増大ネットワーク上の粘性解の安定性

北海道大学大学院 理学院 数学専攻　博士課程一年
牧田　慎平 (Shimpei MAKIDA)

概要

我々はユークリッド空間に埋め込まれたネットワークの列に対して, ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の安定性を示した. ここでいうネットワークはグラフの意味でなく, 線分の集まりで構成されるものを指す. 我々はネットワークの列の極限に比較的自然な制限を加えた上で, 粘性解の安定性が成立する条件を調べた. その副産物として, 粘性解を考えられるようなネットワークの列の極限の特徴付けを得た.

1　導入

$\mathbf{R}^d$ に埋め込まれた増大ネットワーク $\{\mathcal{N}^n\}_{n\in\mathbf{N}_{\geq 0}}$ とその $n\to\infty$ における極限 $\mathcal{N}$ を考える. $\mathcal{N}$ 上のハミルトン・ヤコビ方程式:

$$\partial_t u(t,x) + H(x, |\nabla u(t,x)|) = 0,\ (t,x)\in(0,T)\times\mathcal{N}, \tag{1.1}$$
$$u(0,x) = g(x),\ x\in\mathcal{N} \tag{1.2}$$

を考える. ここで, ハミルトニアン $H:\mathcal{N}\times[0,\infty)\to\mathbf{R}$ を

$$H(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x),$$

$V:\mathcal{N}\to\mathbf{R}$ は連続関数で定め, 初期関数 $g:\mathcal{N}\to\mathbf{R}$ をリプシッツ連続関数で定めておく. これに対して, 各ネットワーク $\mathcal{N}^n$ 上で対応するハミルトン・ヤコビ方程式:

$$\partial_t u(t,x) + H_n(x, |\nabla u(t,x)|) = 0,\ (t,x)\in(0,T)\times\mathcal{N}^n, \tag{1.3}$$
$$u(0,x) = g_n(x),\ x\in\mathcal{N}^n \tag{1.4}$$

を考える. なお, $H_n = H|_{\mathcal{N}^n}, g_n = g|_{\mathcal{N}^n}$ と定める.

自然な問いとして, (1.3), (1.4) の解 u_n は収束して (1.1), (1.2) の解になるか, という問いがある. このような問いは偏微分方程式の解の空間安定性の問題に分類される. ハミルトン・ヤコビ方程式に関しての研究として, [1, 2] がある. また楕円型, 放物型偏微分方程式に関しては 1970 年代から盛んに研究されている. 例えば, [6] やその参考文献を参照してほしい.

本講演の目的は得られた空間安定性の結果の周辺に関して紹介することである. そのため本稿では, 研究の動機, 主定理を述べるための言葉の準備, 主定理と証明の概略を簡単に述べる.

2　準備

この章では結果を述べるために, 主定理に用いられている用語の簡単な説明をする.

2.1　増大ネットワーク

まずはグラフとネットワークを定めていく. ネットワークの定義は [3] に従った.

定義 2.1. $V = \{v_i, i \in I\}$ を $\mathbf{R}^d$ の有限個の異なる点の集合とする. $\{\pi_j, j \in J\}$ を以下の条件 (1)-(4) を満たす有限個の非自己交差な線分の集合とする.

$$\pi_j : [0,1] \to \mathbf{R}^d, \quad j \in J$$

に対して, $e_j = \pi_j((0,1))$, $\bar{e}_j = \pi_j([0,1])$, $E = \{e_j, j \in J\}$ と定める.

(1) 任意の $j \in J$ に対して, $\pi_j(0), \pi_j(1) \in V$.
(2) 任意の $j \in J$ に対して, $\#(\bar{e_j} \cap V) = 2$.
(3) 任意の $j, k \in J$, $j \neq k$ に対して, $\bar{e}_j \cap \bar{e}_k \in V$, $\#(\bar{e}_j \cap \bar{e}_k) \leq 1$.
(4) 任意の $v, w \in V$ に対して, v, w を結ぶ道が存在する.

このとき, (V, E) をグラフと呼び, $\mathcal{N} = \bigcup_{j \in J} \bar{e}_j$ をグラフ (V, E) に対応するネットワークと呼ぶ.

増大ネットワークの定義を与える. ネットワークの族 $\{\mathcal{N}^n\}_{n \in \mathbf{N}_{\geq 0}}$ はグラフの族 (V^n, E^n) に対応するものとし, 種々の量を上付き n で表記する. 例えば, 辺集合 E^n は $\{e_j^n, j \in J^n\}$ と表記する. また, ここでのネットワークの意味は, 線分で構成された図形のことを指す. 正確な定義は [3] を参照されたい.

定義 2.2. ネットワークの族 $\{\mathcal{N}^n\}_{n \in \mathbf{N}_{\geq 0}}$ が以下の条件を満たすとき, $\{\mathcal{N}^n\}_{n \in \mathbf{N}_{n \geq 0}}$ は増大ネットワークと定める.

(1) 任意の $n \in \mathbf{N}_{\geq 0}$ に対して,
$$\mathcal{N}^n \subset \mathcal{N}^{n+1}, \quad V^n \subset V^{n+1}.$$

(2) (1) の条件のもと, 任意の頂点 $v_j^n \in V^n$ に対して以下の性質が成り立つ. $l \geq n$ に対してある $r_l > 0$ が存在して,
$$B_{r_l}(v_j^n) \cap \mathcal{N}^l = B_{r_l}(v_j^n) \cap \mathcal{N}^n.$$

2.2　ハウスドルフ距離

ハウスドルフ距離は集合間の距離である. (X, d) を距離空間とする. まず, $A \subset X$ として, 集合 A からの距離 d_A を次の式で定めておく.

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(y, x).$$

d_A を用いて, A の ϵ 近傍を,

$$N(A,\epsilon) = \{x \in X : d_A(x) \leq \epsilon\}$$

と定める．これらの準備のもと, ハウスドルフ距離を定義する．

定義 2.3. $A, B \subset X$ に対して, ハウスドルフ距離 $d_H(A,B)$ を,

$$d_H(A,B) = \inf\{\epsilon \geq 0 : B \subset N(A,\epsilon), A \subset N(B,\epsilon)\}$$

で与える．

2.3 距離空間上の粘性解

本研究では, グラフや距離空間におけるハミルトン・ヤコビ方程式の解概念として, Gangbo, Święch による粘性解の定式化を採用した [4, 5]．以下ではこの流儀における粘性解の定義を与える．(Ω, d) を完備測地空間, $x_0 \in \Omega$ を基準点とする．まず距離空間上の関数に対する微分に対応する概念を用意しておく．$T > 0$ とする．$v : (0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ に対して, $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$ における v のプラススロープ とマイナススロープをそれぞれ

$$|\nabla^+ v(t,x)| = \limsup_{y \to x} \frac{[v(t,y) - v(t,x)]_+}{d(y,x)}, \ |\nabla^- v(t,x)| = \limsup_{y \to x} \frac{[v(t,y) - v(t,x)]_-}{d(y,x)},$$

スロープを

$$|\nabla v(t,x)| = \limsup_{y \to x} \frac{|v(t,y) - v(t,x)|}{d(y,x)}$$

と定める. ただし, 関数 $f : (0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ の正成分 $[f(t,x)]_+$, 負成分 $[f(t,x)]_-$ はそれぞれ,

$$[f(t,x)]_+ = \max\{0, f(t,x)\}, \ [f(t,x)]_- = \max\{0, -f(t,x)\}$$

と, 定義している．

定義 2.4. 関数 $\phi : (0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ が以下の性質を満たすとき, ϕ が (劣) テスト関数であると定める．

(1) 局所リプシッツ関数 $\phi_1, \phi_2 : (0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ が存在して $\phi = \phi_1 + \phi_2$ の形でかける．
(2) ϕ_1, ϕ_2 は, $(0,T) \times \Omega$ 上で局所有界かつ局所リプシッツであり, $(0,T) \times \Omega$ 上, $|\nabla \phi_1(t,x)| = |\nabla^- \phi_1(t,x)|$ が成立し, $(0,T) \times \Omega$ 上 $|\nabla \phi_1(t,x)|$ は連続である．
(3) $(0,T) \times \Omega$ 上, $\partial_t \phi_1, \partial_t \phi_2$ はそれぞれ連続である．

劣テスト関数の集合全体を $\underline{\mathcal{C}}$ と表記する．

同様に, $\phi : (0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ に対して, $-\psi \in \underline{\mathcal{C}}$ が成立するとき, ψ が (優) テスト関数であると定める．(優) テスト関数の集合全体を $\overline{\mathcal{C}}$ と表記する．

例 2.5. $\mathbf{R}$ 上で $f(x) = |x|$ を考える. これは $x \neq 0$ では $|\nabla f(x)| = |\nabla^- f(x)|$ が成立するが $x = 0$ においては成立しない. というのも $x = 0$ においては $|\nabla f(x)| = 1$, $|\nabla^- f(x)| = 0$ であるためである．

ハミルトン・ヤコビ方程式を考える.

$$\partial_t u(t,x) + H(x, |\nabla u(t,x)|) = 0,\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{2.1}$$
$$u(0,x) = g(x),\ x \in \Omega. \tag{2.2}$$

ただし, ハミルトニアン $H : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を,

$$H(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x),$$

$V : \Omega \to \mathbf{R}$ は連続関数, 初期関数 $g : \Omega \to \mathbf{R}$ をリプシッツ関数で定める. 関数 $f : (0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ に対して, 上半連続包 f^*, 下半連続包 f_* を以下のように定めておく.

$$f^*(t,x) = \limsup_{(s,y)\to(t,x)} f(s,y),\ f_*(t,x) = \liminf_{(s,y)\to(t,x)} f(s,y).$$

準備が整ったので, ハミルトン・ヤコビ方程式 (2.1), (2.2) の粘性解の定義を与える.

定義 2.6. (1) 局所有界な上半連続関数 $u : [0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ に対して, もし Ω 上で $u(0,x) \le g(x)$ を満たし, かつ $u - \phi$ ($\phi \in \underline{\mathcal{C}}$) が $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$ で局所最大値を取るならば,

$$\partial_t \phi + H(x, |\nabla \phi_1(t,x)| - |\nabla \phi_2(t,x)|^*) \le 0$$

が成立するとき, u はハミルトン・ヤコビ方程式 (2.1), (2.2) の粘性劣解であると定める.

(2) 局所有界な下半連続関数 $u : [0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ に対して, もし Ω 上で $u(0,x) \ge g(x)$ を満たし, かつ $u - \phi$ ($\phi \in \overline{\mathcal{C}}$) が $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$ で局所最小値を取るならば,

$$\partial_t \phi + H(x, |\nabla \phi_1(t,x)| + |\nabla \phi_2(t,x)|_*) \ge 0$$

が成立するとき, u はハミルトン・ヤコビ方程式 (2.1), (2.2) の粘性優解であると定める.

(3) u がハミルトン・ヤコビ方程式 (2.1), (2.2) の粘性劣解かつ粘性優解であるとき, u がハミルトン・ヤコビ方程式 (2.1), (2.2) の粘性解であると定める.

3 結果

初めの問いの答えとして, 以下の結果を得た [7].

定理 3.1. u_n を (1.3), (1.4) の一意な粘性解とする. 以下の条件を仮定する.

(1) 増大ネットワーク $\{\mathcal{N}^n\}_{n\in\mathbf{N}_{\ge 0}}$ に対して, あるコンパクト集合 $\mathcal{N}$ が存在して,

$$d_H(\mathcal{N}^n, \mathcal{N}) \to 0, \quad n \to \infty$$

が成立する. d_H は $\mathbf{R}^d$ 上のハウスドルフ距離とする.

(2) 距離 δ_n, $\tilde{d}$ は以下の連続性を持つ: $a, b \in \mathcal{N}$ に $\tilde{d}$ に関して収束する数列 $a_n, b_n \in \mathcal{N}^n$ に対して,

$$\delta_n(a_n, b_n) \to \tilde{d}(a,b).$$

(3) $\mathcal{N}$ 上, $d_E \to 0$ ならば, $\tilde{d} \to 0$ が成立する. ただし $\tilde{d}$ は $\mathcal{N}$ の内的距離とする. また, 内的距離とは 2 点を結ぶ曲線の長さの最小として与えられる距離のことである.

(4) 距離 $\tilde{d}$ は $\mathcal{N}$ 上で有限.

このとき, ある (1.1), (1.2) の粘性解 $u : [0,T) \times \mathcal{N} \to \mathbf{R}$ が存在して, 各 $[0,T) \times \mathcal{N}^m$ 上で $u_n (n \geq m)$ は u に一様収束する.

補足 3.2. $\mathcal{N}$ が粘性解を適用できるような適切な距離空間である必要性があるが, このことは定理の仮定のもとに保証される [7].

簡単に証明の概略を説明したい. 方針はアスコリ・アルツェラの定理を用いて, (1.3), (1.4) の粘性解 $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ から極限関数 u を取り出し, u が (1.1), (1.2) の粘性解であることを確かめる, というものである. 難しい (面白い) 点として, ハウスドルフ距離における極限として $\mathcal{N}$ を特徴付けるために $\mathcal{N} = \overline{\bigcup_{l=0}^{\infty} \mathcal{N}^l}$ と表せるが, この閉包がネットワークの列の極限空間としての幾何学的な構造を壊してしまう. この困難を粘性解の言い換えの命題を用いて回避する.

参考文献

[1] Achdou, Yves and Tchou, Nicoletta, Hamilton-Jacobi equations on networks as limits of singularly perturbed problems in optimal control: dimension reduction, Comm. Partial Differential Equations 40, 652–693, 2015.

[2] Camilli, Fabio and Capitanelli, Raffaela and Marchi, Claudio, Eikonal equations on the Sierpinski gasket, Math. Ann. 364, 1167-1188, 2016.

[3] Camilli, Fabio and Schieborn, Dirk, Viscosity solutions of Eikonal equations on topological networks, Calc. Var. Partial Differential Equations 46, 671–686, 2013.

[4] Gangbo, Wilfrid and Święch, Andrzej, Optimal transport and large number of particles, Discrete Contin. Dyn. Syst. 34, 1397-1441, 2014.

[5] Gangbo, Wilfrid and Święch, Andrzej, Metric viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations depending on local slopes, Calc. Var. Partial Differential Equations 54, 1183-1218, 2015.

[6] Jimbo, Shuichi, The singularly perturbed domain and the characterization for the eigenfunctions with Neumann boundary condition, J. Differential Equations 77, 322–350, 1989.

[7] Makida Shimpei, Stability of viscosity solutions on expanding networks, submitted.

[8] Nakayasu Atsushi, Homogenization of Hamilton-Jacobi equations on the Sierpinski gasket, in preparation.