

平均曲率流方程式の障害物問題に対するゲーム理論的アプローチ

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
三栖邦康 (Kuniyasu MISU)

概要

*¹本研究では、平均曲率流方程式のある種の障害物問題の解の漸近形を考える。平面上において、障害物が初期曲線の内側にある場合、初期曲線と障害物についてのある種の仮定の下、曲線に囲まれる領域が、時間無限大で障害物の凸包に収束することを示した。また、駆動力項付きの方程式についても考察し、いくつかの計算例を与えた。証明においては、Kohn-Serfaty(2006) [9] で与えられているゲームを拡張したゲームを用いる。そのゲームにおいて、プレイヤーの簡単な戦略の組み合わせで、ゲームの駒の到達可能性を考える。

1 導入

1.1 平均曲率流方程式の障害物問題

平均曲率流方程式とは、曲面がその各点での平均曲率の速さで、法線方向に動く様子を表す方程式である。曲面の内側を開集合で表現することにより、それはしばしば次のように書かれる。

$$V = -\kappa \text{ on } \partial D_t. \quad (1)$$

ここで、 $\{D_t\}_{t>0}$ は \mathbb{R}^d の未知の開集合の族である。 V は ∂D_t 上の点の外向き法線方向の速度であり、 κ はその点での ∂D_t の平均曲率である。 時間発展で動く曲面 $\{\partial D_t\}_{t\geq 0}$ を指定するためには、開集合 D_0 を初期集合として与える。 平均曲率流方程式は、材料化学者の Mullins によって、金属を焼きなます時の粒界の動きを記述する方程式として最初に発表されたもので、現在ではノイズ除去等の画像処理への応用もあり、数学のみならず、自然科学、工学と幅広い分野で関心を持たれている方程式である。

一方、**障害物問題**とは、障害物と呼ばれる、解が透過できない領域を持つ問題のことである。本研究では主に次のような障害物問題を考える。

$$\begin{cases} V = -\kappa \text{ on } \partial D_t, \\ O_- \subset D_t. \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 O_- は与えられた障害物であり、 \mathbb{R}^d の開集合である。本研究の主目的は、(2) の解の漸近挙動 (特に $d = 2$ の場合) を調べることである。

*¹ 本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものである。

曲線や曲面を表現する方法には、グラフ表示、パラメタ表示、等高面表示などがあるが、ここでは等高面表示を考えることにしよう。例えば、(1) に従う曲面の時間発展 $\{\partial D_t\}_{t \geq 0}$ を、 $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ 上の関数 u を用いて、 $\partial D_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x, t) = 0\}$ と表現することになると、関数 u は次のような偏微分方程式を満たすべきであることが分かる。

$$\begin{cases} u_t(x, t) - |Du(x, t)| \operatorname{div} \left(\frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|} \right) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 u_0 は $\partial D_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u_0(x) = 0\}$ を満たす関数である。このように、等高面表示に使われる関数が満たす方程式のことを**等高面方程式**といい、等高面方程式を用いて曲面の時間発展を考える方法のことを**等高面法**という。等高面方程式を数学的に厳密に扱うには、方程式の可解性、解の一意性その他、幾何性を確かめる必要がある。幾何性とは、曲面の時間発展が曲面の表示の仕方に依らないという性質のことである。すなわち、 $\partial D_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u_0(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid v_0(x) = 0\}$ を満たす初期関数 u_0, v_0 に対する解をそれぞれ u, v とすると、 $\{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x, t) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid v(x, t) = 0\}$ が任意の $t > 0$ で成り立つということである。Evans-Spruck [5] および陳・儀我・後藤 [1] は、等高面方程式に対して、**粘性解**という弱解を考えることで、これらの条件をクリアした。粘性解に関してはCrandall-石井-Lions [2] を、等高面方程式の数学解析に関しては儀我 [6] を、参考文献として加えて挙げておく。

Mercier [10] によると、等高面法は平均曲率流方程式の障害物問題に対しても、尚有効である。(2) に対応する等高面方程式は

$$\begin{cases} u_t(x, t) - |Du(x, t)| \operatorname{div} \left(\frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|} \right) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^d, \\ \Psi_-(x) \leq u(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \end{cases} \quad (4)$$

である。ここで、 Ψ_- は障害物を表す関数であり、 $O_- = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \Psi_-(x) > 0\}$ を満たすリプシッツ連続関数とする。本研究では、この偏微分方程式の粘性解を通して、(2) の解の挙動を調べる。

1.2 ゲーム解釈

さて、(4) の粘性解を調べるわけであるが、そのためにその粘性解を更に近似することを考えよう。古典解（微分ができる解）で近似するというやり方（石井・鎌田・小池 [8]）もあるが、ここではあるゲームの値関数によって、粘性解を近似する。

ゲームについて説明するにあたって、粘性解とゲームの関係について先に述べておこう。粘性解の概念は元々、Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式において、ある種の最適制御問題の値関数を一意的な解として捕捉する解概念として、Crandall-Lions [3] により導入された。粘性解の概念はHamilton-Jacobi-Isaacs 方程式においても有効で、この場合は微分ゲームに現れる値関数を捕捉している（Evans-Souganidis [4]）。ここでいう微分ゲームは二人零和確定ゲームであり、その値関数とは、微分ゲームにおける初期位置等の入力に対して、両プレイヤーが最善の戦略を取った場合の、片方のプレイヤーのコスト（つまりはもう片方のプレイヤーの利益）を出力する関数のことである。

Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式や Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程式は 1 階の方程式であるが、(3) のような 2 階の方程式を最適制御問題やゲームで捉える場合、通常はランダムな要素が入り、確率解

析が必要となる。そんな中、(3) の粘性解を表現する確定ゲームが、Kohn-Serfaty [9] により与えられた。このゲームは、障害物問題 (4) に対応するゲームを考える上でのベースとなるので、ここでそのルールを特に $d = 2$ の場合で説明する。

ゲームにおける二人のプレイヤーは先後が決まっているので、それぞれ先手、後手と呼ぶことにする。平面上に駒が一つあり、決められた時間の間、先手と後手の選択に応じて駒が動き、ゲーム終了時の駒の位置によって得点が決まる。駒の初期位置 $x \in \mathbb{R}^2$ 、ゲームが行われる時間 $t > 0$ 、近似パラメーター $\epsilon > 0$ は固定する。プレイヤーは時間 ϵ^2 ごとに選択をし、それに応じて駒が動く。すなわち、ゲームは $N = \lceil t\epsilon^{-2} \rceil$ ラウンド ($\lceil r \rceil$ は r 以上の最小の整数を表す。) からなる。各ラウンド i ($i = 1, 2, \dots, N$) において以下が行われる。

1. 先手が平面上の単位ベクトル v_i を選ぶ。
2. 後手が先手の選択を見た後、 $b_i \in \{\pm 1\}$ を選ぶ。
3. 両者の選択に応じて、駒が以下のように動く。

$$x_i = x_{i-1} + \sqrt{2}\epsilon b_i v_i.$$

ここで、 x_i はラウンド i での駒の位置を表し、 $x_0 = x$ である。 $u_0(x_N)$ が先手の得点 (すなわち後手のコスト) となる。

このゲームにおいて、両プレイヤーが最善の選択をした場合の先手の得点を $u^\epsilon(x, t)$ とし、これが値関数である。値関数 u^ϵ は (3) の粘性解を近似する。収束の意味については次章にて改めて述べる。

2 結果

2.1 方程式 (4) のゲーム解釈

Kohn-Serfaty [9] のゲームに基づき、障害物問題 (4) のゲーム解釈を与えた。障害物が加わったことに伴い、ゲームのルールが次のように修正される。

各ラウンド i におけるアクションは、

1. 先手がこのラウンドでゲームを辞めるかどうかを決める。
2. 先手が平面上の単位ベクトル v_i を選ぶ。
3. 後手が先手の選択を見た後、 $b_i \in \{\pm 1\}$ を選ぶ。
4. 両者の選択に応じて、駒が以下のように動く。

$$x_i = x_{i-1} + \sqrt{2}\epsilon b_i v_i.$$

となる。先手が最後までゲームを辞めなかった場合の先手の得点は先述と同様 $u_0(x_N)$ であり、ラウンド i で辞めた場合は、 $\Psi_-(x_i)$ が先手の得点となる。

このゲームの値関数 u^ϵ に対して、次の極限を考える。

$$\bar{u}(x, t) := \overline{\lim}_{\substack{(y,s) \rightarrow (x,t) \\ \epsilon \searrow 0}} u^\epsilon(y, s), \quad \underline{u}(x, t) := \underline{\lim}_{\substack{(y,s) \rightarrow (x,t) \\ \epsilon \searrow 0}} u^\epsilon(y, s).$$

命題 1. \bar{u} , \underline{u} はそれぞれ (4) の粘性劣解, 粘性優解である。

(4) の粘性解の比較原理 ([10, 8]) と、この収束の結果から、 $\epsilon \searrow 0$ で u^ϵ が粘性解 u に局所一様収束することが得られる。

このゲームは **optimal stopping time problem** と呼ばれるものの一種でもあり、 Ψ_- は stopping cost と呼ばれる。障害物を表す関数を stopping cost と見なす考え方は最適制御理論においては標準的である。

尚、以降では多次元の場合や駆動力項が付いた場合も登場するが、それらの場合でも対応するゲーム解釈が得られる。

2.2 方程式 (2) の解の漸近挙動

まず、本稿にて用いる (2) の解の定義を述べる。 \mathbb{R}^d 上の有界開集合 D_0 に対して、 $E_0 := \overline{D_0}$ とし、初期関数 u_0 を $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u_0(x) > 0\}$, $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u_0(x) \geq 0\}$ を満たすものとする。 u を初期関数 u_0 の時の (4) の粘性解とする。 $D_t := \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x, t) > 0\}$, $E_t := \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x, t) \geq 0\}$ とし、開集合族 $\{D_t\}_{t \geq 0}$ と閉集合族 $\{E_t\}_{t \geq 0}$ の組を (2) の解とする。

集合族 $\{D_t\}_{t \geq 0}$ に対して、集合の上極限と下極限を

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D_t := \bigcap_{\tau > 0} \bigcup_{t > \tau} D_t, \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D_t := \bigcup_{\tau > 0} \bigcap_{t > \tau} D_t$$

で定義する。特に $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D_t = \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D_t$ の時、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_t := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D_t = \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D_t$$

と書く。

次に漸近形についての結果を述べるために、初期集合 D_0 と障害物 O_- に対して、以下のように（グラフ理論の意味での）グラフ $G = (V, E)$ を定義する。

$$V := \{O \subset \mathbb{R}^2 \mid O \text{ は } O_- \text{ の連結成分}\},$$

$$E := \{\langle O, P \rangle \mid O, P \in V \text{ かつ、ある } x \in O \text{ と } y \in P \text{ について } l_{x,y} \subset D_0\},$$

ここで、 $l_{x,y}$ は x, y を両端に持つ線分を表すものとする。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は非順序対を表すものとする。

以下が主結果である。

定理 2. $d = 2$ およびグラフ G が連結グラフであることを仮定する（図 1）。この時、

$$Co(O_-) \subset \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D_t \subset \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D_t \subset \overline{Co(O_-)}$$

および

$$Co(O_-) \subset \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} E_t \subset \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} E_t \subset \overline{Co(O_-)}$$

が成り立つ。ただし、 $Co(O_-)$ は O_- の凸包を表すものとする。

次の定理は、 O_- にある種の狭義凸性を仮定した場合に、有限の時間が経過すると、曲面が障害物にぴったり張り付くことを表す。この結果は $d = 2$ である必要はない。

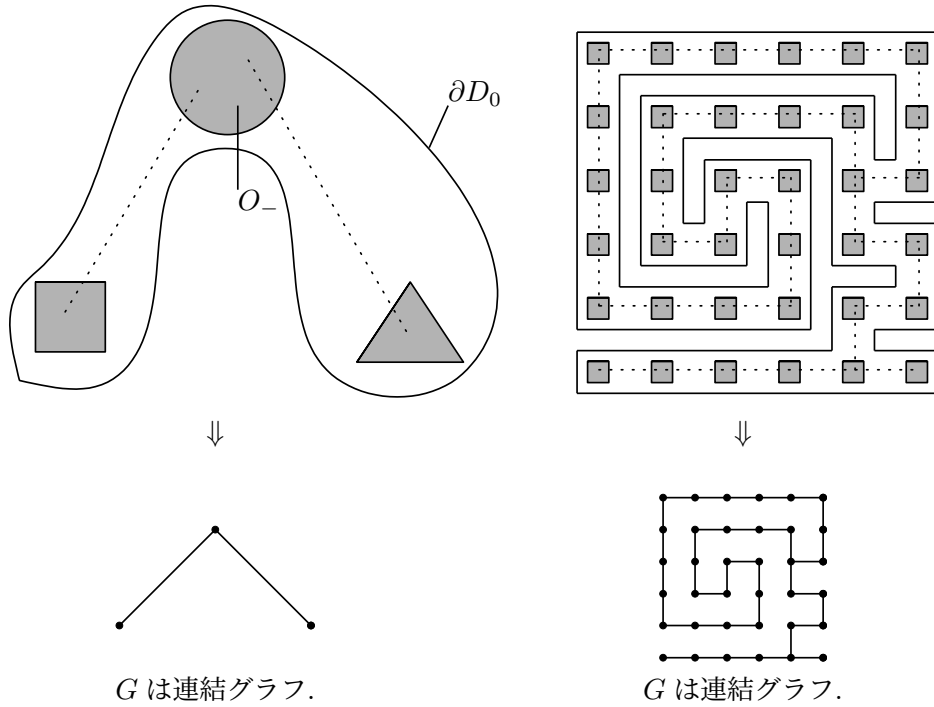


図1 定理2の仮定を満たす D_0 と O_- の例

定理 3. O_- に対して, 以下の条件を仮定する:

$$\exists r > 0, \forall w \in \partial O_-, \exists z \in B_r(w), \text{ s.t. } O_- \subset B_{|z-w|}(z).$$

但し, $B_r(w) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x - w| < r\}$ とする.

この時,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_t = O_-$$

および

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_t = \overline{O_-}$$

が成立する. 更に, ある $\tau > 0$ が存在して, $D_t = D_\tau = O_-$ および $E_t = E_\tau = \overline{O_-}$ が, 任意の $t \geq \tau$ で成立する.

2.3 駆動力項付きの場合の解の漸近挙動

(2) の他に,

$$\begin{cases} V = -\kappa + \nu \text{ on } \partial D_t, \\ O_- \subset D_t, \end{cases} \quad (5)$$

および

$$\begin{cases} V = -\kappa + \nu \text{ on } \partial D_t, \\ D_t \subset O_+, \end{cases} \quad (6)$$

といった駆動力項付きの方程式の解の挙動も考察した。ここで $\nu > 0$ は定数である。

(5) を考える上で以下の条件を仮定する。

(A1) ある $z \in \mathbb{R}^2$ と $R < \nu^{-1}$ について、 $D_0 \subset B_R(z)$ が成り立つ。

定理 2 のように簡潔で一般的な結果は得られていないが、漸近形の外側からの評価に関しては、仮定 (A1) を満たす任意の $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ に対して行える。

命題 4. (A1) を仮定する。

$$A := \bigcap \left\{ \overline{B_{\nu^{-1}}(z)} \mid O_- \subset \overline{B_{\nu^{-1}}(z)}, z \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

とする。この時、

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} E_t \subset A$$

が成り立つ。

ここでは詳細は省くが、いくつかの具体的な形の O_- に対して、漸近形の内側からの評価も得られた。すなわち

$$A^{int} \subset \varliminf_{t \rightarrow \infty} D_t \subset \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} D_t \subset A$$

および

$$A^{int} \subset \varliminf_{t \rightarrow \infty} E_t \subset \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} E_t \subset A$$

となることを示した。

(6) に関しては、 O_+ が正方形の内部になるようなものについて、漸近形を計算した。正方形の大きさ（と初期集合 D_0 ）によって、漸近形は異なる。尚、ここで得られた計算結果は、別のやり方で計算している、儀我-三竹-Tran [7, Section 6] での計算結果を含む。

3 証明の概要

2.2 節と 2.3 節で述べた結果に共通することを述べる。 x が解の漸近形の内部にあることを示すためには、大まかに言えば、駒の初期位置が x のゲームで、先手の得点が必ず正になるような先手の戦略を一つ与えればよい。なぜなら、ある一つの戦略で先手の得点が正になるなら、先手が最善を尽くせば当然正になり、値関数が正になるからである。逆に x が解の漸近形の外側にあることを示すには、先手の得点が必ず負になるような後手の戦略を一つ与えればよい。

その意味では、先手の得点が正になれば先手の勝ちであり、負になれば後手の勝ちである。2.1 節にて述べたゲームのルールに基づいて更にいうと、先手の勝利条件は

- ゲーム終了時に駒が D_0 の中にある。

または

- あるラウンド i で、 O_- に駒が到達する。

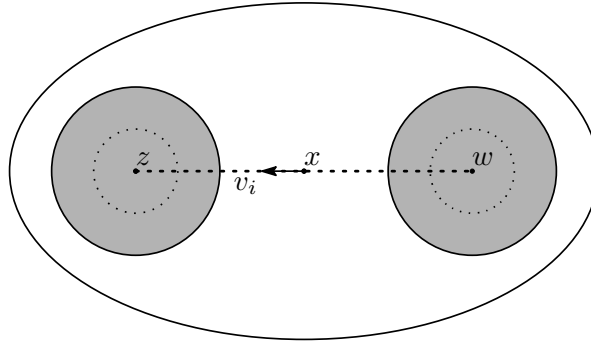


図2 先手の戦略の例

であり, 後手の勝利条件はその逆である.

例えば, 図2の x を初期位置とすれば, 先手は単位ベクトル v_i を線分 $l_{z,w}$ と並行になるように取り続け, 駒が O_- に入ればゲームを辞めることにすれば, $x \in l_{z,w}$ かつ $l_{z,w} \subset D_0$ なので, 先手が勝つことができる.

$l_{z,w}$ のような線分が多くあると, 先手が勝てる位置が多くなる. 定理2のような仮定をすれば, 示しやすくなることをなんとなく掴んでもらえれば幸いである.

参考文献

- [1] Y. G. Chen, Y. Giga, and S. I. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean-curvature flow equations. *J. Differential Geom.*, 33(3):749–786, 1991.
- [2] M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions. Users guide to viscosity solutions of 2nd-order partial-differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27:1–67, 1992.
- [3] M. G. Crandall and P. L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277:1–42, 1983.
- [4] L. C. Evans and P. E. Souganidis. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 33(5), 1984.
- [5] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean-curvature.1. *J. Differential Geom.*, 33:635–681, 1991.
- [6] Y. Giga. *Surface evolution equations. A level set approach*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [7] Y. Giga, H. Mitake, and H. V. Tran. On asymptotic speed of solutions to level-set mean curvature flow equations with driving and source terms. *SIAM J. Math. Anal.*, 48:3515–3546, 2016.
- [8] K. Ishii, H. Kamata, and S. Koike. Remarks on viscosity solutions for mean curvature flow with obstacles. *Springer Proc. Math. Stat.*, 215:83–103, 2017.
- [9] R. Kohn and S. Serfaty. A deterministic-control-based approach to motion by curvature. *Commun. Pure Appl. Math.*, 59:344–407, 2006.
- [10] G. Mercier. Mean curvature flow with obstacles: a viscosity approach. arXiv:1409.7657v3.