群作用のある距離空間の自由積

東京都立大学大学院　理学研究科　数理科学専攻
松家拓稔 (Takumi MATSUKA)

概要

我々は群 G および H が距離空間 X および Y に幾何学的に作用するとき, 距離空間の自由積とみなせるものを定義した. この空間に対し群の自由積 $G * H$ は幾何学的に作用する. さらに粗凸空間との関係を調べ, 距離空間 X および Y が粗凸であるならば, 自由積 $X * Y$ も粗凸であるという結果を得た. このとき $X * Y$ において粗バウム・コンヌ予想が成立する. 本講演は現在進行中の深谷友宏氏 (東京都立大学) との共同研究に基づきます.

1　導入

粗幾何学とは多様体とは限らない空間を扱う幾何学の一種である. **粗同値**と呼ばれる, 等長同型を大きく弱めた同値関係により距離空間を同一視する. 粗幾何学は**幾何学的群論**という分野に動機付けされ発達した. 幾何学的群論とは群という代数的な対象を, その群が作用する距離空間を通して幾何学的に考察する分野である. その嚆矢はデーンによる「語の問題」の研究にある. すなわち有限生成群 G に対して, その生成元による語として書かれた任意の 2 つの元が等しいかどうかを決定するアルゴリズムを与えよという問題である. デーンは曲面の基本群に対し「語の問題」を肯定的に解決した. その際に曲面の基本群が双曲平面に「良い」作用をすることに注目し, 「語の問題」を双曲平面の幾何学的な性質を調べることに帰着させた. このように群という代数的な対象をそれが作用する距離空間から幾何学的に考察するという視点は大変有用である. **このような視点においては, 群と空間を同一視し考察するが, この同一視の適切な基準を与えるのが粗幾何学である.**

幾何学的群論の隆盛のきっかけとなったのはグロモフによる「負曲率をもつ」群, **双曲群**の導入である. この双曲群は活発に研究され, 様々な結果が存在する. さらに「非正曲率をもつ」距離空間や群を定義しようという研究も行われている. 深谷友宏氏および尾國新一氏により定義された**粗凸空間**はその 1 つである [1]. 粗凸空間は**非正曲率をもつ単連結完備リーマン多様体の粗幾何学における対応物**とみなせるものである. グロモフ双曲空間はもちろん, 様々な重要な例がある. また粗バウム・コンヌ予想とは「良い」固有距離空間の位相幾何的情報と解析的情報が一致するとのべる, 非可換幾何学においても重要な予想である. 深谷友宏氏と尾國新一氏は距離が固有である粗凸空間において粗バウム・コンヌ予想が成り立つことを示した [1, Theorem 1.3].

我々は群の自由積を幾何学群論的視点より考察した. 群 G および H が距離空間 X および Y に幾何学的に作用するとき, X と Y の自由積とみなせるものが定義される. この空間に対し群の自由積 $G * H$ は幾何学的に作用する. 我々は粗凸空間との関係を調べ, 距離空間 X および Y が粗凸であるならば, 自由積 $X * Y$ も粗凸であるという結果を得た. このとき距離空間 $X * Y$ において粗バウム・

コンヌ予想が成り立つ．粗幾何学全般および粗凸空間のすぐれた解説として, 深谷友宏氏のモノグラフ [7] をあげる．また洋書としては [3] をあげる．

2　粗同値とシュバルツ, ミルナーの定理

粗同値の定義を述べる．また群とその群が作用する距離空間を同一視する上で粗同値が適切な同値関係であることをしめす定理を紹介する．

Definition 1 (粗同値)**.** (X, d_X) および (Y, d_Y) を距離空間とする．次の 2 条件を満たす写像 $f : X \to Y$ が存在するとき X と Y は**粗同値**であるという．

(1) 発散する非減少関数 $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が存在し, 任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\rho_-(d_X(x, x')) \le d_Y(f(x), f(x')) \le \rho_+(d_X(x, x'))$$

を満たす．写像 f を**粗埋め込み写像**という．距離空間 X から Y に粗埋め込み写像 $f : X \to Y$ が存在するとき, X は Y に**粗埋め込み可能**であるという．

(2) 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $y \in Y$ に対して $x \in X$ が存在して $d_Y(y, f(x)) < C$ を満たす．

この 2 条件を満たす写像 $f : X \to Y$ を粗同値写像という．

条件 (1) において定義中の関数 $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が恒等関数としてとれるならば, 写像 $f : X \to Y$ は等長写像である．続いてシュバルツ, ミルナーの定理を述べるための準備をする．まず「良い」作用を定義する．

Definition 2 (幾何学的な作用)**.** (X, d_X) を距離空間とし, G は X に等長に作用する群とする．

(1) 任意のコンパクト集合 $B \subset X$ に対し, 集合 $\{g \in G \mid g(B) \cap B \neq \emptyset\}$ が有限集合となるとき, 作用は**固有**であるという．

(2) あるコンパクト集合 $K \subset X$ で, $G(K) = X$ なるものが存在するとき, 作用は**余コンパクト**であるという．

(3) 作用が固有かつ余コンパクトであるとき, 作用は**幾何学的**であるという．

Definition 3 (擬測地線および擬測地空間)**.** (X, d_X) を距離空間とする．定数 $\lambda \ge 1$ および $k \ge 0$ が存在し, 任意の 2 点 $x, x' \in X$ に対して次の 2 条件を満たす写像 $\gamma : [a, b] \to X$ が存在する．

(1) $\gamma(a) = x$ および $\gamma(b) = x'$ が成り立つ．

(2) 任意の $t, t' \in [a, b]$ に対して,

$$\lambda^{-1}|t - t'| - k \le d_X(\gamma(t), \gamma(t')) \le \lambda|t - t'| + k$$

が成り立つ．

このとき, 距離空間 (X, d_X) を**擬測地空間**といい, 写像 $\gamma : [a, b] \to X$ を (λ, k)**-擬測地線**とよぶ．

Definition 4 (固有距離空間)**.** X を距離空間とする．X の任意の有界閉集合がコンパクトであると

き, X の距離は固有であるという. 固有な距離をもつ距離空間を**固有距離空間**という.

シュバルツ, ミルナーの定理は群とその群が作用する距離空間を同一視する上で粗同値が適切な同値関係であることをしめす定理であり, 粗幾何学において重要である.

Theorem 1 (シュバルツ, ミルナーの定理)**.** X を固有な距離をもつ擬測地空間とし, X に群 G が幾何学的に作用しているとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) G は有限生成である.
(2) 任意の点 $x_O \in X$ の軌道 $G \to X\colon g \mapsto g(x_O)$ は粗同値写像である. すなわち, G と X は粗同値である. ただし, G にはある有限生成系に関する語距離[*1] を入れる.

3 距離空間の自由積

群をそれが作用する空間から幾何学的に調べる幾何学的群論の視点から群の自由積を考察する. 群 G および H を有限生成群とする. そのとき, 群 G が幾何学的に作用する距離空間としてケイリーグラフとよばれるものが自然に考えられる. ゆえに自由積に対してもまたケイリーグラフが定まる.

一方, 群 G と H のケイリーグラフから「機械的に」自由積 $G * H$ が幾何学的に作用するグラフを得る方法もある. Pisanski と Tucker は群 G と H のケイリーグラフの「自由積」を定義し, 自由積 $G * H$ が幾何学的に作用するグラフを得た [5]. 我々はこの方法を一般化し, 幾何学的な群作用をもつ距離空間 X および Y に対し, **距離空間の自由積** $X * Y$ を定義した.

Definition 5 (距離空間の自由積)**.** (X, d_X, e_X) および (Y, d_Y, e_Y) を基点つきの距離空間とする. さらに群 G, H が X, Y に**それぞれ幾何学的に作用していると仮定する.** この仮定のもとで X と Y の自由積を定義する. まず $X_0^* = \{g(e_X) \mid g \in G\} \setminus \{e_X\}$ また $Y_0^* = \{h(e_Y) \mid h \in H\} \setminus \{e_Y\}$ と定める. このとき X と Y の**自由積** $X * Y$ を

$$\begin{aligned} X * Y :=& \{x_0 y_0 x_1 y_1 \cdots z \mid x_i \in X_0^*, y_j \in Y_0^*, z \in X \cup Y\} \\ & \bigcup \{e_X y_0 x_1 y_1 \cdots z \mid x_i \in X_0^*, y_j \in Y_0^*, z \in X \cup Y\} \end{aligned}$$

以上のように X_0^* と Y_0^* の元を文字として交互に並べ, 最後の文字のみ X または Y の元がならぶ語の集合として定義する. また空語を ϵ とする.

自由積 $X * Y$ を形式的に定義したが, 幾何学的に考察するため各元を空間の点とみなしたい. そこで自由積 $X * Y$ の幾何学的実現を定義する.

Definition 6 (幾何学的実現)**.** 上述の設定のもとで Y_0^* の元で終わる語を

$$W^X = \{\tilde{x} y_0 x_1 y_1 \cdots x_k y_k \mid \tilde{x} \in G(e_X), x_i \in X_0^*, y_j \in Y_0^*\}$$

とし, $G(e_X)$ の元で終わる語を

$$W^Y = \{\tilde{x} y_0 x_1 y_1 \cdots x_{l-1} y_{l-1} x_l \mid \tilde{x} \in G(e_X), x_i \in X_0^*, y_j \in Y_0^*\}$$

[*1] 語距離とは有限生成群に対し純粋に代数的な操作のみで定まる距離である.

とする[*2]. 空間 $|X*Y|$ を以下のように構成される空間とし, 自由積 $X*Y$ の**幾何学的実現**とよぶ.

- 面: $\{\omega\}\times X$ および $\{\tau\}\times Y$ より成る. ただし $\omega\in\{\epsilon\}\cup W^X$, $\tau\in W^Y$ とする.
- 面の点を以下のように同一視する.
  (1) 任意の $x\in G(e_X)$ に対して, $(\epsilon,x)\in\{\epsilon\}\times X$ と $(x,e_Y)\in\{x\}\times Y$ を同一視する.
  (2) 任意の $\omega\in W^X$ と任意の $x\in X_0^*$ に対して, $(\omega,x)\in\{\omega\}\times X$ と $(\omega x,e_Y)\in\{\omega x\}\times Y$ を同一視する.
  (3) 任意の $\tau\in W^Y$ と任意の $y\in Y_0^*$ に対して, $(\tau,y)\in\{\tau\}\times Y$ と $(\tau y,e_X)\in\{\tau y\}\times X$ を同一視する.

自由積の元 $\omega=x_0y_0x_1y_1\cdots x_ny_nx$ は $|X*Y|$ の元 $(x_0y_0x_1y_1\cdots x_ny_n,x)$ と対応する. このようにして自由積 $X*Y$ とその幾何学的実現 $|X*Y|$ を同一視する.

また幾何学的実現 $|X*Y|$ には, その構造から距離 d_* が自然に定まる. いま $\omega,\omega'\in|X*Y|$ が共通語 u をもち, $\omega=ux_0y_0\cdots x_ny_nx$ および $\omega'=ux'_0y'_0\cdots x'_my'_mx'$ と表せるものとする. このとき d_* を

$$\begin{aligned}d_*(\omega,\omega'):=&d_X(x_0,x'_0)\\&+\sum_{i=1}^{n}d_X(e_X,x_i)+\sum_{i=0}^{n}d_Y(e_Y,y_i)+\sum_{j=1}^{m}d_X(e_X,x'_j)+\sum_{j=0}^{m}d_Y(e_Y,y'_j)\\&+d_X(e_X,x)+d_X(e_X,x')\end{aligned}$$

と定義する. 関数 d_* は幾何学的実現 $|X*Y|$ の距離である.

Remark 1. 距離空間 $(|X*Y|,d_*)$ に対し群の自由積 $G*H$ の作用を次のように定める. まず作用する元の語尾と作用される点の語頭が異なる場合, たとえば $g_0h_0g_1h_1\in G*H$ が $x_0y_0x_1y_1x\in|X*Y|$ に作用する場合は

$$g_0h_0g_1h_1\cdot x_0y_0x_1y_1x:=g_0(e_X)h_0(e_Y)g_1(e_X)h_1(e_Y)x_0y_0x_1y_1x$$

と定義する. また作用する元の語尾と作用される点の語頭が同じ場合, たとえば $g_0h_0g_1\in G*H$ が $x_0y_0x_1y_1x\in|X*Y|$ に作用する場合を考える. ただし, $x_0=g(e_X)$ とする. このとき

$$g_0h_0g_1\cdot x_0y_0x_1y_1x:=g_0(e_X)h_0(e_Y)g_1g(e_X)y_0x_1y_1x$$

と定義する. この作用は群 G および H が距離空間 X および Y に幾何学的に作用するという仮定のもとで, 幾何学的である. よって, シュバルツ, ミルナーの定理から群の自由積 $G*H$ と距離空間の自由積 $X*Y$ は粗同値である.

[*2] X_0^* 以外の元で終わる語であると強調するため, W^X という記法を用いている. 3 つ以上の距離空間の自由積を考える際にこの記法は有用である.

4 粗凸空間と粗バウム・コンヌ予想

本節の詳細な解説として [7, 第 6 章, 第 8 章] を参考にされたい. 深谷友宏氏と尾國新一氏は粗凸空間とよばれる距離空間のクラスを導入した [1]. これは非正曲率をもつ単連結完備リーマン多様体の粗幾何学における対応物とみなせるものである. 以下のような重要な例がある.

(1) ブーゼマン非正曲率空間.
(2) 有限次元シストーリック複体 [4].
(3) Hierarchically hyperbolic spaces [2].

さらに, 粗凸空間の成す距離空間のクラスは粗同値に関して閉じている. すなわち, 擬測地空間 X および Y が粗同値であり, X が粗凸空間ならば Y も粗凸空間である. また直積に関しても閉じている. 粗凸空間は距離空間に対して, 性質の良い擬測地線の族の存在を仮定し定義される.

Definition 7 (粗凸空間)**.** (X, d_X) を距離空間とする. $\lambda \geq 1, k \geq 0, E \geq 1$ および $C \geq 0$ を定数とする. また, $\theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を非減少関数とする. そして $\mathcal{L}$ を (λ, k)-擬測地線分の族とする. 以下の条件が成り立つとき, X は $(\lambda, k, E, C, \theta, \mathcal{L})$**-粗凸**であるという.

(CC1) 2 点 $v, w \in X$ に対し, 閉区間 $[0, a]$ 上で定義された擬測地線分 $\gamma \in \mathcal{L}$ で $\gamma(0) = v$ および $\gamma(a) = w$ を満たすものが存在する.

(CC2) 2 つの擬測地線分 $\gamma : [0, a] \to X$ および $\eta : [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たせば, 任意の $t \in [0, a], s \in [0, b]$, および $c \in [0, 1]$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$d_X(\gamma(ct), \eta(cs)) \leq (1 - c)Ed_X(\gamma(0), \eta(0)) + cEd_X(\gamma(t), \eta(s)) + C.$$

(CC3) 2 つの擬測地線分 $\gamma : [0, a] \to X$ および $\eta : [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たせば, 任意の $t \in [0, a], s \in [0, b]$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$|t - s| \leq \theta(d_X(\gamma(0), \eta(0)) + d_X(\gamma(t), \eta(s))).$$

条件 (CC1), (CC2) および (CC3) を満たす族 $\mathcal{L}$ を**良い擬測地線分の族**といい, 元 $\gamma \in \mathcal{L}$ を**良い擬測地線分**という. 特に族 $\mathcal{L}$ が測地線分から成るとき, X を**測地的粗凸**であるという.

粗バウム・コンヌ予想とは性質の良い固有距離空間においてはその粗 K ホモロジーとロー代数の K 群が一致すると主張するものである. この予想は「良い」固有距離空間においてはその位相幾何的情報と解析的情報が一致するとのべる, 非可換幾何学においても重要な予想である. 深谷友宏氏と尾國新一氏は距離が固有である粗凸空間において粗バウム・コンヌ予想が成り立つことを示した [1, Theorem 1.3]. そして我々は距離空間の自由積と粗凸空間の関係について次を示した.

Theorem 2 (Fukaya-M)**.** 幾何学的な群作用のある固有距離空間 X および Y が測地的粗凸空間であるとする. このとき自由積 $X * Y$ は固有距離空間であり測地的粗凸空間である.

先述の [1, Theorem 1.3] により, 幾何学的な群作用のある固有距離空間 X および Y が測地的粗凸空間であるとき, 自由積 $X * Y$ において粗バウム・コンヌ予想が成り立つ. またこのとき, 群の自由

積 $G * H$ が $X * Y$ に幾何学的に作用することから群の自由積 $G * H$ においても粗バウム・コンヌ予想が成り立つ.

一方, 固有距離空間 X および Y が有界幾何学をもち, ヒルベルト空間に粗埋め込み可能であるならば, 自由積 $X * Y$ もまた同じ条件を満たす. このときユーの定理 [6, Theorem 1.1] から自由積 $X * Y$ において粗バウム・コンヌ予想が成り立つ. ただし一般に, 幾何学的な群作用のある測地的粗凸な固有距離空間がヒルベルト空間に粗埋め込み可能とは限らないので, Theorem 2 は包含されない.

参考文献

[1] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Oguni. A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture. *J. Topol. Anal.*, Vol. 12, No. 3, pp. 857–895, 2020.

[2] Thomas Haettel, Nima Hoda, and Harry Petyt. Coarse injectivity, hierarchical hyperbolicity, and semihyperbolicity, 2020.

[3] Piotr W. Nowak and Guoliang Yu. *Large scale geometry.* EMS Textb. Math. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2012.

[4] Damian Osajda and Piotr Przytycki. Boundaries of systolic groups. *Geom. Topol.*, Vol. 13, No. 5, pp. 2807–2880, 2009.

[5] Tomaž Pisanski and Thomas W. Tucker. Growth in products of graphs. *Australas. J. Comb.*, Vol. 26, pp. 155–169, 2002.

[6] Guoliang Yu. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. *Invent. Math.*, Vol. 139, No. 1, pp. 201–240, 2000.

[7] 深谷友宏. 粗幾何学入門, SGC ライブラリ, 第 152 巻. サイエンス社, 2019.