混合交換子長と不変擬準同型

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
丸山修平 (Shuhei MARUYAMA)

概要

群 G の交換子群 $G' = [G, G]$ 上には交換子による語長 (交換子長) でノルム構造が入る．群 G とその正規部分群 N に対し，それらから定まる交換子群 $[G, N]$ にも混合交換子長という自然なノルムを定義することが出来る．本稿ではこのふたつのノルムの距離幾何的な「違い」について，とくに自由群や曲面群，3 次元閉双曲多様体の基本群など幾何に由来する群の場合を中心に説明する．本稿は川崎盛通氏 (青山学院大学)，木村満晃氏 (京都大学)，松下尚弘氏 (琉球大学)，見村万佐人氏 (東北大学) との共同研究の内容を含む[*1]．

1 序

本稿では G で群，N でその正規部分群を表し，商群 G/N を Γ で表す．

S と T を G の部分集合とし，$s \in S$ と $t \in T$ に対し

$$[s, t] = sts^{-1}t^{-1} \in G$$

を (S, T)-単交換子という．(S, T)-単交換子全体を生成集合とする G の部分群を $[S, T]$ で表し，(S, T)-交換子部分群という．このとき，上記生成集合による語長 (交換子長) $\mathrm{cl}_{S,T}$ により $[S, T]$ 上にノルムが入る．本稿の目的は，(G, N)-交換子部分群 $[G, N]$ 上に定まるふたつのノルム $\mathrm{cl}_G(= \mathrm{cl}_{G,G})$ と $\mathrm{cl}_{G,N}$ の違いを記述することである．

本稿の主定理は以下である:

定理 1.1 ([MMM22])**.** G を種数 2 以上の閉曲面の基本群とし，N をその交換子部分群とする．このとき，$\mathrm{cl}_G(= \mathrm{cl}_{G,G})$ と $\mathrm{cl}_{G,N}$ は双リプシッツ同値でない[*2]．

G を 3 次元閉双曲写像トーラスの基本群，N をファイバーの基本群の交換子部分群とした場合にも同様の主張が成り立つ．これらは，有限生成群 G とその正規部分群 N について $\mathrm{cl}_G(= \mathrm{cl}_{G,G})$ と $\mathrm{cl}_{G,N}$ の双リプシッツ非同値性が判明した初めての例である．

[*1] 本研究は JSPS 科研費 JP18J00765, JP21K13790, JP20H00114, JP21J11199, JP19K14536, JP17H04822, JP21K03241 の助成を受けたものです．

[*2] [MMM22] では交換子長を安定化した安定交換子長の双リプシッツ非同値性を述べているが，そこでの議論と同様に (むしろローテクで) 交換子長の非同値性も証明できる．

2　交換子長と擬準同型

まず古典的な交換子長について復習する．この章の内容に関する教科書として [Cal09] を挙げる．

群 G の交換子部分群 $[G,G]$ の元 z に対し，その**交換子長** $\mathrm{cl}_G(z)$ を

$$\mathrm{cl}_G(z) = \min\{n\colon z = [g_1,h_1]\cdots[g_n,h_n] \text{ for some } g_i,h_i \in G\}$$

で定める．ここで G の単位元 1_G に対しては $\mathrm{cl}_G(1_G) = 0$ とおくと，交換子長は $[G,G]$ 上の G 共役不変なノルムとなる．交換子長は，単交換子全体からなる集合を生成集合と考えた場合の $[G,G]$ のケーリーグラフの自然な距離と思うこともできる．

交換子長のトポロジカルな見方として，曲面の最小種数としての見方がある．X を位相空間として G を X の基本群 $\pi_1(X)$ とする．交換子部分群 $[\pi_1(X),\pi_1(X)]$ の元を任意に取ると，それを代表するループ γ に対し，ある (境界付き) 曲面 S と連続写像 $f\colon S\to X$ で $f|_{\partial S} = \gamma$ を満たすものが存在する．この写像 f を用いて，S の種数と同じ個数の単交換子の積で $[\gamma]$ を書き表すことが出来る．したがって，$[\gamma]\in[\pi_1(X),\pi_1(X)]$ の交換子長とは，そのループを張る曲面の最小種数に一致する．一般の群 G の交換子長に対しても，G の Eilenberg-MacLane 空間 $K(G,1)$ を通して上記の最小種数としての見方をすることが出来る．

交換子長の計算は一般には難しい．例えば，(非可換) 自由群の交換子長の決定問題は NP 完全なことが示されている ([Heu20]，このプレプリントのタイトルは「Computing commutator length is hard」である)．交換子長の計算の難しさを表す一例として，階数 2 の自由群 $F_2 = \langle a,b \mid -\rangle$ を考える．単交換子 $[a,b]$ の 3 乗

$$[a,b]^3 = [a,b]\cdot[a,b]\cdot[a,b]$$

は，定義から単交換子 3 つの積で書き表されている．自由群には relation が無いため，これが $[a,b]^3$ を表す単交換子数の最小値を与えているように思えるのだが，実は次が成り立つ:

$$[a,b]^3 = [aba^{-1}, b^{-1}aba^{-2}][b^{-1}ab, b^2].$$

つまり $[a,b]^3$ の交換子長は 3 ではなく，2 以下である．自由群のような relation が全くない群でもこのようなことが起こるため，非自明な relation のある群に対しては更に縮約が起こり得て，交換子長の計算は難しくなる．

さて，上記自由群 F_2 の元 $[a,b]^3$ について，その交換子長が 2 以下となることが分かった．事実としてはこの元の交換子長は 2 に一致するのだが，この事実はどのように証明するのだろうか．以下ではその方法のひとつを説明する．

上記のことを示すためには，$[a,b]^3$ の交換子長が 2 以上となることを示せばよい．そのために，与えられた元に対し，その交換子長の下からの評価を与える方法を考える．交換子長は群論的な対象なので，例えば群 G 上の実数値準同型 $\phi\colon G\to\mathbb{R}$ を使おうとするのは自然だが，これはうまく行かない．実際，G 上の準同型 ϕ に交換子群の元 $z = [g_1,h_1]\cdots[g_n,h_n]$ を代入すると

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \phi([g_1,h_1]\cdots[g_n,h_n]) = \phi([g_1,h_1]) + \cdots + \phi([g_n,h_n])\\ &= \phi(g_1) + \phi(h_1) + \phi(g_1^{-1}) + \phi(h_1^{-1}) + \cdots = 0\end{aligned}$$

となるため, G 上の実数値準同型の値を用いて交換子長の情報を取り出すことは出来ない.

少し唐突ではあるが, 準同型の定義の条件を以下のように緩めた写像 (斉次擬準同型) を導入する.

定義 2.1. G を群とする. 写像 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ が**擬準同型**であるとは,

$$D(\mu) = \sup_{g,h} |\mu(gh) - \mu(g) - \mu(h)| < \infty$$

が成り立つときをいう. $D(\mu)$ を μ の **defect** という. また, 擬準同型 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ が任意の $g \in G$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\mu(g^n) = n \cdot \mu(g)$$

を満たすとき, μ を**斉次擬準同型**という. G 上の斉次擬準同型全体のなす実ベクトル空間を $\mathrm{Q}(G)$ で表す.

定義から, 実数値準同型は斉次擬準同型である. したがって, 群 G 上の実数値準同型全体のなすベクトル空間を $\mathrm{H}^1(G)$ で表すと, $\mathrm{H}^1(G) \subset \mathrm{Q}(G)$ が成り立つ.

上記の議論から実数値準同型では交換子長の情報を取り出すことは出来ないが, 一方で斉次擬準同型を用いると交換子長の情報を取り出すことが出来る. 具体的には, 準同型でない斉次擬準同型 $\mu \in \mathrm{Q}(G) \setminus \mathrm{H}^1(G)$ と交換子群の元 z に対し

$$\mathrm{cl}_G(z) \geq \frac{|\mu(z)|}{2D(\mu)} + \frac{1}{2} \tag{1}$$

が成り立つ. この不等式は本稿において非常に重要であり, また斉次擬準同型における典型的な議論を多く含むため, 証明を与えておく.

命題 2.2. (i). 斉次擬準同型は共役不変である.
(ii). 任意の斉次擬準同型 $\mu \in \mathrm{Q}(G)$ と任意の $g, h \in G$ に対し, $|\mu([g,h])| \leq D(\mu)$ が成り立つ.
(iii). 不等式 (1) が成り立つ.

Proof. (i). 斉次擬準同型をひとつ取り, $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ とおく. 群 G の元 g, h と整数 n に対し

$$\begin{aligned} n \cdot \mu(g^{-1}hg) &= \mu(g^{-1}h^n g) \underset{D(\mu)}{\sim} \mu(g^{-1}) + \mu(h^n g) \underset{D(\mu)}{\sim} \mu(g^{-1}) + \mu(h^n) + \mu(g) \\ &= -\mu(g) + n \cdot \mu(h) + \mu(g) = n \cdot \mu(h) \end{aligned}$$

となる. ここで実数 a, b, D に対し $a \underset{D}{\sim} b$ で $|a - b| \leq D$ を表す. したがって

$$n \cdot |\mu(g^{-1}hg) - \mu(h)| \leq 2D(\mu)$$

を得る. 整数 n は任意なので, $\mu(g^{-1}hg) = \mu(h)$ となる.

(ii). 共役不変性より

$$\mu([g,h]) = \mu(ghg^{-1}h^{-1}) \underset{D(\mu)}{\sim} \mu(ghg^{-1}) + \mu(h^{-1}) = \mu(h) - \mu(h) = 0$$

となり, $|\mu([g,h])| \leq D(\mu)$ を得る.

(iii). 交換子群の元 z が $z=[g_1,h_1]\cdots[g_n,h_n]$ と表されたとすると, (ii) より

$$\mu(z)=\mu([g_1,h_1]\cdots[g_n,h_n]) \underset{(n-1)D(\mu)}{\sim} \sum_{i=1}^{n}\mu([g_i,h_i]) \underset{nD(\mu)}{\sim} 0$$

となり, $|\mu(z)|\leq(2n-1)D(\mu)$ を得る. ここで $\mathrm{cl}_G(z)\leq n$ を合わせると不等式 (1) を得る. □

不等式 (1) は準同型でない任意の斉次擬準同型に対して成り立つため, 次が成り立つ:

$$\mathrm{cl}_G(z)\geq \sup_{\mu\in\mathrm{Q}(G)\setminus\mathrm{H}^1(G)} \frac{|\mu(z)|}{2D(\mu)}+\frac{1}{2}. \tag{2}$$

したがって, 準同型でない斉次擬準同型を用いることで交換子長を下から評価することが出来る. 自由群 F_2 の元 $[a,b]^3$ の交換子長が 2 以上であることを示すには, 自由群上の斉次擬準同型で $[a,b]^3$ での値がそれなりに大きいものを構成すればよく, 例えば Brooks による counting 擬準同型 [Bro81] を用いると証明できる.

自由群とは異なる例で, 斉次擬準同型の例と不等式 (2) の適用例を紹介する.

例 2.3. 円周の向きを保つ同相群を $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ で表す. $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ の普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ の記述のひとつに以下がある:

$$\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)=\{f\in\mathrm{Homeo}(\mathbb{R})\colon f\circ T=T\circ f\}.$$

ここで $T\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $+1$ 平行移動である. $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ 上の実数値関数 $\tau\colon\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)\to\mathbb{R}$ を

$$\tau(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^n(0)}{n}$$

で定める. この極限は常に存在し, τ は $D(\tau)=1$ の斉次擬準同型となる. これを Poincaré translation number という ([Poi81]).

定義から $\tau(T^k)=k$ が成り立つため, 不等式 (2) より

$$\mathrm{cl}_{\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)}(T^k)\geq\frac{\tau(T^k)}{2D(\tau)}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$$

が成り立つ. つまり $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ は交換子長に関して非有界な空間となる. これは $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ とは対照的な現象である. 実際, 任意の $f\in\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ は交換子一つで書けることが知られており [EHN81], $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ は交換子長に関して (半径が 1 の) 有界な空間となる.

3 混合交換子長と不変擬準同型

古典的な交換子長の類似として, $z\in[G,N]$ の**混合交換子長** $\mathrm{cl}_{G,N}(z)$ を

$$\mathrm{cl}_{G,N}(z)=\min\{n\colon z=[g_1,x_1]\cdots[g_n,x_n]\ \text{for some}\ g_i\in G, x_i\in N\}$$

で定める.

$[G,N]$ は $[G,G]$ の部分群なので, $[G,N]$ 上で古典的な交換子長 cl_G を考えることも出来る．したがって, $[G,N]$ 上にふたつのノルム

$$\mathrm{cl}_{G,N}\colon [G,N]\to\mathbb{N},\quad \mathrm{cl}_G\colon [G,N]\to\mathbb{N}$$

が得られる．定義から, 任意の $z\in[G,N]$ に対し

$$\mathrm{cl}_G(z)\le\mathrm{cl}_{G,N}(z)$$

が成り立つ．

定義からこの不等号は真に異なる場合が多いと期待される．このことを証明するためには, 混合交換子長を下から評価する方法が必要である．その際にうまく機能する概念が斉次擬準同型の不変性である．

定義 3.1. 斉次擬準同型 $\mu\in\mathrm{Q}(N)$ が G **不変**であるとは, 任意の $g\in G$ と $x\in N$ に対して

$$\mu(g^{-1}xg)=\mu(x)$$

が成り立つときをいう．N 上の G 不変斉次擬準同型全体の空間を $\mathrm{Q}(N)^G$ で表す．

命題 2.2 の (iii) と同様の計算により, 任意の $\mu\in\mathrm{Q}(N)^G$ と任意の $z=[g_1,x_1]\cdots[g_n,x_n]\in[G,N]$ に対し

$$|\mu(z)|\le(2n-1)D(\mu)$$

の成立が分かり,

$$\mathrm{cl}_{G,N}(z)\ge\frac{|\mu(z)|}{2D(\mu)}+\frac{1}{2} \tag{3}$$

を得る．

交換子長と混合交換子長の違いを検知するには何を見ればよいかを考える．例えば $z\in[G,N]$ が $g,h,g_i\in G$ と $x_i\in N$ を用いて $z=[g,h]=[g_1,x_1]\cdots[g_n,x_n]$ と表されていたとすると, 任意の $\mu\in\mathrm{Q}(G)$ に対し

$$\mu(z)\le D(\mu)$$

が成り立つ．一方で, 任意の $\mu\in\mathrm{Q}(N)^G$ に対しては

$$\mu(z)\le(2n-1)D(\mu)$$

が成り立ち, 一般に $\mu(z)\le D(\mu)$ が成り立つとは限らない．この違いが交換子長と混合交換子長の違いを検知していると見ることが出来る．実際, $\mathrm{cl}_G(z)=1$ なる $z\in[G,N]$ に対し, $|\mu(z)|>D(\mu)$ なる $\mu\in\mathrm{Q}(N)^G$ が見つかれば, $\mathrm{cl}_{G,N}(z)>1$ が分かる．またこのとき, 上記の不等号のずれから, $\mu\in\mathrm{Q}(N)^G$ は G 上の斉次擬準同型に拡張不可能である[*3]．以上のことをまとめると, 交換子長と混合交換子長の違いを具体的に観測するためには,

[*3] ここの記述は正確ではない．ただし商群 G/N が可解群のときにはこの記述は正当化でき, 以下で出てくる例では全てこの仮定を満たしている．

(1) (G,G)-交換子長が小さいことは分かるが, (G,N)-交換子長が小さいかどうかは不明な元 $z \in [G,N]$ と,
(2) G 上の斉次擬準同型に拡張不可能な, N 上の G 不変斉次擬準同型 $\mu \in \mathrm{Q}(N)^G$

を構成し, $\mu(z)$ がある程度大きくなることを計算できればよい. 次の章で, この方針が実行出来る例をひとつ紹介する.

4 円周作用を用いた不変擬準同型の構成と orbifold 基本群の交換子

まず [MMM22] で与えた不変擬準同型の構成のアイデアを説明する*4.

G を円周に作用する群とし, 作用を $\rho\colon G \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ で表す. また, 正規部分群 N で, G の円周への作用の N への制限が $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ にリフトするものを考える. つまり, 次の図式が可換になる状況を考える:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\widetilde{\rho}"] \arrow[d, "i"] & \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Homeo}_+(S^1). \end{tikzcd}$$

群コホモロジーの一般論 (例えば [Bro82] 参照) から, 中心拡大 $0 \to \mathbb{Z} \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathrm{Homeo}_+(S^1) \to 1$ に対応する群コホモロジー類 $e \in \mathrm{H}^1(\mathrm{Homeo}_+(S^1);\mathbb{Z})$ を ρ で引き戻したコホモロジー類 $\rho^*e \in \mathrm{H}^1(G;\mathbb{Z})$ が非零だとすると, 準同型 $\rho\colon G \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ は準同型 $G \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ にリフト出来ない. したがって, $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ 上の Poincaré translation number(斉次擬準同型) は N には引き戻せるが, G には直ちには引き戻すことが出来ないという状況になる. これで N 上の斉次擬準同型であって G に拡張不可能なものを構成出来ているように思えるが, G 不変性が一般には成立しない. ここでさらにコホモロジー類 ρ^*e の $\mathbb{R}$ 係数化が商群からの引き戻し $\mathrm{H}^2(G/N;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R})$ に属すると仮定すると,

$$\rho^*\tau + h\colon N \to \mathbb{R}$$

が G 不変斉次擬準同型となるような準同型 $h\colon N \to \mathbb{R}$ の存在を証明できる. この G 不変斉次擬準同型を μ_ρ とおくと, $D(\tau) = 1$ より $D(\mu_\rho) \le 1$ が分かり, さらに次が成り立つ.

命題 4.1. コホモロジー類 ρ^*e が非自明のとき, μ_ρ は G に斉次擬準同型として拡張不可能である. また, $g_i \in G$ と $x_i \in N$ に対し,

$$\mu_\rho([g_1,x_1]\cdots[g_n,x_n]) = \tau\left([\widetilde{\rho(g_1)}, \widetilde{\rho(x_1)}]\cdots[\widetilde{\rho(g_n)}, \widetilde{\rho(x_n)}]\right)$$

が成り立つ. ここで $\widetilde{\rho(g_i)}, \widetilde{\rho(x_i)} \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ はそれぞれ $\rho(g_i), \rho(x_i) \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ のリフトである.

これにより, 円周に作用する群 G については, 拡張不可能な G 不変擬準同型の構成法およびその計算公式が得られた.

*4 orbifold 基本群の例に適用する際には, ここでの議論を “$\mathbb{R}$ 係数化” する必要がある. 詳しくは [MMM22] を参照.

次に (G,G)-交換子長が小さく, (G,N)-交換子長が小さいか不明な元を構成する. 群 G として以下の表示を持つ群を考える:

$$G = \langle a, b \mid [a,b]^\ell = 1_G \rangle$$

ここで ℓ は 2 以上の整数とする. この群 G は torsion 元を持つ one-relator 群なので双曲群である. 幾何的には, この群 G は種数 ℓ の閉曲面の自然な $2\pi/\ell$ 回転による商として現れる orbifold の orbifold 基本群である.

G の元 g_i と, 交換子部分群 $N = [G,G]$ の元 w_i を次で定める:

$$g_i = \begin{cases} bab^{-1} & i = 1 \\ {}^{ba^{2-i}b^{-1}}a^{i-1} & i > 1 \end{cases}, \quad w_i = \begin{cases} [b,a] & i = 1 \\ {}^{ba^{2-i}b^{-1}}[b,a^{-1}] & i > 1. \end{cases}$$

ここで, $x, y \in G$ に対し ${}^x y$ という記号で y の x による共役, つまり ${}^x y = xyx^{-1}$ を表す. このとき, 直接計算で次が分かる:

$$[g_1, w_1] \cdots [g_{\ell-1}, w_{\ell-1}] = ba^2b^{-1}a^{-2}[a,b]^\ell a^{2-\ell}ba^{\ell-2}b^{-1}.$$

ここで $y = {}^{ba^2}b^{-1}$, $z = {}^{ba^2}a^{-\ell}$ とおくと, $[a,b]^\ell$ が群 G で自明なことを合わせて次を得る:

$$[g_1, w_1] \cdots [g_{\ell-1}, w_{\ell-1}] = [y, z] \in [G, N]. \tag{4}$$

つまり, $[y,z] \in [G,N]$ は (G,G)-単交換子で書き表せるが, (G,N)-交換子の積として書き表す際は $(\ell - 1)$ 個の (G,N)-交換子が (見かけ上は) 必要である. また, 準同型 $G \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ をうまく作り, さらに ($\mathbb{R}$ 係数化して構成した) μ_ρ に $[y,z]$ を代入して値を計算すると, (3) と合わせて $\mathrm{cl}_{G,N}([y,z])$ が実際に 1 より大きいことが $\ell \geq 4$ で確認できる. つまり (4) の元は交換子長と混合交換子長が真に異なる元となっている.

5 交換子長と混合交換子長の双リプシッツ非同値性

4 章で交換子長と混合交換子長が真に異なる例をひとつ与えた. この章では, (4) の元 $[y,z]$ を用いて, 交換子長と混合交換子長の双リプシッツ非同値性まで示せることを説明する.

鍵となる式は以下である.

補題 5.1. G を群とし, $g, h \in G$ とする. このとき, 任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対し次が成り立つ:

$$[g, h^n] = [g,h] \cdot {}^h[g,h] \cdot \cdots \cdot {}^{h^{n-2}}[g,h] \cdot {}^{h^{n-1}}[g,h].$$

この補題は直接計算で確認出来る.

補題 5.1 により, 4 章で構成した元 $[y,z]$ と不変擬準同型 μ_ρ に対し,

$$\begin{aligned} \mu_\rho([y, z^n]) &= \mu_\rho([y,z] \cdot {}^z[y,z] \cdot \cdots \cdot {}^{z^{n-2}}[y,z] \cdot {}^{z^{n-1}}[y,z]) \\ &\underset{(n-1)D(\mu_\rho)}{\sim} \mu_\rho([y,z]) + \mu_\rho({}^z[y,z]) + \cdots + \mu_\rho({}^{z^{n-2}}[y,z]) + \mu_\rho({}^{z^{n-1}}[y,z]) \\ &= n \cdot \mu_\rho([y,z]) \end{aligned}$$

が成り立つ．このことから $|\mu_\rho([y,z])| > D(\mu_\rho)$ であれば, $n \to \infty$ で $|\mu_\rho([y,z^n])| \to \infty$ となる．したがって $[y,z^n]$ の交換子長は常に 1 なのにも関わらず, $[y,z^n]$ の混合交換子長は無限大に発散する．つまり交換子長と混合交換子長は双リプシッツ同値でない．

4 章で扱った群 G には種数 ℓ の閉曲面の基本群 $\pi_1(\Sigma_\ell)$ からの自然な全射がある．この全射に関して上記の元 $[y,z^n]$ を適切に $\pi_1(\Sigma_\ell)$ に持ち上げ, また不変擬準同型 μ_ρ も引き戻すと, 曲面群とその交換子部分群に関しても交換子長と混合交換子長の双リプシッツ非同値性, つまり定理 1.1 が証明できる．

6　拡張不可能な不変擬準同型の空間

交換子長と混合交換子長の違いを検知するには拡張不可能な不変擬準同型が必要だった．準同型では交換子長の評価が出来ないことを踏まえると, cl_G と $\mathrm{cl}_{G,N}$ の違いの検知には以下の空間の非自明元が重要である:

$$\mathrm{Q}(N)^G/(\mathrm{H}^1(N)^G + i^*\mathrm{Q}(G)). \tag{5}$$

ここで i^* は包含写像 $i\colon N \to G$ による引き戻し, $\mathrm{H}^1(N)^G$ は N 上の G 不変準同型の空間である．空間 (5) が非自明であれば, その非自明元を用いて交換子長の比較が出来るかもしれない．

[KKM$^+$21] において, 空間 (5) の次元決定を行った．まず空間 (5) が非自明となる例を挙げる．

定理 6.1 ([KKM$^+$21])**.**　(i). G が種数 2 以上の閉曲面の基本群で N が交換子部分群のとき, (5) の次元は 1 である．

(ii). G が 3 次元閉双曲写像トーラス X の基本群で N がファイバーの基本群の交換子部分群のとき, (5) の次元は $\mathrm{H}^2(X;\mathbb{R})$ の次元に一致する．

(iii). G が 4 章で用いた orbifold 基本群で N が交換子部分群のとき, (5) の次元は 1 である．

次に空間 (5) が自明となる例を挙げる．

定理 6.2 ([KKM$^+$21])**.** 以下の G, N について, 空間 (5) は自明である．

(i). G が自由群, 向き付け不可能曲面の基本群, 結び目群, ブレイド群, 連結成分がふたつの双曲絡み目の基本群のいずれかで, N が交換子部分群のとき．

(ii). G が自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ $(n \geq 2)$ で, N が IA-自己同型群 IA_n のとき．

定理 6.1 で挙げた全ての例で, 交換子長と混合交換子長の双リプシッツ非同値が示されている ([MMM22])．定理 6.2 の例においては双リプシッツ非同値を観測する不変擬準同型の候補が無い．交換子長 (resp. 混合交換子長) を安定化した安定交換子長 (resp. 安定混合交換子長) という概念があり, 空間 (5) が消滅するとき, 安定交換子長と安定混合交換子長の双リプシッツ同値性は成立する ([KKM$^+$21])．つまり安定化した設定においては, 安定交換子長と安定混合交換子長の (双リプシッツの意味での) 違いを観測する不変擬準同型の候補が無い場合, そこには本当に違いが無いのである．

参考文献

[Bro81] Robert Brooks, *Some remarks on bounded cohomology*, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, pp. 53–63.

[Bro82] Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Cal09] Danny Calegari, *scl*, MSJ Memoirs, vol. 20, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[EHN81] David Eisenbud, Ulrich Hirsch, and Walter Neumann, *Transverse foliations of Seifert bundles and self-homeomorphism of the circle*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), no. 4, 638–660.

[Heu20] Nicolaus Heuer, *Computing commutator length is hard*, arXiv:2001.10230 (2020).

[KKM$^+$21] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *The space of non-extendable quasimorphisms*, arXiv:2107.08571 (2021).

[MMM22] Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *SCL and mixed SCL are not equivalent for surface groups*, arXiv:2203.09221 (2022).

[Poi81] Henri Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (i)*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **7 et 8** (1881), 375–422 et 251–296 (fre).