Weighted estimates and large time behavior of solutions to the semilinear heat equation

早稲田大学大学院 先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻 修士課程 2 年
草場 竜之介 (Ryunosuke KUSABA)*

概 要

本稿では, 熱半群の重み付き評価と漸近展開の精密化を基礎として, 冪乗型の非線形項を持つ半線形熱方程式に対する時間大域解の重み付き評価と長時間挙動を考察する. 尚, 本稿は小澤徹教授 (早稲田大学) との共同研究 [19] に基づく.

1 導入

本稿では, 次の半線形熱方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(u), & (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0) = \varphi, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{P}$$

但し, $u\colon [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は未知函数, $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は初期時刻 $t = 0$ で与えられた初期値, Δ は $\mathbb{R}^n$ におけるラプラシアン, $\partial_t \coloneqq \partial/\partial t$ である. さらに, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は冪乗型の非線形項で, ある $p \in (1,+\infty)$ により,

$$f(u) = \pm u^p, \ \ \pm |u|^p, \ \ \pm |u|^{p-1} u$$

のいずれかで表されるものとする. このような冪乗型の非線形項を持つ半線形熱方程式は, 数学以外の文脈でも様々な場面で登場し, 例えば燃焼反応を記述する数理モデルとして現れる (cf. [2, 22]).

初期値問題 (P) を数学的に解析した論文として Fujita [3] が先駆的である. この論文は, 空間次元 n と解の挙動の関係を探るために, 非線形項を $f(u) = u^p$ とした (P) を考案・解析し, 解の挙動が冪の指数 p と空間次元のみから定まる指数 $p_F(n) \coloneqq 1 + 2/n$ の大小関係に応じて次のように変化することを明らかにした：

(1) $p > p_F(n)$ のとき, 十分に小さい非負の初期値に対して (P) は一意的な時間大域解を持つ.

(2) $p < p_F(n)$ のとき, 恒等的に零でない非負の初期値に対する (P) の解は有限時間で爆発する.

その後, Hayakawa [6] や Kobayashi-Sirao-Tanaka [18] などにより, $p = p_F(n)$ の場合は (2) に該当することが示された. また, 他の冪乗型の非線形項の場合も数多くの論文で解析されており, いずれの場合も $p_F(n)$ は解の挙動を特徴づける重要な指数の一つである (cf. [5, 1]). 以上のことから, $p_F(n)$ は発見者の名を冠して藤田指数と呼ばれている.

さて, 非線形項がいずれの場合でも, $p > p_F(n)$ ならば (非負とは限らない) 小さな初期値に対して (P) は一意的な時間大域解を持つことが知られている. 本稿では, その時間大域解に対する重み付き評価と長時間挙動に関して得た結果を報告する.

*ryu2411501@akane.waseda.jp

2 熱半群の基本評価と漸近展開

本研究に関連する先行研究を述べる前に, 熱半群の基本事項を纏めて置く. 以下, 非負整数全体の成す集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と表し, 各 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$|\alpha| \coloneqq \sum_{j=1}^n \alpha_j, \qquad \alpha! \coloneqq \prod_{j=1}^n \alpha_j!, \qquad x^\alpha \coloneqq \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}, \qquad \partial^\alpha \coloneqq \prod_{j=1}^n \partial_j^{\alpha_j}, \qquad \partial_j \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_j}$$

と定義する. また, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ が任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $\alpha_j \leq \beta_j$ を満たすとき, $\alpha \leq \beta$ と表す. さらに, 各 $q \in [1, +\infty]$ に対して Lebesgue 空間 $L^q(\mathbb{R}^n)$ のノルムを $\|\cdot\|_q$ と表し, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して重み付き Lebesgue 空間 $L^1_m(\mathbb{R}^n)$ を,

$$L^1_m(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) ; |\alpha| \leq m \text{ なる任意の } \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \text{ に対して } x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \right\}$$

と定義する. 但し, $x^\alpha \varphi$ は $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto x^\alpha \varphi(x) \in \mathbb{R}$ なる函数を表す.

各 $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \in [1, +\infty]$ に対し, φ を初期値とする線形熱方程式 ($f \equiv 0$ とした (P)) の $t \geq 0$ における解を $e^{t\Delta}\varphi$ と表す. 初期値に対する解の一意性より, $L^q(\mathbb{R}^n)$ 上の有界線形作用素の族 $\left(e^{t\Delta}; t \geq 0\right)$ は半群を成し, これを熱半群という. 特に $t > 0$ のとき, $e^{t\Delta}\varphi$ は Gauss 核

$$G_t(x) \coloneqq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

を用いて,

$$\left(e^{t\Delta}\varphi\right)(x) = (G_t * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\varphi(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

と表される. ここで, 各 $t > 0$ に対し, 伸長 δ_t を $L^1(\mathbb{R}^n)$ における等長作用素として,

$$(\delta_t \varphi)(x) = t^{-\frac{n}{2}} \varphi\left(t^{-\frac{1}{2}} x\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

と定義する. このとき, 任意の $q \in [1, +\infty]$ に対して,

$$\|\delta_t \varphi\|_q = t^{-\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right)} \|\varphi\|_q \tag{2.1}$$

が成り立つ. また, $G_t = \delta_t G_1$ より任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して,

$$\partial^\alpha G_t = \partial^\alpha (\delta_t G_1) = t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \delta_t (\partial^\alpha G_1)$$

が成り立ち,

$$\partial^\alpha e^{t\Delta}\varphi = (\partial^\alpha G_t) * \varphi = t^{-\frac{|\alpha|}{2}} (\delta_t (\partial^\alpha G_1)) * \varphi$$

と表される. よって, Hausdorff-Young の不等式と式 (2.1) より, $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ ならば任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $t > 0$ に対して,

$$\left\|\partial^\alpha e^{t\Delta}\varphi\right\|_p \leq t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) - \frac{|\alpha|}{2}} \|\partial^\alpha G_1\|_r \|\varphi\|_q \tag{2.2}$$

が成り立つ. 但し, $r \in [1, +\infty]$ は $1/p + 1 = 1/r + 1/q$ なる指数である. 次に, 熱半群の漸近展開を考える. そこで, 各 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し, α 次の多変数 Hermite 多項式 $\boldsymbol{H}_\alpha$ を,

$$\boldsymbol{H}_\alpha(x) \coloneqq (-1)^{|\alpha|} e^{|x|^2} \partial^\alpha e^{-|x|^2} = \sum_{2\beta \leq \alpha} \frac{(-1)^{|\beta|}\alpha!}{\beta!(\alpha - 2\beta)!}(2x)^{\alpha - 2\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

と定義し,

$$\boldsymbol{h}_\alpha(x) \coloneqq \boldsymbol{H}_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{2\beta \leq \alpha} \frac{(-1)^{|\beta|}\alpha!}{\beta!(\alpha - 2\beta)!} x^{\alpha - 2\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

と置く. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha G_1)(x) &= (-1)^{|\alpha|} 2^{-|\alpha|} G_1(x) \boldsymbol{H}_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= (-1)^{|\alpha|} 2^{-|\alpha|} G_1(x) \boldsymbol{h}_\alpha(x)\end{aligned}$$

となる. さて, $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とすると, 熱半群の積分表示に現れる $G_t(x-y)$ の N 次の Taylor 展開は,

$$\begin{aligned}G_t(x-y) &= \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!}(-y)^\alpha (\partial^\alpha G_t)(x) \\ &\quad + \sum_{|\alpha| = N+1} \frac{N+1}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^N (-y)^\alpha (\partial^\alpha G_t)(x - \theta y)\, d\theta \\ &= \sum_{k=0}^N 2^{-k} t^{-\frac{k}{2}} \sum_{|\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha (\delta_t(\boldsymbol{h}_\alpha G_1))(x) \\ &\quad + 2^{-(N+1)} t^{-\frac{N+1}{2}} \sum_{|\alpha| = N+1} \frac{N+1}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^N y^\alpha (\delta_t(\boldsymbol{h}_\alpha G_1))(x - \theta y)\, d\theta\end{aligned}$$

と表される. よって, $\varphi \in L^1_{N+1}(\mathbb{R}^n)$ ならば任意の $q \in [1, +\infty]$, $t > 0$ に対して,

$$t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right)} \left\| e^{t\Delta}\varphi - \sum_{k=0}^N 2^{-k} t^{-\frac{k}{2}} \sum_{|\alpha| = k} c_\alpha \delta_t(\boldsymbol{h}_\alpha G_1) \right\|_q \leq 2^{-(N+1)} t^{-\frac{N+1}{2}} \sum_{|\alpha| = N+1} \frac{1}{\alpha!} \|\boldsymbol{h}_\alpha G_1\|_q \|x^\alpha \varphi\|_1$$

が成り立つ. 但し,

$$c_\alpha \coloneqq \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha \varphi(y)\, dy$$

である. 本稿ではこのような漸近展開を N 次の漸近展開と呼ぶ[1].

---

[1]本質的には何も変わらないが, 殆どの文献で熱半群の漸近形は $(-1)^{|\alpha|} c_\alpha \partial^\alpha G_t$ であり, それが Hermite 多項式を用いて具体的に, かつ減衰部分 $t^{-k/2}$ と形状部分 $2^{-k} c_\alpha \delta_t(\boldsymbol{h}_\alpha G_1)$ の積として書き下せることを明示した文献は我々が知る限り他にない.

3 先行研究

初期値問題 (P) の時間大域解の漸近展開を導出した論文は数多くある. 例えば, 0 次の漸近展開は [5, 16, 17, 20, 8, 21] などにより様々な方法で導出されている. また, 高次の漸近展開も [7, 9, 10, 12, 13] により得られているが, 0 次の漸近展開の場合と比較してその方法は豊富でないように思われる. 実際, Ishige-Ishiwata-Kawakami [7] は熱半群の L^1 減衰評価を導出し, (P) の時間大域解をその L^1 ノルムの減衰率に応じて分類した. その中で, 非線形項の冪の指数 p がある程度大きいという仮定の下, 時間大域解の L^1 ノルムの減衰率に応じた漸近展開を得ている. この漸近展開に関する結果は Ishige-Kawakami [9] により改善され, 時間大域解の L^1 ノルムの減衰率や非線形項の冪の指数 p に余計な仮定を課さずに高次の漸近展開を得ている. しかし, その代償として解の漸近形は熱方程式の重要な構造の一つである放物型の自己相似性 (cf. [4, Section 1.2]) を失った. その後, [10, 12, 13] により他の半線形放物型偏微分方程式にも適用できるよう拡張された. この方法は, 熱方程式との関連が深い半線形消散型波動方程式の時間大域解の漸近展開を導出する際にも有効である [15, 14]. 従って, [7, 9] によって導入・改良された方法は非常に強力なものであるが, これは高次の漸近展開だけでなく, 1 次の漸近展開を導出する方法としても我々が知る限り唯一の方法である. そこで我々は, 初期値問題 (P) の時間大域解の漸近展開を [7, 9] と異なる方法で導出した (定理 4.6, 4.7).

さらに, 熱半群の漸近展開からも推察できる通り, (P) の時間大域解の漸近展開を導出するためには解の重み付き評価が必要となる. 多くの場合, 時間大域解の重み付き評価は比較原理を用いて導出されるが (cf. [7, Lemma 3.1]), そのためには解が比較原理を適用できる枠組みに入っているかどうかに注意を払う必要がある. また, [10, Theorem 3.1] や [11, Theorem 1.2] は線形方程式の解による逐次近似と Ascoli-Arzelà の定理に基づくコンパクト性の議論により解の重み付き評価を導出しているが, その際, 近似列の極限と (P) の解が一致していることを確認する必要がある. このような問題を払拭するために, 我々は熱半群の重み付き評価を精密化し, それを応用した直接計算によって時間大域解の重み付き評価を導出した (定理 4.1, 4.2, 4.5).

4 主定理

まず, 熱半群と掛け算作用素と見做した重み函数の交換関係の具体的表示とその評価に関する定理を述べる.

定理 4.1
$m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $|\alpha| = m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ と任意の $t > 0$ に対して $x^\alpha e^{t\Delta}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ となり,

$$x^\alpha e^{t\Delta}\varphi - e^{t\Delta}x^\alpha\varphi = R_\alpha(t)\varphi \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n) \tag{4.1}$$

が成り立つ. 但し,

$$R_\alpha(t)\varphi := \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta\neq 0}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}(-2t\partial)^\beta e^{t\Delta}x^\gamma\varphi + \sum_{\substack{\beta+\gamma\leq\alpha,\ |\beta+\gamma|\leq|\alpha|-2 \\ |\beta|+1\leq\ell\leq\frac{|\alpha|+|\beta|-|\gamma|}{2}}} C^\alpha_{\ell\beta\gamma}t^\ell\partial^\beta e^{t\Delta}x^\gamma\varphi \tag{4.2}$$

であり, $C^\alpha_{\ell\beta\gamma}$ は t, x, φ に依存しない実定数である.

定理 4.2
$m \in \mathbb{N}$ とする．このとき, ある $C_m > 0$ が存在し, 任意の $\varphi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ に対して,

$$\sum_{|\alpha|=m} \left\| x^\alpha e^{t\Delta}\varphi - e^{t\Delta} x^\alpha \varphi \right\|_1 \le C_m \left\{ t^{\frac{1}{2}} \left\| |x|^{m-1} \varphi \right\|_1 + \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{m}{2}} \right) \|\varphi\|_1 \right\} \tag{4.3}$$

が成り立つ．

熱半群の積分表示より, 任意の $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ に対して,

$$\sum_{|\alpha|=m} \left\| x^\alpha e^{t\Delta}\varphi \right\|_1 \le C \left(\left\| |x|^m \varphi \right\|_1 + t^{\frac{m}{2}} \|\varphi\|_1 \right)$$

と評価される (cf. [7, Lemma 2.1])．上式と式 (4.3) を比較すると, 右辺に現れる重み函数の冪が式 (4.3) では m から $m-1$ に減少していることが分かる．この差が, 後に述べる (P) の時間大域解の重み付き評価を比較原理やコンパクト性の議論に依らない直接計算で導出する際に重要となる．

注意 4.3
定理 4.1, 4.2 より, 任意の $\varphi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ に対して,

$$\sum_{|\alpha|=m} \|R_\alpha(t)\varphi\|_1 \le C_m \left\{ t^{\frac{1}{2}} \left\| |x|^{m-1} \varphi \right\|_1 + \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{m}{2}} \right) \|\varphi\|_1 \right\} \tag{4.4}$$

が成り立つ．実は, $\varphi \in L^1_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ であっても上式は成立する．このことは, $\varphi \in L^1_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ ならば $|\alpha| = m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ に対して $R_\alpha(t)\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ となることを反映している．

次に, (P) の時間大域解の重み付き評価と長時間挙動に関する定理を述べる．以下, 考える時間大域解は次の命題で与えられるものとする．この命題はよく知られたものであり, (P) に対応する積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta}\varphi + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(u(s))\, ds \tag{I}$$

に縮小写像の議論を適用することで示される．

命題 4.4 (cf. [11, Theorem 1.2], [21, Theorem 20.15])
$p > p_F(n)$ とする．このとき, ある $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,p) > 0$ が存在し, $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_\infty \le \varepsilon_0$ なる任意の $\varphi \in \left(L^1 \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ に対して (P) の時間大域解

$$u \in X := (C \cap L^\infty)\left([0,+\infty); L^1(\mathbb{R}^n)\right) \cap (C \cap L^\infty)\left((0,+\infty); L^\infty(\mathbb{R}^n)\right)$$

が唯一つ存在する．さらに,

$$\sup_{q \in [1,+\infty]} \sup_{t \ge 0} (1+t)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \|u(t)\|_q < +\infty \tag{4.5}$$

が成り立つ．

定理 4.5
$p > p_F(n)$, $m \in \mathbb{N}$ とする．さらに, $\varphi \in \left(L^1_m \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ を $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_\infty \le \varepsilon_0$ なるものとし, $u \in X$ を命題 4.4 で与えられる (P) の時間大域解とする．このとき, $u \in C\left([0,+\infty); L^1_m(\mathbb{R}^n)\right)$ である．さらに, ある $C_m > 0$ が存在し, 任意の $t \ge 0$ に対して,

$$\sum_{|\alpha|=m} \|x^\alpha u(t)\|_1 \le C_m \left(1 + t^{\frac{m}{2}}\right) \tag{4.6}$$

が成り立つ．

定理 4.6
$p > p_F(n)$ とする．さらに, $\varphi \in \left(L^1 \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ を $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_\infty \le \varepsilon_0$ なるものとし, $u \in X$ を命題 4.4 で与えられる (P) の時間大域解とする．このとき, 任意の $q \in [1, +\infty]$ に対してある $C_q > 0$ が存在し, 任意の $t > 1$ に対して,

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left\|u(t) - e^{t\Delta}\varphi_1\right\|_q \le \begin{cases} C_q t^{-\sigma} & \text{if} \quad 0 < \sigma < 1, \\ C_q t^{-1} \log(1+t) & \text{if} \quad \sigma = 1, \\ C_q t^{-1} & \text{if} \quad \sigma > 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

が成り立つ．但し,

$$\sigma \coloneqq \frac{n}{2}(p-1) - 1 > 0, \qquad \varphi_1 \coloneqq \varphi + \int_0^{+\infty} f(u(s))\, ds \in \left(L^1 \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$$

である．

定理 4.5, 4.6 と熱半群の漸近展開を組み合わせると, (P) の時間大域解の漸近展開を得る．

定理 4.7
$N \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, $p > 1 + (N+3)/n$ とする．さらに, $\varphi \in \left(L^1_{N+1} \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ を $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_\infty \le \varepsilon_0$ なるものとし, $u \in X$ を命題 4.4 で与えられる (P) の時間大域解とする. このとき, 任意の $q \in [1, +\infty]$ に対してある $C_q > 0$ が存在し, 任意の $t > 1$ に対して,

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left\|u(t) - \sum_{k=0}^{N} 2^{-k} t^{-\frac{k}{2}} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \delta_t \left(\boldsymbol{h}_\alpha G_1\right)\right\|_q \le \begin{cases} C_q t^{-\frac{1}{2}} & \text{if} \quad N = 0, \\ C_q t^{-1} & \text{if} \quad N \ge 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

が成り立つ．但し,

$$\varphi_1 \coloneqq \varphi + \int_0^{+\infty} f(u(s))\, ds, \qquad c_\alpha \coloneqq \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha \varphi_1(y)\, dy$$

である．

注意 4.8
命題 4.4 と定理 4.5 より, $p > 1 + (N+3)/n$ は $\varphi_1 \in L^1_{N+1}(\mathbb{R}^n)$ であるための十分条件である．

注意 4.9
定理 4.5, 4.6, 4.7 において初期値の小ささ, 即ち $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_\infty \le \varepsilon_0$ なる仮定は本質的でなく, いずれも式 (4.5) を満たす全ての時間大域解 $u \in X$ に対して成立する．しかし, (P) の解は必ずしも式 (4.5) を満たさない．実際, Kawanago [16] は $f(u) = u^p$, $p > p_{\mathrm{F}}(n)$ の場合に, 十分に大きい非負の初期値に対する (P) の解は式 (4.5) を満たさないことを示した.

定理 4.5 と定理 4.7 は, 結果だけに注目すると既に知られているものだが, 前節で述べたように, 我々の新規性はそれらの証明方法にある．また, 定理 4.7 で得た (P) の時間大域解の漸近形 $2^{-k} t^{-k/2} c_\alpha \delta_t \left(\boldsymbol{h}_\alpha G_1\right)$ は放物型の自己相似性を持っていることに注意する．しかし, $k \ge 2$ の場合, 漸近形は剰余項よりも (t に関して) 速く減衰するため, 剰余項の減衰評価には改善の余地がある．

5 主定理の証明の概略

各 $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対し, e_j を第 j 成分のみが 1 でその他の成分が全て 0 の多重指数とする.

定理 4.1 の証明の概略

定理の主張を $m \in \mathbb{N}$ に関する命題 $(\mathrm{A})_m$ と見做し, m に関する帰納法で示す. ここでは簡単のため $(\mathrm{A})_1$ と $(\mathrm{A})_2$ のみを示す. まず, $m = 1$ の場合を考える. 仮定と式 (2.2) より $e^{t\Delta}\varphi$, $\partial_j e^{t\Delta} x_j \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり, 熱半群の積分表示より,

$$\begin{aligned}\left(e^{t\Delta} x_j \varphi - 2t\partial_j e^{t\Delta}\varphi\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\, y_j \varphi(y)\, dy - 2t\partial_j \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\, \varphi(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\, y_j \varphi(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}^n} (x_j - y_j)\, G_t(x-y)\, \varphi(y)\, dy \\ &= x_j \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\, \varphi(y)\, dy \\ &= x_j \left(e^{t\Delta}\varphi\right)(x)\end{aligned}$$

となる. よって, $x_j e^{t\Delta}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$x_j e^{t\Delta}\varphi = e^{t\Delta} x_j \varphi - 2t\partial_j e^{t\Delta}\varphi \tag{5.1}$$

が成り立つ. 次に, $m = 2$ の場合を考える. 仮定と $(\mathrm{A})_1$ より $x_k e^{t\Delta}\varphi$, $x_k e^{t\Delta} x_j \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$x_k e^{t\Delta}\varphi = e^{t\Delta} x_k \varphi - 2t\partial_k e^{t\Delta}\varphi, \tag{5.2}$$

$$x_k e^{t\Delta} x_j \varphi = e^{t\Delta} x_j x_k \varphi - 2t\partial_k e^{t\Delta} x_j \varphi \tag{5.3}$$

が成り立つ. 一方, 仮定と式 (2.2) より式 (5.2) の右辺は $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ に属するから $\partial_j \left(x_k e^{t\Delta}\varphi\right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$\partial_j e^{t\Delta} x_k \varphi - 2t\partial_j \partial_k e^{t\Delta}\varphi = \partial_j \left(x_k e^{t\Delta}\varphi\right) = x_k \partial_j e^{t\Delta}\varphi + \delta_{jk} e^{t\Delta}\varphi \tag{5.4}$$

が成り立つ. よって, $x_k \partial_j e^{t\Delta}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり, 式 (5.1), (5.3), (5.4) より,

$$\begin{aligned}x_j x_k e^{t\Delta}\varphi &= x_k e^{t\Delta} x_j \varphi - 2t x_k \partial_j e^{t\Delta}\varphi \\ &= e^{t\Delta} x_j x_k \varphi - 2t\partial_k e^{t\Delta} x_j \varphi - 2t\partial_j e^{t\Delta} x_k \varphi + 4t^2 \partial_j \partial_k e^{t\Delta}\varphi + 2t\delta_{jk} e^{t\Delta}\varphi\end{aligned}$$

となる. 特に, $x_j x_k e^{t\Delta}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ である. 同様にして $(\mathrm{A})_m \Rightarrow (\mathrm{A})_{m+1}$ が成り立つことも示せる. 形式的には, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $|\alpha| = m$ とすると,

$$\begin{aligned}x_j x^\alpha e^{t\Delta}\varphi &= x_j e^{t\Delta} x^\alpha \varphi + x_j R_\alpha(t)\, \varphi \\ &= e^{t\Delta} x_j x^\alpha \varphi - 2t\partial_j e^{t\Delta} x^\alpha \varphi + x_j R_\alpha(t)\, \varphi\end{aligned}$$

となるから, この等式が $L^1(\mathbb{R}^n)$ で意味を持ち, 最右辺の第二項と第三項が $R_{\alpha+e_j}(t)\,\varphi$ の形で表せることを示せばよい. □

定理 4.2 は, 定理 4.1 で得た等式の L^1 ノルムを式 (2.2) と Hölder の不等式を用いて評価することで得られる. その際, 各々の和の範囲に注意して Hölder の不等式を適用する.

定理 4.5 の証明の概略を述べる前に, 次の補題を準備する.

補題 5.1
$w \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき, 任意の $t > 0$ に対して,

$$\left\| we^{t\Delta}\varphi - e^{t\Delta}w\varphi \right\|_1 \le \left(\|\Delta w\|_\infty t + \|\nabla w\|_\infty \|\nabla G_1\|_1 t^{\frac{1}{2}} \right) \|\varphi\|_1 \tag{5.5}$$

が成り立つ.

この補題は, 等式

$$\begin{aligned} we^{t\Delta}\varphi - e^{t\Delta}w\varphi &= \int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{(t-s)\Delta} we^{s\Delta}\varphi \right) ds \\ &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(-\Delta\left(we^{s\Delta}\varphi \right) + w\Delta e^{s\Delta}\varphi \right) ds \\ &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(-\Delta w e^{s\Delta}\varphi - 2\nabla w \cdot \nabla e^{s\Delta}\varphi \right) ds \end{aligned}$$

の L^1 ノルムを式 (2.2) と Hölder の不等式を用いて評価することで得られる.

定理 4.5 の証明の概略
定理の主張を $m \in \mathbb{N}$ に関する命題 $(\mathrm{B})_m$ と見做し, m に関する帰納法で示す．ここでは, $(\mathrm{B})_m \Rightarrow (\mathrm{B})_{m+1}$ の証明の概略を説明する．そこで, ある $m \in \mathbb{N}$ に対して $(\mathrm{B})_m$ が成り立つと仮定し, $\varphi \in L^1_{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha' \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$, $|\alpha'| = m+1$ とする．このとき, $|\alpha| = m$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ 及びある $j \in \{1, \ldots, n\}$ が存在し, $\alpha' = \alpha + e_j$ と表される．また, $f(u) \in C\left([0, +\infty); L^1_m(\mathbb{R}^n)\right)$ である．次に, $\varepsilon \in (0, 1)$ を任意に取り, 函数 $w_{j,\varepsilon} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を,

$$w_{j,\varepsilon}(x) \coloneqq x_j e^{-\varepsilon|x|^2}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

と定義する．このとき, $w_{j,\varepsilon} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$\|\nabla w_{j,\varepsilon}\|_\infty \le 2, \qquad \|\Delta w_{j,\varepsilon}\|_\infty \le 2(n+4)\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

と評価される．さらに, 補題 5.1 より任意の $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ に対して,

$$\left\| w_{j,\varepsilon}e^{t\Delta}\psi - e^{t\Delta}w_{j,\varepsilon}\psi \right\|_1 \le 2\left((n+4)\varepsilon^{\frac{1}{2}} t + \|\nabla G_1\|_1 t^{\frac{1}{2}} \right) \|\psi\|_1 \tag{5.6}$$

が成り立つ．以上の準備の下, 各 $t > 0$ に対して $\|w_{j,\varepsilon}x^\alpha u(t)\|_1$ の ε に関する一様評価を導出する．そのために, 積分方程式 (I) の両辺に $w_{j,\varepsilon}x^\alpha$ を掛け, 定理 4.1 を用いて,

$$\begin{aligned} w_{j,\varepsilon}x^\alpha u(t) &= w_{j,\varepsilon}x^\alpha e^{t\Delta}\varphi + \int_0^t w_{j,\varepsilon}x^\alpha e^{(t-s)\Delta} f(u(s))\, ds \\ &= w_{j,\varepsilon}e^{t\Delta}x^\alpha\varphi + w_{j,\varepsilon}R_\alpha(t)\varphi \\ &\quad + \int_0^t \left(w_{j,\varepsilon}e^{(t-s)\Delta}x^\alpha f(u(s)) - e^{(t-s)\Delta}w_{j,\varepsilon}x^\alpha f(u(s)) \right) ds \\ &\quad + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}w_{j,\varepsilon}x^\alpha f(u(s))\, ds + \int_0^t w_{j,\varepsilon}R_\alpha(t-s) f(u(s))\, ds \end{aligned}$$

と分解する．任意の $\tau > 0$, $\psi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$ に対して $x_j R_\alpha(\tau)\psi$ は $R_{\alpha'}(\tau)\psi$ の一部として表され, 定理 4.1, 4.2 (注意 4.3 も参照) より,

$$\begin{aligned} \|w_{j,\varepsilon}R_\alpha(\tau)\psi\|_1 &\le \|x_j R_\alpha(\tau)\psi\|_1 \\ &\le C\tau^{\frac{1}{2}} \||x|^m \psi\|_1 + C\left(\tau^{\frac{1}{2}} + \tau^{\frac{m+1}{2}} \right) \|\psi\|_1 \end{aligned}$$

と評価されることに注意すると, 帰納法の仮定 $(\mathrm{B})_m$ と式 (4.5), (5.6) より,

$$\left\|w_{j,\varepsilon}x^{\alpha}u\left(t\right)\right\|_1 \leq C\left(1+t^{\frac{m+1}{2}}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}t^{\frac{m}{2}+1}\right)+C\int_0^t\left(1+s\right)^{-\frac{n}{2}\left(p-1\right)}\left\|w_{j,\varepsilon}x^{\alpha}u\left(s\right)\right\|_1 ds$$

となる. 但し, C は t 及び ε に依存しない正定数である. よって, Grönwall の補題より,

$$\left\|w_{j,\varepsilon}x^{\alpha}u\left(t\right)\right\|_1 \leq C\left(1+t^{\frac{m+1}{2}}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}t^{\frac{m}{2}+1}\right) \tag{5.7}$$

と評価され, $\varepsilon\searrow 0$ とすると Fatou の補題より $x^{\alpha'}u\left(t\right)=x_jx^{\alpha}u\left(t\right)\in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ が従う. さらに, 積分方程式 (I) より $x^{\alpha'}u\in C\left(\left[0,+\infty\right);L^1\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ が導かれる. また, 式 (5.7) において $\varepsilon\searrow 0$ とすれば, 求める不等式を得る. □

定理 4.6 は, 積分方程式 (I) を用いた分解

$$\begin{aligned}
&u\left(t\right)-e^{t\Delta}\varphi_1\\
&\quad=\int_0^{t/2}\left(e^{(t-s)\Delta}-e^{t\Delta}\right)f\left(u\left(s\right)\right)ds+\int_{t/2}^{t}e^{(t-s)\Delta}f\left(u\left(s\right)\right)ds-e^{t\Delta}\int_{t/2}^{+\infty}f\left(u\left(s\right)\right)ds\\
&\quad=\int_0^{t/2}\int_0^1\frac{d}{d\theta}\left(e^{(t-s\theta)\Delta}f\left(u\left(s\right)\right)\right)d\theta ds+\int_{t/2}^{t}e^{(t-s)\Delta}f\left(u\left(s\right)\right)ds-e^{t\Delta}\int_{t/2}^{+\infty}f\left(u\left(s\right)\right)ds\\
&\quad=-\int_0^{t/2}\int_0^1 s\Delta e^{(t-s\theta)\Delta}f\left(u\left(s\right)\right)d\theta ds+\int_{t/2}^{t}e^{(t-s)\Delta}f\left(u\left(s\right)\right)ds-e^{t\Delta}\int_{t/2}^{+\infty}f\left(u\left(s\right)\right)ds
\end{aligned}$$

において, それぞれの L^1 ノルムを式 (2.2), (4.5), Hölder の不等式を用いて評価することで得られる. 特に, σ に関する場合分けは最右辺の第一項の評価より生じる. 最後に, 定理 4.7 の証明には, 定理 4.6 で得た不等式と $e^{t\Delta}\varphi_1$ の漸近展開を組み合わせればよい.

参考文献

[1] T. Cazenave, F. Dickstein, M. Escobedo, F. B. Weissler, *Self-similar solutions of a nonlinear heat equation*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **8** (2001), no. 3, 501–540.

[2] M. Fila (下條昌彦 記), 非線形熱方程式の爆発問題入門：Marek Fila 氏講義録, 東京大学数理科学レクチャーノート, 10, 2011.

[3] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, **13** (1966), 109–124.

[4] M. Giga, Y. Giga, J. Saal, "Nonlinear Partial Differential Equations. Asymptotic Behavior of Solutions and Self-similar Solutions", Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 79, Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2010.

[5] A. Gmira, L. Véron, *Large time behaviour of the solutions of a semilinear parabolic equation in* $\mathbb{R}^N$, J. Differential Equations, **53** (1984), no. 2, 258–276.

[6] K. Hayakawa, *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proc. Japan Acad., **49** (1973), 503–505.

[7] K. Ishige, M. Ishiwata, T. Kawakami, *The decay of the solutions for the heat equation with a potential*, Indiana Univ. Math. J., **58** (2009), no. 6, 2673–2707.

[8] K. Ishige, T. Kawakami, *Asymptotic behavior of solutions for some semilinear heat equations in* $\mathbb{R}^N$, Commun. Pure Appl. Anal., **8** (2009), no. 4, 1351–1371.

[9] K. Ishige, T. Kawakami, *Refined asymptotic profiles for a semilinear heat equation*, Math. Ann., **353** (2012), no. 1, 161–192.

[10] K. Ishige, T. Kawakami, *Asymptotic expansions of solutions of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations*, J. Anal. Math., **121** (2013), 317–351.

[11] K. Ishige, T. Kawakami, K. Kobayashi, *Global solutions for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **7** (2014), no. 4, 767–783.

[12] K. Ishige, T. Kawakami, K. Kobayashi, *Asymptotics for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel*, J. Evol. Equ., **14** (2014), no. 4-5, 749–777.

[13] K. Ishige, T. Kawakami, H. Michihisa, *Asymptotic expansions of solutions of fractional diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal., **49** (2017), no. 3, 2167–2190.

[14] T. Kawakami, H. Takeda, *Higher order asymptotic expansions to the solutions for a nonlinear damped wave equation*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **23** (2016), no. 5, Art. 54, 30 pp.

[15] T. Kawakami, Y. Ueda, *Asymptotic profiles to the solutions for a nonlinear damped wave equation*, Differential Integral Equations, **26** (2013), no. 7-8, 781–814.

[16] T. Kawanago, *Asymptotic behavior of solutions of a semilinear heat equation with subcritical nonlinearity*, Ann. Inst. H. Poincaré C. Anal. Non Linéaire, **13** (1996), no. 1, 1–15.

[17] T. Kawanago, *Existence and behaviour of solutions for* $u_t = \Delta(u^m) + u^l$, Adv. Math. Sci. Appl., **7** (1997), no. 1, 367–400.

[18] K. Kobayashi, T. Sirao, H. Tanaka, *On the growing up problem for semilinear heat equations*, J. Math. Soc. Japan, **29** (1977), no. 3, 407–424.

[19] R. Kusaba, T. Ozawa, *Weighted estimates and large time behavior of small amplitude solutions to the semilinear heat equation*, submitted.

[20] J. Taskinen, *Asymptotical behaviour of a class of semilinear diffusion equations*, J. Evol. Equ., **7** (2007), no. 3, 429–447.

[21] P. Quittner, P. Souplet, "Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global Existence and Steady States", Second edition, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhäuser/Springer, Cham, 2019.

[22] 山口昌哉, 「非線型現象の数学」, 朝倉書店, 2004.