放物接続のモジュライ空間の記述

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
松本 孝文 (Takafumi MATSUMOTO)

概 要

放物接続は線形微分方程式系の幾何学的対応物であり、そのモジュライ空間は接続の階数が 2 階の場合は具体的な記述がなされている。本講演では射影直線上の 3 点で確定特異点を持つ 3 階の放物接続のモジュライ空間とそのコンパクト化の記述について紹介する。

1 導入

放物接続のモジュライ空間とは、ざっくりと言えば線形微分方程式系の同値類全体のなす空間である。このモジュライ空間はいくつかのパラメータをもつが、あるパラメータにおいては Painlevé 第 VI 方程式の初期値空間と一致する。言い変えれば、Painlevé 第 VI 方程式の初期値空間は接続のモジュライ空間として実現される、ということである。Painlevé 方程式の初期値空間は良いコンパクト化を持つが、第 VI 方程式の場合はそのコンパクト化もモジュライ理論から得られることが知られている [IIS2]。すると、他のタイプの Painlevé 方程式についても、その初期値空間と良いコンパクト化が接続のモジュライ空間として実現されるのではないか、という考えが自然と湧き上がる。ところで、Painlevé 方程式の初期値空間とその良いコンパクト化はあるタイプの非特異射影有理曲面として特徴付けられる。このタイプの有理曲面は坂井氏 [Sa] により分類されている。Arinkin-Borodin[AB] はあるタイプの差分方程式のモジュライ空間が坂井氏の分類における $A_2^{(1)*}$ 型曲面から反標準因子を除いた空間に同型であることを証明した。このタイプの差分方程式は Mellin 変換により射影直線上の 3 点で確定特異点を持つ 3 階の線形微分方程式系に対応する。このことから射影直線上 3 点確定特異 3 階接続のモジュライ空間も上記の有理曲面であることがしたがう。しかしながら、Arinkin-Borodin はモジュライ空間そのもののコンパクト化は扱っておらず、彼らの方法では $A_2^{(1)*}$ 型曲面全体を得られていない。本講演では、$A_2^{(1)*}$ 型曲面全体が見かけの特異点理論を用いることで放物 ϕ-接続のモジュライ空間から得られることを説明する。本稿では必要な定義や主な結果について紹介する。

2 安定放物接続のモジュライ空間

この節では放物接続を定義し放物接続のモジュライ空間の性質を述べる。本稿では各定義を複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の 3 階の場合に行うが、一般の階数や種数についても同様に定義される。$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ を $\mathbb{P}^1$ の異なる n 点の組とし、$D = t_1 + \cdots + t_n$ を $\mathbb{P}^1$ 上の有効因子とする。

定義 2.1. $\boldsymbol{\nu} = (\nu_{i,j})_{0\leq j\leq 2}^{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^{3n}$ とする。以下の条件を満たす組 $(E, \nabla, l_* = \{l_{i,*}\}_{1\leq i\leq n})$ を $(\mathbb{P}^1, \mathbf{t})$ 上の 3 階の $\boldsymbol{\nu}$-放物接続と呼ぶ。

(1) E は $\mathbb{P}^1$ 上の 3 階のベクトル束。

(2) $l_{i,*} \colon E|_{t_i} := E \otimes k(t_i) = l_{i,0} \supsetneq l_{i,1} \supsetneq l_{i,2} \supsetneq l_{i,3} = \{0\}$ は E の t_i における放物構造。

(3) $\nabla \colon E \to E \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D)$ は $(\mathbb{P}^1, \mathbf{t})$ 上の対数的接続、すなわち、任意の $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, s \in E$ に対し $\nabla(fa) = s \otimes df + f\nabla(s)$ を満たす。さらに ∇ は任意の i, j に対し $(\mathrm{res}_{t_i}(\nabla) - \nu_{i,j}\mathrm{id})(l_{i,j}) \subset l_{i,j+1}$ を満たす。ここで $\mathrm{res}_{t_i}(\nabla)$ とは ∇ が定める $E|_{t_i}$ の自己準同型である。

$U \subset \mathbb{P}^1$ をある開集合、z をその座標とし、$t_1, \ldots, t_n \in U$ とする。E が U 上自明である、すなわち $E|_U \cong \mathcal{O}_U^{\oplus 3}$ であるとき、対数的接続 ∇ は U 上

$$d + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - t_i} dz$$

と表すことができる。ここで d は外微分であり、A_i は複素数値の 3 次正方行列である。接続が線形微分方程式系の幾何学的対応物であるとはこのような意味である。なお、このとき $\mathrm{res}_{t_i} \nabla$ とは A_i が定める線形写像に他ならない。定義 2.1 の条件 (3) より A_i は $\nu_{i,0}, \nu_{i,1}, \nu_{i,2}$ を固有値に持つことがわかる。

対数的接続の各特異点における固有値たちは次の関係式を満たす。

補題 2.2. (Fuchs 関係式) (E, ∇, l_*) を $(\mathbb{P}^1, \mathbf{t})$ 上の $\boldsymbol{\nu}$-放物接続とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{2} \nu_{i,j} + \deg E = 0$$

が成立する。

自然数 n と整数 d に対し、集合 $\mathcal{N}_{n,d}$ を

$$\mathcal{N}_{n,d} := \left\{ (\nu_{i,j})_{0 \le j \le 2}^{1 \le i \le n} \in \mathbb{C}^{3n} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{2} \nu_j^{(i)} + d = 0 \right\}$$

で定義する。$\mathcal{N}_{n,d}$ は n 個の特異点を持つ次数 d の対数的接続の固有値のデータになりうる複素数の組の集合である。

重み $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{i,j}\}_{1 \le j \le 3}^{1 \le i \le n}$ を各 $i = 1, \cdots, n$ に対し $0 < \alpha_{i,1} < \alpha_{i,2} < \alpha_{i,3} < 1$ であり、さらに $(i,j) \neq (i',j')$ なる組に対し $\alpha_{i,j} \neq \alpha_{i',j'}$ となる有理数の集合とする.

定義 2.3. $\boldsymbol{\nu}$-放物接続 (E, ∇, l_*) が $\boldsymbol{\alpha}$-安定であるとは、ゼロでない部分束 $F \subsetneq E$ で $\nabla(F) \subset F \otimes \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(D)$ なる全ての F に対し、不等式

$$\frac{\deg F + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{i,j} \dim((F|_{t_i} \cap l_{i,j-1})/(F|_{t_i} \cap l_{i,j}))}{\operatorname{rank} F} < \frac{\deg E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{i,j}}{\operatorname{rank} E}$$

が成り立つときをいう。

T_n を $\mathbb{P}^1$ の相異なる n 点の組の集合とする。すなわち

$$T_n := \{(t_i)_{1 \le i \le n} \in (\mathbb{P}^1)^n \mid t_i \neq t_j, i \neq j\}$$

とする。

定理 2.4. ([IIS1][In]) $\boldsymbol{\alpha}$-安定な 3 階の放物接続の相対的な粗モジュライ空間

$$M_n^{\boldsymbol{\alpha}}(d) \longrightarrow T_n \times \mathcal{N}_{n,d}$$

が存在する。このとき、各 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu}) \in T_n \times \mathcal{N}_{n,d}$ 上のファイバー $M_n^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ は次数が d である $(\mathbb{P}^1, \boldsymbol{t})$ 上の $\boldsymbol{\alpha}$-安定な $\boldsymbol{\nu}$-放物接続のモジュライ空間である。また、$M_n^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ は $6n - 16$ 次元の非特異準射影的多様体である。

3 安定放物 ϕ-接続のモジュライ空間

この節では放物 ϕ-接続を定義し主結果 1 について述べる。2 階の放物 ϕ-接続はモジュライ空間のコンパクト化のため稲場・岩﨑・齋藤 [IIS1][IIS2] により導入された。本稿における放物 ϕ-接続は高階への一般化を目指して導入したものである。

定義 3.1. 以下の条件を満たす組 $(E_1, E_2, \phi, \nabla, l_*^{(1)} = \{l_{i,*}^{(1)}\}_{1\le i\le n}, l_*^{(2)} = \{l_{j,*}^{(2)}\}_{1\le j\le n})$ を $(\mathbb{P}^1, \boldsymbol{t})$ 上の 3 階の $\boldsymbol{\nu}$-放物 ϕ-接続と呼ぶ。

(1) E_1, E_2 は $\mathbb{P}^1$ 上の 3 階のベクトル束。

(2) $l_{i,*}^{(1)} \colon E_1|_{t_i} = l_{i,0}^{(1)} \supsetneq l_{i,1}^{(i)} \supsetneq l_{i,2}^{(i)} \supsetneq l_{i,3}^{(i)} = \{0\}$, $l_{i,*}^{(2)} \colon E_2|_{t_i} = l_{i,0}^{(2)} \supsetneq l_{i,1}^{(2)} \supsetneq l_{i,2}^{(2)} \supsetneq l_{i,3}^{(2)} = \{0\}$ はそれぞれ E_1, E_2 の t_i における放物構造。

(3) $\phi \colon E_1 \to E_2$ はベクトル束の準同型で任意の i, j に対し $\phi_{t_i}(l_{i,j}^{(1)}) \subset l_{i,j}^{(2)}$ を満たす。

(4) $\nabla \colon E_1 \to E_2 \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(t_1 + \cdots + t_n)$ は対数的 ϕ-接続、すなわち任意の $f \in \mathcal{O}^1_{\mathbb{P}}, s \in E$ に対し $\nabla(fs) = \phi(s) \otimes df + f\nabla(s)$ を満たす。さらに ∇ は任意の i, j に対し $(\mathrm{res}_{t_i}(\nabla) - \nu_{i,j}\phi_{t_i})(l_j^{(1)}) \subset l_{j+1}^{(2)}$ を満たす。

$\boldsymbol{\nu}$-放物接続 (E, ∇, l_*) に対し組 $(E, E, \mathrm{id}, \nabla, l_*, l_*)$ は $\boldsymbol{\nu}$-放物 ϕ-接続となる。逆に ϕ が同型であるとき、$\boldsymbol{\nu}$-放物 ϕ-接続 $(E_1, E_2, \phi, \nabla, l_*^{(1)}, l_*^{(2)})$ はある $\boldsymbol{\nu}$-放物接続 (E, ∇, l_*) により得られる $\boldsymbol{\nu}$-放物 ϕ-接続 $(E, E, \mathrm{id}, \nabla, l_*, l_*)$ と同型となる。

$k = 1, 2$ に対し、$\boldsymbol{\alpha}_k = \{\alpha_{i,j}^{(k)}\}_{1\le j\le 3}^{1\le i\le n} \in (0,1)^{3n}$ を各 $i = 1, \ldots, n$ に対し不等式 $0 < \alpha_{i,1}^{(k)} < \alpha_{i,2}^{(k)} < \alpha_{i,3}^{(k)} < 1$ を満たし、さらに $(i,j) \neq (i',j')$ なる組に対し $\alpha_{i,j}^{(k)} \neq \alpha_{i',j'}^{(k)}$ となる有理数の集合とする。

定義 3.2. $\boldsymbol{\nu}$-放物 ϕ-接続 $(E_1, E_2, \phi, \nabla, l_*^{(1)}, l_*^{(2)})$ が $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$-安定であるとは、任意の部分束 $F_1 \subseteq E_1, F_2 \subseteq E_2, (F_1, F_2) \neq (0,0)$ で $\phi(F_1) \subset F_2$ かつ $\nabla(F_1) \subset F_2 \otimes \Omega^1_C(D)$ なる組 (F_1, F_2) に対し不等式

$$\frac{\deg F_1 + \deg F_2(-\gamma) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \alpha_{i,j}^{(1)} d_{i,j}^{(1)}(F_1) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \alpha_{i,j}^{(2)} d_{i,j}^{(2)}(F_2)}{\mathrm{rank}\, F_1 + \mathrm{rank}\, F_2}$$
$$< \frac{\deg E_1 + \deg E_2(-\gamma) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \alpha_{i,j}^{(1)} d_{i,j}^{(1)}(E_1) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \alpha_{i,j}^{(2)} d_{i,j}^{(2)}(E_2)}{2\mathrm{rank}\, E}$$

が成立するときをいう。ここで $k = 1, 2$ に対し $d_{i,j}^{(k)}(F) = \dim(F|_{t_i} \cap l_{i,j}^{(k)})/(F|_{t_i} \cap l_{i,j+1}^{(k)})$ である。

主結果 1

(1) $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$-安定な 3 階の放物 ϕ-接続の相対的な粗モジュライ空間

$$\overline{M_n^{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}}(d) \longrightarrow T_n \times \mathcal{N}_{n,d}$$

が存在する。また、$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$ が generic なとき $\overline{M_n^{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}}(d)$ は $T_n \times \mathcal{N}_{n,d}$ 上射影的である。特に各 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu}) \in T_n \times \mathcal{N}_{n,d}$ 上のファイバー $\overline{M_n^{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ は射影多様体となる。

(2) $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2$ とする。 このとき部分集合

$$U_{\mathrm{isom}} := \left\{ (E_1, E_2, \phi, \nabla, l_*^{(1)}, l_*^{(2)}) \in \overline{M_n^{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu}) \;\middle|\; \phi \text{ は同型写像} \right\}$$

は $\overline{M_n^{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ の Zariski 開集合である。さらに U_{isom} は $\boldsymbol{\alpha}$-安定な $\boldsymbol{\nu}$-放物接続のモジュライ空間 $M_n^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ と同型である。

4 モジュライ空間の記述

最後の節では射影直線上の 3 点で確定特異点を持つ 3 階の放物接続のモジュライ空間の記述について紹介する。

L_1, L_2, L_3 を $\mathbb{P}^2$ 上の 1 点 p を通る相異なる 3 本の直線とし、各 $i = 1, 2, 3$ に対し $p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3} \in L_i \setminus \{p\}$ を相異なる点とする。$\pi \colon S \to \mathbb{P}^2$ を 9 点 $\{p_{i,j}\}_{1\le i,j\le 3}$ を Blow-up することで得られる曲面とし、$L_i' = \overline{\pi^{-1}(L_i \setminus \{p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3}\})}$ とする。このとき $\cup_{i=1}^3 L_i'$ は S の反標準因子を与える。また L_1', L_2', L_3' の交差をグラフで表すとディンキン図形 $A_2^{(1)*}$ が現れる。この S を $A_2^{(1)*}$ 型曲面と呼ぶ。

$d=-2$ とし、$\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{N}_{3,-2}$ は条件

$$\nu_{1,0}+\nu_{1,1}+\nu_{1,2}=\nu_{2,0}+\nu_{2,1}+\nu_{2,2}=0,\quad \nu_{3,0}+\nu_{3,1}+\nu_{3,2}=2$$

を満たすとする。このとき任意の $\boldsymbol{\nu}$-放物接続 (E,∇,l_*) に対し $(\wedge^3 E,\mathrm{tr}\nabla)\cong(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2t_3),d)$ が成立することに注意する。

主結果 2 各 $i=1,2,3$ に対し $\nu_{i,0},\nu_{i,1},\nu_{i,2}$ は相異なるとする。このとき適当な $\boldsymbol{\alpha}$ に対し $\overline{M_3^{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\nu})$ は $A_2^{(1)*}$ 型曲面 S と同型となる。また、

$$Y(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\nu}):=\{\wedge^3\phi=0\}\subset\overline{M_3^{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\nu})$$

は $\overline{M_3^{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\nu})$ の反標準因子をなす。

参考文献

[AB] D. Arinkin and A. Borodin, Moduli spaces of d-connections and difference Painleve equations, em Duke Math. J., 134(3):515–556, 2006. Math/0411584.

[IIS1] M. Inaba and K. Iwasaki and M. -H. Saito, Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 42 (2006), no. 4, 987–1089.

[IIS2] M. Inaba and K. Iwasaki and M. -H. Saito, Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. II, Adv. Stud. Pure Math., 45, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2006).

[In] M. Inaba, Moduli of parabolic connections on curves and the Riemann-Hilbert correspondence, J. Algebraic Geom. 22 (2013), no. 3, 407–480.

[Sa] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys., 220(1):165–229, 2001.