 基礎空間を $X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N):=\overline{C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{X^{p,r}}}$ とし, そのノルムを

$$\|u\|_{X^{p,r}}:=\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})}+\|u\|_{L^r(\Omega;\mathbb{R}^N)}$$

と定める.

(v) 任意の $\varphi\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^{r-2}u\cdot\varphi\,\mathrm{d}x=\int_\Omega|f|^{p-2}f\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|g|^{r-2}g\cdot\varphi\,\mathrm{d}x$$

が成り立つような関数 $u\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ を (P) の**弱解**と呼ぶ.

(vi) まず $\rho_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ を, $0 \le \rho_R \le 1$ in $\mathbb{R}^d$, $\rho_R \equiv 1$ on $B_R := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < R\}$, $\operatorname{supp}\rho_R \subset \overline{B_{2R}}$, およびある定数 $C > 0$ が存在して $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\nabla\rho_R(x)| \le C/R$ をみたすような関数とする. このとき, 次のように境界条件を課す.

$$\text{任意の } R > 0 \text{ に対して } u\rho_R \in W_0^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^N). \tag{BC}$$

(vii) 任意の $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{r-2}u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^{p-2}f \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g|^{r-2}g \cdot \varphi \,\mathrm{d}x$$

が成り立ち, さらに (BC) を満たすような関数 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,\max\{1,p-1\}}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L_{\mathrm{loc}}^{\max\{1,r-1\}}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ を (P) の**超関数解**と呼ぶ.

注意 2.1. 上の境界条件 (BC) は, もし $u \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ ならば任意の $R > 0$ に対して $\mathrm{Tr}(u\rho_R) = u\rho_R$ on $\partial\Omega$ であるため, $u\rho_R = 0$ on $\partial\Omega$ と同値であり, $R > 0$ の任意性から $u = 0$ on $\partial\Omega$ と同値である. ここで $\mathrm{Tr} : W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^N) \to L^1(\partial\Omega;\mathbb{R}^N)$ はトレース作用素である.

3 主定理

可積分な関数 $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$, $g \in L^r(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対しては, Nemitskii 作用素と単調作用素の理論により (P) の弱解 $u \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ の一意存在が示される. 一方, 以下の場合には一般に弱解の存在を示すことができない.

- 指数 $q < p$, $s < r$ に対して $f \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$ または $g \in L^s(\Omega;\mathbb{R}^N)$ の場合.
- 関数 f, g のいずれかが Ω 上で局所可積分でしかない場合.

本小論の主定理は以下の通りである.

定理 3.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を非有界な Lipschitz 領域とし, $1 < p < r < \infty$ とする. このとき, ある $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p,r,d,N,\Omega) \in (0, p/r]$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ に対し, $q := p - \varepsilon$, $s := r - \varepsilon$ とおき, $f \in L_{\mathrm{loc}}^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$ および $g \in L_{\mathrm{loc}}^s(\Omega;\mathbb{R}^N)$ とするとき, 次が成り立つ.

(i) (P) の超関数解 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L_{\mathrm{loc}}^s(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が存在する.

(ii) 任意に $R > 0$ をとるたびに, 重み関数 $\omega := (M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^{-\varepsilon}$ に対して $u \in W_\omega^{1,p}(\Omega_R;\mathbb{R}^N) \cap L_\omega^r(\Omega_R;\mathbb{R}^N)$ となる.

(iii) さらにある定数 $C = C(p,r,\varepsilon,d,N,\Omega) > 0$, $C_R = C_R(R,p,r,\varepsilon,d,N,\Omega) > 0$ が存在して, 次の不等式が成り立つ.

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^p \omega \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R} |u|^r \omega \,\mathrm{d}x \le C\left(\int_{\Omega_{2R}} |f|^p \omega \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{2R}} |g|^r \omega \,\mathrm{d}x\right) + C_R. \tag{3.1}$$

ただし $\Omega_R := \Omega \cap B_R$ とし, $M[\,\cdot\,]$ は Hardy-Littlewood の極大関数を表す.

注意 3.1. 上の定理の (i) では, 外力から期待できる最大の可積分性をもつ超関数解の存在が示されている. 次に (ii) では, 得られた超関数解がより強い可積分性を局所的にもつことが示されてい

る．与えられた関数 f, g についてはそれぞれ $f \notin L^p(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ および $g \notin L^r(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ であるが, f, g の特異性を抑えるような重み関数 ω をかけることによって, $f \in L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ および $g \in L^r_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ となる．最後に (iii) では, (ii) で得た可積分性に対応する局所エネルギー評価を得ている．

4　いくつかの重要な補題

ここでは, 証明に必要ないくつかの補題を記す．まずは基礎空間に関する補題である．

補題 4.1. 関数空間 $X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ は回帰的な Banach 空間であり,

$$W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^r(\Omega;\mathbb{R}^N) \subset X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N) \not\subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ．さらに, 作用素 $T : u \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N) \mapsto -\Delta_p u + |u|^{r-2}u \in (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ は極大単調作用素である．

補題 4.2. 任意の $F \in (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ に対して, ある $F_1 \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$ および $F_2 \in L^{r'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$\langle F, u\rangle_{X^{p,r}} = \int_\Omega F_1 \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x + \int_\Omega F_2 \cdot u \,\mathrm{d}x \quad \text{for } u \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ．

次に, 重み付きの Lebesgue 空間から通常の Lebesgue 空間への埋め込みに関する補題を与える．

補題 4.3 ([2, pp. 1125,1126])**.** $1 < p < \infty$, $\omega \in \mathcal{A}_p$ とする．このとき, ある $s \in (1, p)$ が存在して, 任意の有界領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ に対して, 連続な埋め込み $L^p_\omega(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(D;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．

また任意の $s \in (1,p)$ に対して, 重み関数 ω として特別なものを考えれば, $L^p_\omega(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(D;\mathbb{R}^N)$ および $L^{s'}(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p'}_{\omega^{1-p'}}(D;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．すなわち次が成り立つ．

補題 4.4. $D \subset \mathbb{R}^d$ を有界領域, $1 < s < p < \infty$, および重み関数 ω に対し, $\omega^{-1} \in L^{s/(p-s)}(D)$ を仮定する．このとき, 連続な埋め込み $L^p_\omega(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(D;\mathbb{R}^N)$ および $L^{s'}(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p'}_{\omega^{1-p'}}(D;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．さらに $\omega \le 1$ a.e. in D が成り立つとき, 連続な埋め込み $L^{p'}_{\omega^{1-p'}}(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p'}_\omega(D;\mathbb{R}^N)$ が成り立ち, したがって連続な埋め込み $L^{s'}(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p'}_\omega(D;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．

最後に, 数列の漸化不等式に関する補題を述べる．

補題 4.5 (An interpolation lemma [4, Lemma 4.3])**.** 非負数列 (Y_n) は有界であり, ある $C > 0$, $b > 1$ および $\alpha \in (0,1)$ が存在して

$$Y_n \le C b^n Y_{n+1}^{1-\alpha} \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}_{\ge 0},$$

が成り立つとする．このとき

$$Y_0 \le \left(\frac{2C}{b^{1-1/\alpha}}\right)^{1/\alpha}$$

が成り立つ．

5　弱解の存在と一意性

ここでは, $p = q$, $r = s$ の下で, (P) の弱解が存在することとその一意性を, 単調作用素の理論を用いて示す.

命題 5.1. $p = q$, $r = s$ の下, (P) の弱解は一意に存在する.

この命題を示すために, いくつかの準備をする. 作用素 $\mathcal{B} : X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N) \to (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ を, $u \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して $\mathcal{B}u := -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{r-2}u$ と定める. すなわち任意の $\varphi \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\langle \mathcal{B}u, \varphi\rangle_{X^{p,r}} := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{r-2}u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x$$

と定める. このとき次が成り立つ.

補題 5.1. 任意の $u \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して, $\mathcal{B}u \in (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ である.

証明. 任意に $u \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ をとる. このとき, まず積分の線形性によって $\mathcal{B}u$ は線形である. さらに

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{B}u, \varphi\rangle_{X^{p,r}}| &= \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{r-2}u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x \right| \\
&\le \||\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{L^{p'}}\|\nabla\varphi\|_{L^p} + \||u|^{r-1}\|_{L^{r'}}\|\varphi\|_{L^r} \\
&\le (\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + \|u\|_{L^r}^{r-1})\|\varphi\|_{X^{p,r}}
\end{aligned}$$

が成り立つから $\mathcal{B}u$ は有界作用素である. したがって, $\mathcal{B}u \in (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ である. □

さらに次の補題が成り立つ:

補題 5.2. 作用素 $\mathcal{B} : X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N) \to (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ は単調作用素である.

証明. まず $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$, $1 < t < \infty$, $v, w \in L^t(\Omega;\mathbb{R}^n)$ を任意にとると Young の不等式によって

$$\begin{aligned}
\langle |v|^{t-2}v - |w|^{t-2}w, v - w\rangle_{L^t} &= \|v\|_{L^t}^t + \|w\|_{L^t}^t - \langle |v|^{t-2}v, w\rangle_{L^t} - \langle v, |w|^{t-2}w\rangle_{L^t} \\
&\ge \|v\|_{L^t}^t + \|w\|_{L^t}^t - \left(\frac{\|v\|_{L^t}^t}{t'} + \frac{\|w\|_{L^t}^t}{t}\right) - \left(\frac{\|v\|_{L^t}^t}{t} + \frac{\|w\|_{L^t}^t}{t'}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって任意の $u_1, u_2 \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ をとり, $(n, t, v, w) := (d \times N, p, \nabla u_1, \nabla u_2)$, (N, r, u_1, u_2) に対して上の議論を適用することで, $\mathcal{B}$ が単調作用素であることがわかる. □

補題 5.3. 作用素 $\mathcal{B} : X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N) \to (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ は強圧的かつ連続である.

以上で Proposition 5.1 の証明の準備ができた.

命題 5.1 の証明.

まず $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$, $g \in L^r(\Omega;\mathbb{R}^N)$ であるから, (P) の右辺である $-\mathrm{div}(|f|^{p-2}f)+|g|^{r-2}g$ を

$$\langle -\mathrm{div}(|f|^{p-2}f)+|g|^{r-2}g,\varphi\rangle_{X^{p,r}} := \int_\Omega |f|^{p-2}f\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g|^{r-2}g\cdot\varphi\,\mathrm{d}x \quad \text{for } \varphi\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$$

と表すと, 積分の線形性と Hölder の不等式から $-\mathrm{div}(|f|^{p-2}f)+|g|^{r-2}g \in (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ であることがわかる. ここで単調性と連続性から, $\mathcal{B}$ は極大単調作用素である. さらに強圧性から $\mathcal{B}$ は全射である. よって, ある (P) の弱解 $u\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が存在する.

次に (P) の弱解の一意性を示す. まず $u_1,u_2\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が (P) の弱解であるとする. このとき, テスト関数として $u_1-u_2\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ をとり, 弱形式の差を考えれば,

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\cdot\nabla(u_1-u_2)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (|u_1|^{r-2}u_1-|u_2|^{r-2}u_2)\cdot(u_1-u_2)\,\mathrm{d}x = 0$$

が成り立つ. ここで p-Laplacian の単調性と, 関数 $x\mapsto |x|^{r-2}x$ の狭義単調性から

$$u_1 = u_2 \quad \text{a.e. in } \Omega$$

が成り立ち, (P) の弱解の一意性が示された. □

6 局所エネルギー評価

ここでは, 弱解に対するア・プリオリ評価を行う. [3, Proposition 4.1] の議論を非有界領域および局所可積分なデータの場合に拡張することで, 次の命題が示される.

命題 6.1. $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ を非有界 Lipschitz 領域とし, $1<p<r<\infty$ とする. このとき, 次をみたすような $\varepsilon_1>0$ が存在する. 任意に $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$, $h\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\backslash\{0\}$, $0\le\delta\le 1$ をとり固定する. そして $f\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$, $g\in L^r(\Omega;\mathbb{R}^N)$ とし, $u\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ を, f および g に対応する (P) の弱解とする. このとき各 $R>0$ に対して, 定数 $C=C(\Omega,d,N,p,r,\varepsilon)>0$ および $C_R=C_R(R,\Omega,d,N,p,r,\varepsilon)>0$ が存在して,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_R}|\nabla u|^p\omega\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R}|u|^r\omega\,\mathrm{d}x \\ \le C_R\left(\int_{\Omega_{2R}}|u|^p\omega\,\mathrm{d}x+1\right) + C\left(\int_{\Omega_{2R}}|f|^p\omega\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{2R}}|g|^r\omega\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned} \tag{6.1}$$

が成り立つ. ただし $\omega=(M[h\chi_{\Omega_{2R}}]+\delta)^{-\varepsilon}$ とする.

この命題の証明では, [3, Proposition 4.1] とは異なり領域 Ω が非有界であるため, cut-off 関数 $\rho_R\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ を用いる. ここで ρ_R は 2 節で定義したものとする. そのため, (6.1) の両辺の積分領域には差がある. また, この命題は主定理の証明における重要なステップであるが, 証明は非常に複雑であるため, 紙面の都合上割愛する.

7 主定理の証明

まず $\varepsilon_0 > 0$ を, 命題 6.1 でとった ε_1 を用いて

$$\varepsilon_0 := \min\left\{\varepsilon_1, \frac{p}{r}\right\}$$

により定める. 次に任意に $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ をとり固定する. この ε に対して $q := p - \varepsilon$, $s := r - \varepsilon$ と定め, $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N}), g \in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ および $R > 0$ を任意にとり固定する. $f^k := \min\{k, |f|\}(f/|f|) \cdot \chi_{B_k} \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$, $g^k := \min\{k, |g|\}(g/|g|) \cdot \chi_{B_k} \in L^r(\Omega; \mathbb{R}^N)$ と定め, $u^k \in X^{p,r}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ を

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u^k|^{p-2}\nabla u^k) + |u^k|^{r-2}u^k = -\mathrm{div}(|f^k|^{p-2}f^k) + |g^k|^{r-2}g^k & \text{in} \ \ \Omega, \\ u^k = 0 & \text{on} \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

の弱解とする. この弱解および $h := |f|+|g|$, $\delta := 1$ に対して命題 6.1 を適用すると,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_R} \frac{|\nabla u^k|^p}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R} \frac{|u^k|^r}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x \\ &\quad\le C_R\left(\int_{\Omega_{2R}} \frac{|u^k|^p}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x + 1\right) \\ &\qquad + C\left(\int_{\Omega_{2R}} \frac{|f^k|^p}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{2R}} \frac{|g^k|^r}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right) \\ &\quad\le C_R\left(\int_{\Omega_{2R}} \frac{|u^k|^p}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x + 1\right) \\ &\qquad + C\left(\int_{\Omega_{2R}} \frac{|f|^p}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{2R}} \frac{|g|^r}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに次が成り立つ.

命題 7.1. 任意の $R > 0$ に対し, $\omega := (M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^{-\varepsilon}$ とおくと, $(u^k)_k$ は $L^r_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ ノルムに関して有界である.

証明. $R_0 := R$, $R_n := R + \sum_{j=1}^n \frac{R}{2^j}$ とおき, $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ を, $0 \le \rho_n \le 1$ in $\mathbb{R}^d$, $\mathrm{supp}\,\rho_n \subset \overline{B_{R_{n+1}}}$, $\rho_n|_{B_{R_n}} \equiv 1$ で, $|\nabla\rho_n| \le C2^{n+1}/R$ と $R > 0$ によらない定数 C で表せるものとする. そこで次のような場合分けをする:

(i) ある $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が存在して $\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^r\omega\,\mathrm{d}x$ が k について有界であるとき:
このときは $\int_{\Omega_R} |u^k|^r\omega\,\mathrm{d}x$ も k について有界である.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して $\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^r\omega\,\mathrm{d}x$ が k について有界でないとき:
このときは背理法で示す. すなわち $\int_{\Omega_R} |u^k|^r\omega\,\mathrm{d}x$ が k について有界でないと仮定する.
命題 6.1 の証明で用いる cut-off 関数 ρ_R として ρ_n を用いると,

$$\int_{\Omega_{R_n}} |\nabla u^k|^p\omega\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{R_n}} |u^k|^r\omega\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\le C_n \left(\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^p \omega \,\mathrm{d}x + 1 \right) \\
&\quad + C \left(\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |f^k|^p \omega \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{R_{n+1}}} |g^k|^r \omega \,\mathrm{d}x \right)
\end{aligned}
$$

となる．ここで C_n は

$$
C_n \le C \left[\left(\frac{2^{n+1}}{R} \right)^p + \left(\frac{2^{n+1}}{R} \right)^{p'} + \left(\frac{2^{n+1}}{R} \right)^{p'r'/(p'-r')} \right]
$$

をみたす定数である．さらに $\omega \le 1$ a.e. に注意し, 単位球の体積を $|\omega_d|$ と表す．Hölder の不等式により,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^p \omega \,\mathrm{d}x &\le \left(\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^r \omega^{r/p} \,\mathrm{d}x \right)^{p/r} \left(2R - \frac{R}{2^{n+1}} \right)^{d(r-p)/r} |\omega_d|^{(r-p)/r} \\
&\le \left(\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^r \omega \,\mathrm{d}x \right)^{p/r} \left((2R)^d |\omega_d| \right)^{(r-p)/r}
\end{aligned}
$$

であることを用いて評価をすれば, 結果としてある定数 $\gamma, C > 0$ が存在して, 十分大きな k に対して

$$
\int_{\Omega_{R_n}} |u^k|^r \omega \,\mathrm{d}x \le C 2^{\gamma n} \left(\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^r \omega \,\mathrm{d}x \right)^{p/r}
$$

が成り立つ．よって, 補題 4.5 により背理法の仮定に矛盾し, $\int_{\Omega_R} |u^k|^r \omega \,\mathrm{d}x$ が k について有界であることがわかる．

従って, いずれの場合にも主張を示すことができた． □

注意 7.1. 主定理における $p < r$ という仮定は, 補題 4.5 を適用するために必要となる．

命題 7.2. 各 $R > 0$ に対して, $(u^k)_k$ は $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$, $L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ および $L^s(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ で有界であり, さらに $(\nabla u^k)_k$ は $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ および $L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ で有界である．

証明. 命題 7.1 の途中の議論によって $(u^k)_k$ は $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ で有界である．よって命題 6.1 により $(\nabla u^k)_k$ は $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ で有界である．さらに補題 4.4 より, $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$, $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N}) \hookrightarrow L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ および $L^r_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ は連続な埋め込みだから, $(u^k)_k$ は $L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ と $L^s(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ で, $(\nabla u^k)_k$ は $L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ でそれぞれ有界である．したがって主張が示された． □

次に各関数空間の回帰性によって適切な部分列をとれば, $R > 0$ によらない $u \in W^{1,p}_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N) \cap L^r_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$, $v_1 \in L^{p'}_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ および $v_2 \in L^{r'}_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
u^k \to u \qquad & \text{weakly in } W^{1,q}(\Omega_R; \mathbb{R}^N), \\
& \text{weakly in } L^r_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N), \\
& \text{weakly in } L^s(\Omega_R; \mathbb{R}^N),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|u^k|^{r-2}u^k \to v_2 &\quad \text{weakly in } L^{r'}_\omega(\Omega_R;\mathbb{R}^N),\\
\nabla u^k \to \nabla u &\quad \text{weakly in } L^{p}_\omega(\Omega_R;\mathbb{R}^{d\times N}),\\
&\quad \text{weakly in } L^{q}(\Omega_R;\mathbb{R}^{d\times N}),\\
|\nabla u^k|^{p-2}\nabla u^k \to v_1 &\quad \text{weakly in } L^{p'}_\omega(\Omega_R;\mathbb{R}^{d\times N})
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

命題 7.3. もし $p-q\le p/r$ ならば, 任意の $\varphi\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して

$$
\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |u^k|^{r-2}u^k\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega v_2\cdot\varphi\,\mathrm{d}x.
$$

注意 7.2. 主定理では $\varepsilon_0\le p/r$ としているため, $\varepsilon=p-q\le p/r$ はみたされている.

ここで u^k は (P) の弱解であったから, 任意の $\varphi\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して

$$
\int_\Omega |\nabla u^k|^{p-2}\nabla u^k\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u^k|^{r-2}u^k\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f^k|^{p-2}f^k\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g^k|^{r-2}g^k\cdot\varphi\,\mathrm{d}x
$$

が成り立つ. 上式で $k\to\infty$ とすると

$$
\int_\Omega v_1\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega v_2\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^{p-2}f\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g|^{r-2}g\cdot\varphi\,\mathrm{d}x
$$

が成り立つ. 最後に弱極限の特定を行うことで,

$$
\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{r-2}u\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^{p-2}f\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g|^{r-2}g\cdot\varphi\,\mathrm{d}x
$$

を得る. この弱極限の特定は非自明である. 重み付き div-curl lemma [2, Theorem 2.6] などを用いて証明できるが, ここでは紙面の都合上省略する.

以上によって超関数解 u の存在が示された. また, 局所評価 (3.1) に関しては, 近似解 u^k の弱収束性と各ノルムの弱下半連続性から示される.

最後に境界条件 (BC) をみたしていることを確かめる. $R>0$ を任意にとり固定する. まず $u^k\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ より, $u^k\rho_R\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ である. さらに $\mathrm{supp}(u^k\rho_R)$ は有界なので, $u^k\rho_R\in W_0^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ である. そして $(u^k\rho_R)_k$ は $W_0^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ で有界なので, 回帰性からある $v\in W_0^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が存在して,

$$
u^k\rho_R\to v \quad \text{weakly in } W_0^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N) \tag{7.1}
$$

が適切な部分列をとれば成り立つ. 一方で $u^k\to u$ weakly in $W^{1.q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ であり, 各 $R>0$ に対して埋め込み $W^{1.q}(\Omega_{2R};\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^q(\Omega_{2R};\mathbb{R}^N)$ はコンパクトであるから, $u^k\to u$ in $L^q(\Omega_{2R};\mathbb{R}^N)$ および,

$$
u^k\rho_R\to u\rho_R \quad \text{in } L^q(\Omega_{2R};\mathbb{R}^N) \text{ and a.e. in } \Omega_{2R} \tag{7.2}
$$

が適切な部分列に対して成り立つ. そして (7.1), (7.2) および $R>0$ の任意性によって $u\rho_R=v$ in Ω なので, $u\rho_R\in W_0^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ. さらに supp ρ_R は有界であるから, $u\rho_R\in W_0^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ. したがって境界条件 (BC) が示された.

注意 7.3. ここまでの議論は, (P) を一般化した境界値問題

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(\cdot, \nabla u) + |u|^{r-2}u = -\operatorname{div}(|f|^{p-2}f) + |g|^{r-2}g & \text{in} \ \ \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

に対しても適用できる．ここで $A : \Omega \times \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}^{d\times N}$ は Carathéodory 関数であって, 次の仮定をみたすものとする．ある定数 $C_1,\ C_2 > 0$ と, ある非負値関数 $\beta_1 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\beta_2 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が存在して,

$$\begin{aligned} A(x, z_1) \cdot z_1 &\geq C_1 |z_1|^p - \beta_1(x), && \text{(強圧性)} \\ |A(x, z_1)| &\leq C_2 |z_1|^{p-1} + \beta_2(x), && \text{(有界性)} \\ (A(x, z_1) - A(x, z_2)) \cdot (z_1 - z_2) &\geq 0 && \text{(単調性)} \end{aligned}$$

が任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{d\times N}$ とほとんどすべての $x \in \Omega$ に対して成り立つ.

参考文献

[1] Brezis, H., Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without conditions at infinity, Applied Math. Optimization **12** (1984), 271–282.

[2] Bulíčhek, M., Diening, A., Schwarzacher, S., Existence, uniqueness and optimal regularity results for very weak solutions to nonlinear elliptic systems, Anal. PDE **9** (2016), 1115–1151.

[3] Bulíčhek, M., Schwarzacher, S., Existence of very weak solutions to elliptic systems of p-Laplacian type, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **55** (2016), art. 52, 14 pp.

[4] DiBenedetto, E., *Degenerate Parabolic Equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1991.