Construction of geodesics on Teichmüller spaces of Riemann surfaces with Z action

松田 凌 *
京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系 博士課程一年
@ 第 19 回数学総合若手研究集会

1 序論

本公演では, 解析的無限型 Riemann 面 R と, その Teichmüller 空間 $\mathrm{Teich}(R)$ の Teichmüller 距離に関する測地線について考える. R の Teichmüller 空間とは, R 上の Beltrami 微分の成す空間: $L_\infty(R) := \{\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\mu} = \mu d\bar{z}/dz, \|\mu\|_\infty := \mathrm{ess\,sup}\,|\mu| < \infty\}$ の単位球 $\mathrm{Bel}(R) := \{\mu \in L_\infty(R) \mid \|\mu\|_\infty < 1\}$ を Teichmüller 同値で割った空間とする. ただし, $\mu, \nu \in \mathrm{Bel}(R)$ が Teichmüller 同値であるとは, それぞれを歪曲度にもつ擬等角写像 f^μ と f^ν に対して, ある等角写像 $c : f^\mu(R) \to f^\nu(R)$ が存在して, R の理想境界を固定して, $(f^\nu)^{-1} \circ c \circ f^\mu$ が id_R と homotopic であることを言う.

まず初めに, 測地線と密接な関係を持つ極値 Beltrami 係数について考察する. 極値 Beltrami 係数とは, 点 $[\mu] \in \mathrm{Bel}(R)/\sim$ の中でノルムが最小の Beltrami 微分のことをという. Hamilton-Krushkaĺ の定理から, 極値 Beltrami 係数 μ_0 に対して, $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu_0]$ は $[0]$ と $[\mu_0]$ を結ぶ測地線になることが知られており, 測地線を構成する上で重要な役割を果たす. 極値性と被覆について, 次の問いは長らく興味を持たれていた: “二つの Riemann 面 R, S と被覆 $\pi : R \to S$ が与えられたとき, S 上の極値 Beltrami 係数 μ_0 の π にする持ち上げ $\pi_*(\mu_0) := \mu_0 \circ \pi(\overline{\pi'}/\pi')$ が極値的になるための被覆 π (または被覆変換群 Γ) に対する条件は何か”. Ohtake は被覆変換群が有限生成 Abel 群であることが十分条件であることを示した ([O]). McMullen は被覆変換群が従順群であることが必要十分条件であることを証明した ([Mc]) (ただし, S が有限型であることが必要である). 今回は, R が $\mathbb{Z}$ 作用を持つとき, 極値 Beltrami 係数の持ち上げの極値性について説明する.

次に, 測地線について考える. R が解析的有限型の場合, 2 点を結ぶ測地線は一意的であることが知られている, 一方で, R が解析的無限型の場合, 2 点を結ぶ測地線は一意的とは限らない. Li は $R = \mathbb{D}$ の場合, 測地線が一意的でない 2 点を構成した ([L1]). 一般の Riemann 面については, Tanigawa([Th]), Li([L2]) らがそれぞれ独立に測地線が一意的でない十分条件を求めている. 二人が求めた十分条件の下では, 2 点を結ぶ測地線の族として, 開集合 $D \subset \mathbb{C}$ で複素解析的に係数づけされるものが存在することが示されている. ただし, 解析的無限型の場合に, $[0]$ と $[\mu]$ を結ぶ測地線が一意的であるための必要十分条件として, 次の二つの条件が知られている ([EKK]):

$$\begin{cases} \text{(a)} \cdots \mu_0 \text{ が同値類の中で唯一の極値的な元,} \\ \text{(b)} \cdots |\mu_0(z)| = \|\mu_0\| \quad \text{a.e..} \end{cases}$$

[L1] において, (a)⇒(b) なる予想がされたが, 後に反例が構成された [BLMM]. 今回は, 被覆による極値 Beltrami 係数の持ち上げを用いて, (b) の条件を保ったまま測地線が構成する方法を与える. 最後に, $R = \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ の場合, l^∞ の開集合で複素解析的に係数づけられる測地線の族の構成について述べる.

*mail : matsuda.ryou.82c [at] st.kyoto-u.ac.jp

2　準備

主結果を述べるのに必要な事柄を, 簡単に述べる. R の Fuchs 群モデルを Γ とし, Γ に関する可積分正則二次微分を $Q(\Gamma)$, その単位球面 $\{\varphi \in Q(\Gamma) \mid \|\varphi\|_{Q(\Gamma)} = 1\}$ を $Q_1(\Gamma)$ と書くこととする. これらは, Riemann 面上の可積分正則二次微分 $Q(R)$ とその単位球面 $Q_1(R)$ と等長同型である.

2.1　Poincaré 級数

$0, 1, \infty \in C \subset \hat{\mathbb{C}}$ とし,

$$\begin{aligned} Q(C) &:= \left\{ \varphi \colon \mathbb{C} \setminus C_0 \text{ 上正則関数} \mid \|\varphi\|_{Q(C)} := \iint_{\hat{\mathbb{C}} \setminus C} |\varphi| \, dxdy < \infty \right\} \\ Q(\Gamma, C) &:= \left\{ \varphi : \hat{\mathbb{C}} \setminus C \text{ 上 正則} \middle| \varphi \circ B \cdot B'^2 = \varphi \ (\forall B \in \Gamma),\ \|\varphi\|_{Q(\Gamma,C)} := \iint_{\omega} |\varphi| \, dxdy \right\} \end{aligned}$$

とおく. (ただし, ω は Γ の基本領域). このとき, 次の作用素 :

$$\Theta : Q(C) \ni F \mapsto \sum_{B \in \Gamma} (F \circ B \cdot B'^2)$$

を, Poincaré Theta Series という.

Theorem A (Poincaré series ([G], 4.3 , Theorem 3))
上の級数は, $\hat{\mathbb{C}} \setminus C$ 上広義一様収束し, 基本領域上で L^1 可積分である. また, 全射有界線型写像であって, $\|\Theta\| \leq 1$ がわかる. さらに

$$\Delta_{Q(\Gamma,C)}\left(0; \frac{1}{3}\right) \subset \Theta(\Delta_{Q(C)}(0; 1)),$$

ここに, 距離空間 (X, d) において, $\Delta(x; R)$ は, $x \in X$ 中心, 半径 $R > 0$ の開円盤である.

Corollary
$\tilde{R} \cong \mathbb{H}/\tilde{G}$ を *Riemann* 面とし, ある $\Gamma < \mathrm{Aut}(\tilde{R})$ が $\tilde{R}$ に推移的かつ不連続に作用しているとする. このとき, 左剰余類 $\Gamma := G/\tilde{G}$ とする. このとき,

$$\Theta_{G/\tilde{G}} : Q(\tilde{G}) \ni F \mapsto \sum_{B \in \Gamma} (F \circ B \cdot B'^2) \in Q(G)$$

とすると, 級数は広義一様に収束し, 基本領域上で L^1 可積分である. また, 全射有界線型写像であって, $\|\Theta_{G/\tilde{G}}\| \leq 1$ がわかる.

2.2　極値性の判定条件

Definition 1 (極値的 Beltrami 係数)
$\mu \in \mathrm{Bel}(R)$ が極値的であるとは,

$$\forall \nu \in [\mu] \text{ に対して}, \ \|\mu\|_\infty \leq \|\nu\|_\infty$$

を満たすことをいう. また, 極値的な元が同値類の中に一つしか存在しないとき, 一意極値的であるという.

Remark
任意の $[\mu] \in \mathrm{Teich}(R)$ は, 必ず 極値的な元を持つ.

Theorem B (The Hamilton–Krushkal condition ([G], 6.1, Theorem 1 / 6.7 , Theorem 6))
$\mu \in \mathrm{Bel}(R)$ が極値的であるための必要十分条件は,

$$\|\mu\|_\infty = \sup\left\{ \left\| \iint_R \mu\varphi \; dxdy \right\| \middle| \varphi \in Q_1(R) \right\}$$

である.

上の定理から, 極値 Beltrami 係数に対して, ある $Q_1(R)$ 上の列 (φ_n) で,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \iint_R \mu\varphi_n \; dxdy \right| = \|\mu\|_\infty$$

を満たすものが存在する. これを, μ の Hamilton 列という.

3 Extremality under $\mathbb{Z}$ action

Theorem 1 (主結果 1, [Mat])
R は *Riemann* 面 S の被覆面であるとし, その被覆変換群は, 無限巡回群 $\langle\gamma\rangle$ であるとする. $\mu \in \mathrm{Bel}(R)$ 次の条件 *:* ある $\varphi \in Q_1(S)$ が存在し,

$$\mu \circ \gamma_n \cdot \frac{\overline{\gamma_n'}}{\gamma_n'} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} k\frac{|\tilde{\varphi}|}{\tilde{\varphi}} \quad (a.e.\ z \in \omega_0)$$

を満たすとき, 極値的になる. ここに, $k = \|\mu\|_\infty$ $\tilde{\varphi}$ は φ の持ち上げ, $\gamma_n := \gamma^{\circ n}$ である. 加えて, ω_0 を $\langle\gamma\rangle$ の基本領域とする.

定理 1 の仮定を満たすような Beltrami 係数の例を構成してみる.

Eg. 1
$R := \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ とすると, $z \mapsto z+1$ によって生成される無限巡回群が作用する. そこで, $S := R/\langle\gamma : z \mapsto z+3\rangle$ とし, 基本領域の一つ $\omega_0 := \{z \in R \mid 0 < \mathrm{Re}\, z \leq 3\}$ をとっておく. S は *Riemann* 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ から *5* 点除いたものに等角同型であるから, *Riemann-Roch* の定理より, $\dim_{\mathbb{C}} Q(S) = 2$ である.
$\varphi^r,\ \varphi^l \in Q(S)$ を線型独立とし, $[0,1)$ 上の列 (a_n), (b_n) を, $a_n + b_n \neq 0$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ \lim_{n\to-\infty} a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim_{n\to-\infty} b_n = 1.$$

を満たすものとする. このとき, R 上の *Beltrami* 係数

$$\mu_{a_n,b_n} := k\frac{|a_n\varphi^r + b_n\varphi^l|}{a_n\varphi^r + b_n\varphi^l} \quad (z \in \omega_n),$$

と定義する. ここに, $k \in [0,1)$, $\omega_n := \gamma^{\circ n}(\omega_0)$ とし, ω_n と S を同一視し, φ^r と φ^l を定義する. このように構成すると, 定理 *1* より極値的であることがわかる.
例えば, $a_n \equiv 1$, $b_n \equiv 0$ とすると, μ_{a_n,b_n} は $k\overline{\varphi^r}/\varphi^r$ の持ち上げになっているから, *Ohtake[O]* の結果の一般化になっていることがわかる.

4 測地線の構成

極値的 Beltrami 係数 μ_0 が, $|\mu_0(z)| = \|\mu_0\|$ a.e. z を満たすとき, [0] と $[\mu]$ を結ぶ測地線を "たくさん" 構成することを考えたい. そこで, 極値 Beltrami 係数は測地線を与えることから, 次の条件を満たすような Beltrami 係数の族 $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を構成することを目標にする:

1. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, μ_λ は極値的である.
2. 任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対して, μ_{λ_1} と μ_{λ_2} は Teichmüller 同値である.
3. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば, 二つの測地線 $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu_{\lambda_1}]$ と $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu_{\lambda_2}]$ は (集合として) 異なる.
4. ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して, $|\mu_{\lambda_0}(z)| = \|\mu_{\lambda_0}\|$ a.e.

もちろん, この族を用いて, $l_\lambda : [0,1] \ni t \mapsto [t\mu_\lambda]$ を考えれば良い. また, 三番目の条件は, 二つの測地線が Teich(R) の原点 [0] で与える接ベクトルの向きが異なっていれば良い. このことは, Li によって次の形で十分条件が与えられている.

Theorem C (Li ([L2], Theorem3.1))
μ_1, μ_2 を R 上の極値 *Beltrami* 係数とする. このとき, 二つの測地線 $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu_1]$ と $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu_2]$ が (集合として) 異なる十分条件は, ある $\varphi \in Q(R)$ が存在して,

$$\int_R (\mu_1 - \mu_2)\varphi \neq 0$$

が成り立つことである.

このように Beltrami 係数を接ベクトルとして区別することを, 無限小に区別するという. 以下では, 3) の条件は, 定理 C の十分条件に置き換えたものを構成する.

目的を達するために, ある開集合 $U \subset R$ と一つとり, U 上の Beltrami 係数の族 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と R 上の極値 Beltrami 係数 μ_0 を固定し,

$$\mu_\lambda := \chi_U \tau_\lambda + \chi_{R\setminus U}\mu_0$$

なる R 上の族を考えることで, 上の条件を満たすものを構成する. μ_0 と U をうまく選ぶことで, 1),2) が満たされるようにし, $\{\tau_\lambda\}$ をうまく選ぶことで, 3),4) が満たされるようにする.

4.1 τ_λ の構成

Lemma 2
$R > 0$ とし, $T_R := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}\zeta < R\}$, $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}\lambda| < 1, \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ とおく. このとき, T_R 上の *Beltrami* 係数の族 $\{\widehat{\tau_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ で以下の条件を満たすものが存在する:

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $\widehat{\tau_\lambda}$ と 0 は *Teichmüller* 同値である.
- $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Lambda$ ならば $|\widehat{\tau_\lambda}|$ は定数関数である.
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $\int_{T_R/\langle\zeta\mapsto\zeta+2\pi\rangle} (\widehat{\tau_{\lambda_1}} - \widehat{\tau_{\lambda_2}})1\, dxdy \neq 0$
- $\widehat{\tau_*} : \Lambda \ni \lambda \mapsto \widehat{\tau_\lambda} \in L_\infty(T_R)$ は正則写像

Proof:
T_R の自己 affine 写像 $F_\lambda : T_R \to T_R$ を

$$T_R(\xi + i\eta) := \begin{cases} \xi + \lambda\eta + i\eta & 0 < \eta \leq \frac{R}{2}, \\ \xi + \lambda(R - \eta) + i\eta & \frac{R}{2} \leq \eta < R. \end{cases}$$

を考えれば良い. □

$\pi : T_R \ni \zeta \mapsto e^{i\zeta} \in \mathbb{A}_{r_0} := \{z \in \mathbb{C} \mid r_0 < |z| < 1\}$ なる被覆写像を考える $(r_0 := e^{-R})$. F_λ は $\zeta \mapsto \zeta + 2\pi$ と可換であるから, $\mathbb{A}_{r_0}$ の擬等角写像を誘導する. また, T_R 上 $d\zeta^2$ と書かれる正則二次微分の π による押し出しは, dz^2/z^2 であることから次が成り立つ：

Corollary 3

$\mathbb{A}_r$ 上の *Beltrami* 係数の族 $\{\nu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で以下の条件を満たすものが存在する:

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, ν_λ は 0 と *Teichmüller* 同値である.
- $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Lambda$ ならば, $|\nu_\lambda|$ は定数関数である.
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば, ある可積分正則関数 g が存在して, $\int_{\mathbb{A}_r} (\nu_{\lambda_1} - \nu_{\lambda_2}) g \ dxdy \neq 0$.
- $\nu_* : \Lambda \ni \lambda \mapsto \nu_\lambda \in L_\infty(\mathbb{A}_r)$ が正則写像.

Proof：

ν_λ を具体的に計算すると,

$$\nu_\lambda = \begin{cases} \dfrac{-i\lambda}{2+i\lambda}\dfrac{z}{\bar{z}} & (r < |z| \leq \sqrt{r}), \\ \dfrac{i\lambda}{2-i\lambda}\dfrac{z}{\bar{z}} & (\sqrt{r} \leq |z| < 1). \end{cases}$$

であることからわかる. □

Remark

ν_λ たちを無現小に区別する正則函数は, T_R に持ち上げると, 定数函数である. 従って, h を $\mathbb{A}_r$ 上の正則函数で, $1/z^2$ の係数が 0 であるとすると,

$$\int_{\mathbb{A}_r} \nu_\lambda h \ dxdy = 0$$

である. T_R において, 正則二次微分と *Beltrami* 係数の *"Cuppling"* についてより精密に計算する. $\tilde{\varphi}_*$ を $\mathbb{T}_R := T/\langle\iota\rangle$ 上の正則二次微分とすると,

$$\tilde{\varphi}_*(\zeta) = \tilde{\varphi}_* \circ \iota(\zeta) \cdot (\iota'(\zeta))^2 = \tilde{\varphi}_*(\zeta + 2\pi)$$

が成り立つ *(* $\iota(\zeta) = \zeta + 2\pi$ *)*. つまり, $\tilde{\varphi}_*$ は周期函数である. そこで, $\tilde{\varphi}_*$ を *Fourier* 展開をすると,

$$\int_{\mathbb{T}_R} \nu_\lambda \tilde{\varphi}_* = \tilde{\varphi}_*(0)\mathrm{Area}\ (\mathbb{T}_R)\left(\frac{i\lambda}{2-ic} - \frac{i\lambda}{2+i\lambda}\right) = \tilde{\varphi}_*(0)\mathrm{Area}\ (\mathbb{T}_R)\frac{\lambda^2}{4+\lambda^2},$$

をうる. 以下では特に, $h(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ *(*$|\alpha| \leq r_0$*)* とすると, $1/z^2$ の係数は α であるから,

$$\iint_{\mathbb{A}_r} \nu_\lambda \frac{1}{z-\alpha} = \frac{2\pi\alpha}{i}\frac{\lambda^2}{4+\lambda^2}$$

をうる. ■

次に, $\mathbb{D}$ の上の Beltrami 係数の族で同じ性質を持つものを構成したい. これは, Lemma 2 において T_R から $\mathbb{D} \setminus [-t, t]$ への被覆写像が取れるから, それを介して, $\mathbb{D}$ 上の Beltrami 係数の族を同様に構成できる. 以下では, 三つ目の条件における g を具体的に書き下したいため, 楕円函数を用いた別の構成法を紹介する.

Theorem 4 (主結果 2, [Mat])

$\mathbb{D}$ 上の *Beltrami* 係数の族 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で以下の条件を満たすものが存在する:

a'). 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, τ_λ と 0 は *Teichmüller* 同値である.
b'). $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Lambda$ ならば $|\tau_\lambda|$ は定数関数である.
c'). $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば ある正則関数 g が存在して, $\int_{\mathbb{D}} (\tau_{\lambda_1} - \tau_{\lambda_2}) g \, dxdy \neq 0$
d'). $\tau_* : \Lambda \ni \lambda \mapsto \tau_\lambda \in L_\infty(\mathbb{D})$ は正則写像

Proof：
Riemann の写像定理より, 任意の $R \in (0, \infty)$ に対して, ある $t \in (0,1)$ が存在して, 被覆写像 $\rho : T_R \to D_t := \mathbb{D} \setminus [-t, t]$ が取れる. 特に, ρ を境界まで同相に拡張したとき, $\rho(\{\zeta | \operatorname{Im}\zeta = R\}) = [-t, t]$ を満たすようにしておく. これにより, ρ は一意的に決まる.

ρ を反転によって拡張するとこれは楕円函数になる, 従って, 次の微分方程式を満たすことに注意する.

$$(\rho')^2 = (\rho - t)(\rho + t)\left(\rho - \frac{1}{t}\right)\left(\rho + \frac{1}{t}\right).$$

以下では, D_t 上の Beltrami 係数を構成する. F_λ は $\zeta \mapsto \zeta + 2\pi$ と可換であるから,

$$\begin{tikzcd} T_R \arrow[r, "F_\lambda"] \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T_R \arrow[d, "\rho"] \\ D_t \arrow[r, "\exists \tilde{f}_\lambda"] & D_t \end{tikzcd}$$

を満たす $\tilde{f}_\lambda$ が存在する. この Beltrami 係数を τ_λ とおく. このような族 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が a'), b'), d') を満たすのは明らかである. c') が成り立つことを示す.

Corollary 3 の Remark を思い出すと, T_R 上の正則関数 φ_* であって, その引き戻し $\tilde{\varphi}_* := \rho^*(\varphi_* \, dz^2)$ が, $\tilde{\varphi}_*(0) \neq 0$ を満たせば良い. そこで, ρ が満たす微分方程式を思い出すと,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_*(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varphi}_*(\tilde{x}) \, d\tilde{x} = 2\int_0^{\pi} \tilde{\varphi}_*(\tilde{x}) \, d\tilde{x} \\ &= 2\int_0^{\pi} \varphi_* \circ \rho \cdot (\rho')^2 \, d\tilde{x} \\ &= 2\int_0^{t} \varphi_*(x) \cdot (\rho') \, dx \\ &= 2\int_0^{t} \varphi_*(x) \cdot \sqrt{(x-t)(x+t)\left(x - \frac{1}{t}\right)\left(x + \frac{1}{t}\right)} \, dx. \end{aligned}$$

と計算される. 最後の積分の根号の中身はある区間上で < 0 の函数を積分しているから, R が十分大きければ (t が十分小さければ)$\tilde{\varphi}_*(0) \neq 0$ を満たすことができる. □

Remark

Reich (Kra [K]) は, 次のような $\mathbb{D}$ 上の *Beltrami* 係数の族 $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を構成している. $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1/2\}$ であって,

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, μ_λ は 0 と *Teichmüller* 同値.
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならな $\mathbb{D}$ 上のある正則関数 g が存在して $\int_{\mathbb{D}} (\tau_{\lambda_1} - \tau_{\lambda_2}) g \, dxdy \neq 0$.
- $\tau_* : \Lambda \ni \lambda \mapsto \tau_\lambda \in L^\infty(\mathbb{D})$ は正則写像.

を満たす.

4.2 support が非交和な Beltrami 係数の和について

次に, 条件 2) について考察する. R を二つの部分曲面 R_1, R_2 に分ける. それぞれ, 連結である必要はない. このとき, R_2 上の Beltrami 係数 μ を一つ固定した時, 次の写像を考える.

$$\mathrm{Bel}(R_1) \ni \tau \mapsto \tau + \mu \in \mathrm{Bel}(R).$$

Theorem 5 ([Mat])
上の写像は,

$$\mathrm{Teich}(R_1) \ni [\tau] \mapsto [\tau + \mu] \in \mathrm{Teich}(R)$$

を誘導する. つまり, τ_1 と τ_2 が R_1 上 *Teichmüller* 同値ならば, $\tau_1 + \mu$ と $\tau_2 + \mu$ は R 上 *Teichmüller* 同値である.

Remark
Taniguchi, Maitani が R_1 が単連結の場合をより精密に研究している *([Tm], [Mai]). Tanigawa* は, U が単連結の場合, *Theorem 5* に現れる写像が単射であることを証明している. *([Th], Lemma 3.3 Lemma 3.4).*

4.3 結論

最後に, 無限小で区別するための正則二次微分の存在を確認しておく.

Lemma 6
R 上の *puncture* α に対して, その点で *1* 位の極を持つ可積分正則二次微分が存在する.

Proof:
$R' := R \cup \{\alpha\}$ とし, R' の Fuchs 群を Γ' とする. ただし, 被覆写像 $\pi : \mathbb{D} \to R'$ に対して, $\pi(0) = a_n$ となるようにしておく.
$\psi(z) := 1/z$ とおくと, これは $\mathbb{D}$ 上の可積分有理型函数である. 従って, $\Psi := \Theta(\phi)$ とすれば良い. □

以上より次が示せる.

Theorem 7 ([Mat])
R に無限巡回群 $\langle\gamma\rangle$ が作用しているとき, ある *Beltrami* 係数 μ が存在して次を満たす:

1. μ は極値的
2. $|\mu|$ は定数
3. ある極値的 *Beltrami* 係数の族 $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して,
   (a) μ を含む
   (b) 含まれる *Beltrami* 係数は全て *Teichmüller* 同値
   (c) μ_λ は λ に $L_\infty(R)$ 値の意味で複素解析的に依存する
   (d) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば μ_{λ_1} と μ_{λ_2} は無限小の意味で同値でない. つまり, ある $\varphi \in Q(R)$ が存在して, $\int_R (\mu_{\lambda_1} - \mu_{\lambda_2})\varphi \neq 0$.
   (e) ある $U \subset R$ が存在して $\mu_\lambda|_{R\setminus U} = \mu|_{R\setminus U}$

U は $\mathbb{D}$ または $\mathbb{D}^*$ または 円環領域 $\mathbb{A}$ と等角同型にできる.

構成は次の通り．まず, $S := R/\langle\gamma\rangle$ とし, Eg. 1 にならって Beltrami 係数 μ_0 を構成する．次に, U として, 境界まで込めて解析的に $\mathbb{D}$ または $\mathbb{D}^*$ または $\mathbb{A}$ と等角同型な部分領域を一つとる．このようにして,

$$\mu_\lambda := \chi_U \tau_\lambda + \chi_{R\setminus U}\mu_0$$

とすれば良い．極値性は, Theorem 1 からわかる．また, λ として, $\left|\frac{\frac{-i\lambda}{2}}{1+\frac{i\lambda}{2}}\right| = \|\mu_0\|$ を満たすものを取れば, $|\mu_\lambda(z)| = \|\mu_\lambda\|$ a.e. z を満たす．

極値 Beltrami 係数の族が構成できた．特に, 無限小に区別されているから, 次が成り立つ．

Theorem 8 ([Mat])

R に対して, $\mathbb{Z}$ が不連続に作用するとき．R 上の Beltrami 係数 μ で次を満たすものが存在する:

1. μ は極値的
2. $|\mu|$ は定数
3. $[0]$ と $[\mu]$ を結ぶある測地線の族 $\{l_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在して, l_λ は λ に複素解析的に依存する．また, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば二つの測地線 $l_{\lambda_1}, l_{\lambda_2}$ は相異なる．

測地線をさらに構成するための, 技術的な障害は, 無限小に区別するための $Q(R)$ の存在である．例えば, R が特別な場合にはより多くの測地線が構成できる．

Theorem 9 ([Mat])

$R = \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ とする．このとき, ある Beltrami 係数 μ と開集合 $D \subset l^\infty$ が存在して次を満たす:

1. μ は極値的
2. $|\mu|$ は定数
3. ある極値的 Beltrami 係数の族 $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in D}$ が存在して,
   - (a) μ を含む
   - (b) 含まれる Beltrami 係数は全て Teichmüller 同値
   - (c) μ_λ は λ に $L_\infty(R)$ 値の意味で複素解析的に依存する
   - (d) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば μ_{λ_1} と μ_{λ_2} は無限小の意味で同値でない．つまり, ある $\varphi \in Q(R)$ が存在して, $\int_R (\mu_{\lambda_1} - \mu_{\lambda_2})\varphi \neq 0$.
   - (e) ある $U \subset R$ が存在して $\mu_\lambda|_{R\setminus U} = \mu|_{R\setminus U}$, $\mathrm{Cl}(U)\cap\mathbb{Z} \neq \emptyset$

構成を述べる．

まず, $S := \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}/\langle z \mapsto z+3\rangle$ とし, Eg. 1 にならって Beltrami 係数 μ_0 を構成する．$k := \|\mu_0\|$ とし, K を $\left|\frac{-\frac{iK}{2}}{1+\frac{iK}{2}}\right| = k$ を満たすようにとる．径数を, 次に, $D := \{(\lambda_j) \in l^\infty \mid \lambda_j \in \Lambda, |\lambda_j| \in [0, K]\}$ とおく．

$j \in \mathbb{N}$ とする．このとき,

$$\mathbb{A}_j := \Delta\left(3j + \frac{3}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{|j|}}\right) \setminus \Delta\left(3j + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

とおく．また, $\alpha_j = 3j+1, \beta_j := 3j+2$ とし, $U := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{A}_j$ とおく．

各 $(\lambda_j) \in D$ に対して,

$$\mu_{(\lambda_j)} := \chi_{(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})\setminus U}\mu_0 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \nu_{\lambda_j}\chi_{\mathbb{A}_j}$$

とおく．ただし, ν_j は, 円環領域の Beltrami 係数の族で, Corollary 3 で構成したものをとっている．それぞれは,

$$\iint_{\mathbb{A}_j} \nu_j \frac{1}{z-\alpha_j} = \frac{2\pi\alpha_j}{i}\frac{\lambda^2}{4+\lambda^2} \quad \iint_{\mathbb{A}_j} \nu_j \frac{1}{z-\beta_j} = \frac{2\pi\beta_j}{i}\frac{\lambda^2}{4+\lambda^2},$$

を満たす．さらに．$\Delta(3j+3/2;1)$ の閉包を含む単連結領域上で正則な函数 φ に対して,

$$\int_{\mathbb{A}_j} \nu_j \varphi = 0$$

を満たすことに注意しておく．a), b), c) e) については明らかである．例えば, $\mu_{(\lambda_j)}$ は全て Teichmüller 同値なことは, Theorem 5 よりわかる．

最後に条件 d) を確認する．対偶: “$\mu_{(\lambda_j)}$ と $\mu_{(\tilde{\lambda}_j)}$ が無限小に区別できないならば, $\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$ $(\forall j)$” を示す．$L > 0$ とする．

$$\varphi_{\alpha_j} := \frac{1}{(z-\alpha_j)(z-3L)(z-6L)}, \quad \varphi_{\beta_j} := \frac{1}{(z-\beta_j)(z-3L)(z-6L)},$$

とし, α, β からなる長さ $2L+1$ の有限文字列 $(\cdot_j)_{|j|\le L}$ に対して,

$$\varphi_{(\cdot)} := \sum_{|j|\le L} \varphi_{\cdot_j}$$

とおく．$\mu_{(\lambda_j)}$ と $\mu_{(\tilde{\lambda}_j)}$ が無限小に区別できないから, 文字列 $(\alpha, \alpha, \cdots, \alpha)$ を適用すると,

$$0 = \int_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}} (\mu_{(\lambda_j)} - \mu_{(\tilde{\lambda}_j)})\varphi_{(\cdot)} = \frac{2\pi}{i} \sum_{-L\le j\le L} \alpha_j \left(\frac{\lambda_J^2}{4+\lambda_J^2} - \frac{\tilde{\lambda}_J^2}{4+\lambda_J^2} \right)$$

(φ_j ($|j| \le L$) の極は, $\mathbb{A}_{j'}$ ($|j'| \ge L$) の内側には存在しないことに注意する.) ここで, $-L \le J \le L$ を一つ固定する．このとき, 文字列 $(\cdot)$ の J 番目を α から β に, 置き換える．置き換えた式を, 再び無限小に区別できないことに適用して, 上の式と引き合わせると,

$$\frac{\lambda_J^2}{4+\lambda_J^2} - \frac{\tilde{\lambda}_J^2}{4+\tilde{\lambda}_J^2} = 0$$

である．よって, $\lambda_J = \tilde{\lambda}_J$. L は任意であったから, $(\lambda_j) = (\tilde{\lambda}_j)$.

参考文献

[BLMM] V. Bozin, N. Lakic, V. Markovic, M. Mateljevic, Unique extremality, J. Anal. Math.,**75** (1998), 299–338.

[EKK] C. Earle,I. Kra and S. Krushkaĺ, Holomorphic motions and Teichmüller spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **343** (1994), 927–948.

[G] Frederick. P. Gardiner, *Teichmüller Theory and quadratic differentials*, John Wiley and Sons, 1987.

[K] I. Kra. I, On Nielsen–Thurston–Bers type of self-maps of Riemann surfaces, Acta Math., **146** (1981), 231–270.

[L] Li Zhong, On the existence of extremal Teichmüller mappings, Comment. Math. Helv., **57** (1982), 511–517.

[L1] Li Zhong, Nonuniqueness of geodesics in infinite dimensional Teichmüller spaces(I), Complex Variables Theory Appl., **16** (1991), 261–272.

[L2] Li Zhong, Nonuniqueness of geodesics in infinite dimensional Teichmüller spaces(II), Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Math., **18** (1993), 355–367.

[Mc] C. McMullen Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps, Invent. Math., **97** (1989), 95–127.

[Mai] F. Maitani, On the rigidity of an end under conformal mappings preserving the infinite homology bases, Complex Variables Theory Appl., **24** (1994), no. 3–4, 281–287.

[Mat] R. Matsuda, *Construction of geodesics on Teichmüller spaces of Riemann surfaces with $\mathbb{Z}$ action*, arXiv: 2022.03290, (2022).

[O] H. Ohtake Lifts of extremal quasiconformal mappings of arbitrary Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ., **22** (1982), 191–200.

[Th] H. Tanigawa, Holomorphic families of geodesic discs in infinite dimensional Teichmüller spaces, Nagoya Math. J., **127** (1992), 117–128.

[Tm] M. Taniguchi, On the rigidity of an infinite Riemann surface, Complex Variables Theory Appl., **14**(1990), 161–167.