

# 変分法によるポテンシャル系の孤立不変集合のコホモロジーの評価

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻  
黒川大雅 (Taiga KUROKAWA)

## 概要

サドル・センター近傍においては, Lyapunov の中心定理により, そのエネルギーより僅かに大きなエネルギーについて, 孤立不変集合が唯一の周期軌道からなることが保証される. Moeckel(2005) は, PCR3BP の直線平衡点 L2 について, 変分法を用いてエネルギー固定条件下で遷移軌道の存在を示し, Easton(1970) の結果を用いて孤立不変集合のコホモロジーの評価を行うことで, より大きなエネルギーについて孤立不変集合の位相的構造を調べることを可能にしている. 本研究では, より一般のポテンシャル系に対し, 同様の方法で孤立不変集合のコホモロジーの評価を行った. また, 遷移軌道の存在証明に, Moeckel の用いた変分構造の他に別の変分構造を利用できることを明らかにした. 本講演では, これらの結果について紹介する. なお, 本研究は指導教員である柴山允瑠先生 (京都大学) との共同研究である.

## 1 動機と背景

### 1.1 非線形 ODE と不変集合

非線形 ODE については, 一般解を陽に書き下すような統一的な求積法が存在しないことがよく知られている. 例えば, 平面円制限 3 体問題 (PCR3BP) は, 一般解を陽に書き下すことのできない代表的な例である. そこで, 非線形 ODE のダイナミクスを調べる一つのアプローチとして, その不変集合を調べるのがよく行われる. 本研究では, 非線形なポテンシャル系について, その孤立不変集合の位相的性質を調べた.

### 1.2 Lyapunov の中心定理

本研究で, 考察の対象としたポテンシャル系は, 次の関数  $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  をポテンシャル関数とするものである.

$$\exists A, B > 0 \text{ s.t. } -Ax^2 \leq U(x, \mathbf{0}), U(x, \mathbf{y}) < B|\mathbf{y}|^2$$

これは, Lyapunov の中心定理の結果を”拡張”することを動機としたものである.

ここでは, まず, Moser [3] によって証明された Lyapunov の中心定理の一般化にあたる結果を紹介する. そこで, 原点をサドル・センターとする, 次の自励的 Hamilton 系について考える.

$$\frac{dz}{dt} = J \cdot^T DH(z)$$

$$\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \det(J \cdot D^2 H(0) - \lambda I_4) = 0\} = \{\pm\lambda, \pm i\mu \neq 0\}$$

また, Hamiltonian  $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  は原点近傍で実解析的な関数であるとする. この Hamilton 系についての Moser の定理の主張は次の通りである.

**定理 (Moser).** 原点近傍で解析的座標変換

$$\begin{aligned} x_i &= \phi_i(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}), \\ y_i &= \psi_i(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}) \end{aligned}$$

が存在して, さらに  $\alpha(\xi\eta, |\zeta|^2) = \lambda + O_1(\xi\eta, |\zeta|^2) \in \mathbb{R}$ ,  $\beta(\xi\eta, |\zeta|^2) = -i\mu + O_1(\xi\eta, |\zeta|^2) \in i\mathbb{R}$  が存在し, 各初期値  $\xi_0, \eta_0 \in \mathbf{R}$ ,  $\zeta_0 \in \mathbf{C}$  に関する初期値解が次のように表せる.

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 e^{t\alpha(\xi_0\eta_0, |\zeta_0|^2)}, & \eta(t) &= \eta_0 e^{-t\alpha(\xi_0\eta_0, |\zeta_0|^2)}, \\ \zeta(t) &= \zeta_0 e^{t\beta(\xi_0\eta_0, |\zeta_0|^2)}, & \bar{\zeta}(t) &= \bar{\zeta}_0 e^{-t\beta(\xi_0\eta_0, |\zeta_0|^2)}. \end{aligned}$$

また, この座標系で, Hamiltonian は次の通りである.

$$H(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}) = \lambda\xi\eta + \frac{1}{2}|\zeta|^2 + O_2(\xi\eta, |\zeta|^2)$$

□

この定理は, 原点より僅かに大きなエネルギーについて, その等エネルギー集合上で原点近傍に  $\mathbb{S} \times [0, 1]$  と微分同相な孤立化ブロックが取れて, その最大不変集合が, 周期軌道であることを保証している.

### 1.3 孤立不変集合と遷移軌道

次に, 本研究でいかにして, 前節の Lyapunov の中心定理を”拡張”するかについて説明する. Moeckel [2] は, PCR3BP の直線平衡点 L2 近傍の遷移軌道の存在証明を Maupertuis 汎関数による変分構造を用いて行った. PCR3BP に関しては, 宇宙機の軌道設計の観点で, 遷移軌道の存在そのものに興味を持たれているが, Moeckel は, Easton [1] の結果を用いれば, 孤立化ブロックの境界間の遷移軌道の存在保証は, すなわち, 孤立不変集合のコホモロジー評価を可能にしていると指摘している. 本研究では, このアイデアを用いて, サドル・センター近傍において, 前節の Lyapunov の中心定理より, 大きく, 具体的なエネルギーについて, 変分法的手法を用いて, 孤立化ブロックの境界間の遷移軌道の存在保証を行うことで, 孤立不変集合のコホモロジー評価, すなわち位相的構造を解明することを考える. この意味で Lyapunov の中心定理を”拡張”する.

## 2 エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造

### 2.1 Maupertuis 汎関数による変分構造

ポテンシャル系の Maupertuis 汎関数とは、次のように  $\mathcal{C}_1^{z^S \rightarrow z^G}$  上で定義される関数である。

$$\mathcal{M}_h(c) := \int_0^1 \sqrt{2(h - U(c(t)))} \cdot \left| \frac{dc}{dt}(t) \right| dt$$

$c_* \in \mathcal{C}_1^{z^S \rightarrow z^G}$  が、この汎関数の最小点であるとき、時間パラメータを適切に変換して、エネルギーを  $h$  とするポテンシャル系の古典解にできることを示す。

$c_*$  は特に臨界点である、すなわち、次の  $\delta \mathcal{M}_h(c_*) = 0$  の関係式が成り立つ。

$$0 = \int_0^1 \frac{\sqrt{2(h - U(c_*(t)))}}{|\dot{c}_*(t)|} \frac{dc_*}{dt}(t) \cdot \delta(t) dt - \int_0^1 \frac{|\dot{c}_*(t)|}{\sqrt{2(h - U(c_*(t)))}} \nabla U(c_*(t)) \cdot \delta(t) dt$$

まず、時間パラメータを適切に変換することで、 $\frac{dc}{dt}(t) = 0$  なる範囲が孤立点からなる最小点が構成できる。実際、 $\mathcal{M}_h$  は、 $\frac{dc}{dt}(t) = 0$  なる範囲で 0 であり、曲線の時間パラメータの変換について不変であるから、 $\frac{dc_*}{dt}(t) \neq 0$  なる範囲を拡大するように時間パラメータを変換すれば、 $\mathcal{M}_h$  の値を変えることなく、 $\frac{dc}{dt}(t) = 0$  なる範囲を孤立点からなるようにできる。

次に、 $\frac{dc_1}{dt}(t) = 0$  なる孤立点を除いて、次のような時間パラメータの変換を考える。

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{|\dot{c}_1(t)|}{\sqrt{2(h - U(c_1(t)))}}$$

ただし、 $\frac{dc_1}{dt}(t_*) = 0$  なる時刻については、 $s_* := \int_0^{t_*} \frac{|\dot{c}_1(t)|}{\sqrt{2(h - U(c_1(t)))}} dt$  と変換する。すなわち、 $\frac{dc_2}{ds}(s) \neq 0$  なる範囲で、次の関係を満たすような変換である。

$$\frac{1}{2} \left| \frac{dc_2}{ds}(s) \right|^2 + U(c_2(s)) = \frac{1}{2} \left| \frac{dc_1}{dt}(t(s)) \right|^2 \frac{dt}{ds}(s)^2 + U(c_1(s)) = h$$

$c_1$  についての、先の関係式と同様の関係式  $\delta \mathcal{M}_h(c_1) = 0$  を、 $c_2$  の時間パラメータに変換すると、 $\frac{dc_2}{ds}(s) \neq 0$  なる範囲で、 $|\dot{c}_2(s)| = \sqrt{2(h - U(c_2(s)))}$  が成り立っていることに注意すれば、次の関係式が成立する。

$$\int_0^T \frac{dc_2}{ds}(s) \cdot \delta(s) ds = \int_0^T \nabla U(c_2(s)) \cdot \delta(s) ds$$

ただし、 $T := \int_0^1 \frac{|\dot{c}_1(t)|}{\sqrt{2(h - U(c_1(t)))}} dt$  とした。よって、 $c_2$  は  $C^2$  級であり、次の方程式を満たすことがわかる。

$$\frac{d^2 c_2}{ds^2}(s) = -\nabla U(c_2(s))$$

従って、 $\frac{1}{2} \left| \frac{dc_2}{ds}(s) \right|^2 + U(c_2(s))$  は定数であり、 $(0, T)$  全域で、次の方程式を満たすことがわかる。

$$\frac{1}{2} \left| \frac{dc_2}{ds}(s) \right|^2 + U(c_2(s)) = h$$

## 2.2 Lagrange 汎関数による変分構造

ポテンシャル系の Lagrange 汎関数とは、各所要時間  $T > 0$  について、次のように  $\mathcal{C}_T^{z_S \rightarrow z_G}$  上で定義される関数である。

$$\mathcal{A}^T(c^T) := \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{dc^T}{dt}(t) \right|^2 - U(c^T(t)) dt$$

$c_*^T \in \mathcal{C}_T^{z_S \rightarrow z_G}$  が、この汎関数の最小点であるとき、ポテンシャル系の古典解であることがよく知られている。実際、 $c_*^T$  は臨界点であり、すなわち、次の  $\delta \mathcal{A}^T(c_*^T) = 0$  の関係式が成り立つ。

$$\int_0^T \frac{dc_*^T}{dt}(t) \cdot \delta(t) dt = \int_0^T \nabla U(c_*^T(t)) \cdot \delta(t) dt$$

よって、 $c_*^T$  は  $C^2$  級であり、次の方程式を満たすことがわかる。

$$\frac{d^2 c_*^T}{dt^2}(t) = -\nabla U(c_*^T(t))$$

また、エネルギー  $h$  について、次のように変形した Lagrange 汎関数を考える。

$$\mathcal{A}_h^T(c^T) := \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{dc^T}{dt}(t) \right|^2 - U(c^T(t)) + h dt$$

$c_*^{T*} \in \mathcal{C}_{T_*}^{z_S \rightarrow z_G}$  が、所要時間についても最小点であるとき、エネルギーを  $h$  とするポテンシャル系の古典解であることを示す。

$c^{\lambda T_*}(t) := c_*^{T_*}\left(\frac{t}{\lambda}\right)$  として、 $c^{\lambda T_*} \in \mathcal{C}_{\lambda T_*}^{z_S \rightarrow z_G}$  であり、 $c_*^{\lambda T_*}$  の定義から、次が成り立つ。

$$\mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c^{\lambda T_*}) \geq \mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c_*^{\lambda T_*})$$

さらに、 $c_*^{T_*}$  の定義から、次が成り立つ。

$$\mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c^{\lambda T_*}) \geq \mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c_*^{\lambda T_*}) \geq \mathcal{A}_h^{T_*}(c_*^{T_*})$$

よって、次の  $\frac{d}{d\lambda} \left\{ \mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c^{\lambda T_*}) \right\}_{\lambda=1} = 0$  の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ \mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c^{\lambda T_*}) \right\}_{\lambda=1} = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \int_0^{\lambda T_*} \frac{1}{2} \left| \frac{dc^{\lambda T_*}}{dt}(t) \right|^2 - U(c^{\lambda T_*}(t)) + h dt \right\}_{\lambda=1} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ \int_0^{T_*} \frac{1}{2\lambda} \left| \frac{dc_*^{T_*}}{ds}(s) \right|^2 - \lambda U(c_*^{T_*}(s)) + \lambda h ds \right\}_{\lambda=1} \\ &= \int_0^{T_*} h - \left( \frac{1}{2} \left| \frac{dc_*^{T_*}}{ds}(s) \right|^2 + U(c_*^{T_*}(s)) \right) ds \end{aligned}$$

ここで、 $c_*^{T_*}$  がポテンシャル系の古典解であったから、 $\frac{1}{2} \left| \frac{dc_*^{T_*}}{ds}(s) \right|^2 + U(c_*^{T_*}(s))$  は定数であり、 $(0, T_*)$  全域で、次の方程式を満たすことがわかる。

$$\frac{1}{2} \left| \frac{dc_*^{T_*}}{ds}(s) \right|^2 + U(c_*^{T_*}(s)) = h$$

### 3 主結果

#### 3.1 考察の対象

改めて以降の主結果では、次のポテンシャル系を考察の対象とする。

$$\exists A, B > 0 \text{ s.t. } -Ax^2 \leq U(x, \mathbf{0}), U(x, \mathbf{y}) < B|\mathbf{y}|^2$$

ここで、一つ目の条件について、注意を述べておきたい。サドル・センター近傍では、より強い関係  $-Ax^2 \leq U(x, \mathbf{y})$  が成り立つが、以下の議論では、この条件で十分である。

ここで、以下の説明のために、記号の導入を行う。  $h \in \mathbb{R}$  に対し、各集合を次のように定義する。

$$\begin{aligned} N_h &:= \left\{ (q, p) \mid \frac{1}{2}|p|^2 + U(q) = h \right\} & N_h(a, b) &:= \{(q, p) \in N_h \mid a \leq x \leq b\} \\ T_h &:= \{q \mid U(q) \leq h\} & T_h(a, b) &:= \{q \in T_h \mid a \leq x \leq b\} \\ \Gamma_h(a) &:= \{q \in T_h \mid x = a\} & \Gamma_h(b) &:= \{q \in T_h \mid x = b\} \end{aligned}$$

#### 3.2 Maupertuis 汎関数による結果

**主結果 1.** 次の条件を満たす  $C^\infty$  級関数  $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  と、

$$\exists A, B > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}, -Ax^2 \leq U(x, \mathbf{0}), \forall (x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d, U(x, \mathbf{y}) < B|\mathbf{y}|^2$$

$h > 0, c > 0$  について、次の条件 1-2 が成り立つと仮定する。

1.  $\forall (x, \mathbf{y}) \in \Gamma_h(-c), \frac{\partial U}{\partial x}(x, \mathbf{y}) > 0, \forall (x, \mathbf{y}) \in \Gamma_h(c), \frac{\partial U}{\partial x}(x, \mathbf{y}) < 0$
2.  $\sqrt{A\frac{c^2}{h}(1 + A\frac{c^2}{h})} + \log\left(\sqrt{A\frac{c^2}{h}} + \sqrt{1 + A\frac{c^2}{h}}\right) < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{A}{B}}$

このとき、 $U$  をポテンシャル関数とするポテンシャル系の局所解で、エネルギーが  $h$  で、 $(-c, 0)$  から  $(c, 0)$  へ至るものが存在する。  $\square$

**証明の概略.**  $R := [-c, c] \times \{|\mathbf{y}| \leq \sqrt{\frac{h}{B}}\}$  をとり、 $z_S := (-c, 0)$  と  $z_G := (c, 0)$  を結ぶエネルギー  $h$  の遷移軌道の存在証明を行う。証明は、PCR3BP について Moeckel が行った議論と同様にして行うことができる。すなわち、Maupertuis 汎関数は曲線の時間パラメータの変換について不変である parametric integrand であるから、その一般論から  $\mathcal{C}_1^{z_S \rightarrow z_G}(R)$  に関する最小点の存在が保証される。あとは、この最小点が  $R$  の境界に接しないことさえ示せば、Sec.2.1 と同様の議論で、エネルギー  $h$  の遷移軌道であることがわかる。まず、 $x = \pm c$  の境界に接しないことは、parametric integrand に関する Weierstrass の定理と条件 1 から従う。最後に、 $|\mathbf{y}| = \sqrt{\frac{h}{B}}$  の境界に接しないことは、接しない曲線  $\mathcal{C}_1^{z_S \rightarrow z_G}(R)$  に関する最小値の上からの評価と、

$$\inf_{z \in \mathcal{C}_1^{z_S \rightarrow z_G}(R)} \mathcal{M}_h(z) \leq \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{A}} \left\{ \sqrt{A\frac{c^2}{h}(1 + A\frac{c^2}{h})} + \log\left(\sqrt{A\frac{c^2}{h}} + \sqrt{1 + A\frac{c^2}{h}}\right) \right\}$$

接する曲線  $\tilde{C}_1^{z_S \rightarrow z_G}(R)$  に関する最小値の下からの評価を用いて、条件を与えることで保証できる。

$$\inf_{z \in \tilde{C}_1^{z_S \rightarrow z_G}(R)} \mathcal{M}_h(z) \geq \frac{\pi h}{\sqrt{2B}}$$

この条件が条件 2 である。 □

**系 1.** 主結果 1 の仮定のもとで、さらに  $N_h(-c, c)$  が孤立化ブロックの条件を満たすとき、 $N_h(-c, c)$  の最大不変集合  $I$  は、 $\check{H}^{2d-3}(I) \neq \{0\}$  を満たす。 □

### 3.3 Lagrange 汎関数による結果

**主結果 2.** 次の条件を満たす  $C^\infty$  級関数  $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  と、

$$\exists A, B > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}, -Ax^2 \leq U(x, 0), \forall (x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d, U(x, \mathbf{y}) < B|\mathbf{y}|^2$$

$h > 0, c > 0$  について、次の条件 1-4 が成り立つと仮定する。

1.  $\forall (x, \mathbf{y}) \in \Gamma_h(-c), \frac{\partial U}{\partial x}(x, \mathbf{y}) > 0, \forall (x, \mathbf{y}) \in \Gamma_h(c), \frac{\partial U}{\partial x}(x, \mathbf{y}) < 0$
2.  $\frac{c^2}{h} < \frac{1}{B}$
3.  $\sqrt{A\frac{c^2}{h}(1+A\frac{c^2}{h})} + \log\left(\sqrt{A\frac{c^2}{h}} + \sqrt{1+A\frac{c^2}{h}}\right) < \sqrt{AB}\frac{c^2}{h} + \sqrt{\frac{A}{B}}$
4.  $2\left(\frac{c^2}{h} + \frac{1}{B}\right)\frac{1}{T_+} \geq \sqrt{2A} \left\{ \tanh(\sqrt{2AT_+})^{-1} + \sinh(\sqrt{2AT_+})^{-1} \right\} \frac{c^2}{h} + T_+$

このとき、 $U$  をポテンシャル関数とするポテンシャル系の局所解で、エネルギーが  $h$  で、 $(-c, 0)$  から  $(c, 0)$  へ至るものが存在する。

ただし、 $T_+$  は、次のように定義した。

$$T_+ := \frac{1}{\sqrt{2A}} \left\{ \sqrt{A\frac{c^2}{h}(1+A\frac{c^2}{h})} + \log\left(\sqrt{A\frac{c^2}{h}} + \sqrt{1+A\frac{c^2}{h}}\right) \right\} \\ + \sqrt{\frac{1}{2A} \left\{ \sqrt{A\frac{c^2}{h}(1+A\frac{c^2}{h})} + \log\left(\sqrt{A\frac{c^2}{h}} + \sqrt{1+A\frac{c^2}{h}}\right) \right\}^2 - 2\frac{c^2}{h}}$$

□

**証明の概略.** Maupertuis 汎関数による結果と同様に、 $R := [-c, c] \times \{|\mathbf{y}| \leq \sqrt{\frac{h}{B}}\}$  をとり、 $z_S := (-c, 0)$  と  $z_G := (c, 0)$  を結ぶエネルギー  $h$  の遷移軌道の存在証明を行うことを考える。

$R$  に制限したため、その上で、上に有界なポテンシャル系であり、 $A_h(T) := \inf_{C_T^{z_S \rightarrow z_G}(R)} \mathcal{A}_h^T(c^T)$  は  $(0, \infty)$  上の実数値関数で、さらに、連続関数であり、 $A_h(T) \rightarrow \infty (T \rightarrow +0, \infty)$  が成り立つことがわかる。従って  $A_h$  の最小点が存在する。

あとは、この最小点が  $R$  の境界に接しないことさえ示せば、Sec.2.2 と同様の議論で、エネルギー  $h$  の遷移軌道であることがわかる。まず、 $x = \pm c$  の境界に接しないことは、Lagrange 汎関数に関する次の補題 1 と条件 1 から従う。(この補題の証明を行なっている文献は見当たらないため、この補題の証明も本研究の成果の一つであると考える。)

補題 1.  $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  は,  $C^\infty$  級関数であるとする. このとき, 次のことが成り立つ.

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, \exists \delta > 0 :$$

$$\forall \epsilon \in (0, \delta), \exists \delta_1, \delta_2 > 0 :$$

$$\forall |z_S - z|, |z_G - z| < \delta_1, \forall T \in (0, \delta_2), \exists z_* \in \mathcal{C}_T^{z_S \rightarrow z_G}(B_\epsilon(z)) :$$

$$\forall t \in (0, T), \ddot{z}_*(t) = -U_z(z_*(t)),$$

$$\forall z^T (\neq z_*) \in \mathcal{C}_T^{z_S \rightarrow z_G}(B_\epsilon(z)), \mathcal{A}^T(z_*) < \mathcal{A}^T(z^T).$$

□

最後に,  $|y| = \sqrt{\frac{h}{B}}$  の境界に接しないことは,  $A_h$  の最小点  $T_0$  で,  $B_h(T_0) > A_h(T_0)$  を満たすものが存在するための十分条件を考えれば十分である. ここで,  $B_h$  は,  $A_h$  と同様に, 境界に接する曲線  $\tilde{\mathcal{C}}_T^{z_S \rightarrow z_G}(R)$  に関して,  $B_h(T) := \inf_{\tilde{\mathcal{C}}_T^{z_S \rightarrow z_G}(R)} \mathcal{A}_h^T(c^T)$  と定義した関数である. そのために (1) まず,  $A_h$  の上下それぞれからの評価  $A_h^\pm$  と,  $B_h$  の下からの評価  $B_h^-$  を与え, (2) 次に,  $A_h^\pm$  を用いて, 極小点が少なくとも一つ含まれる範囲を調べ, (3) 最後に, この範囲において,  $B_h^-(T) > A_h^+(T)$  が成立するための十分条件を与えることで保証できる. この条件が条件 2-4 である.

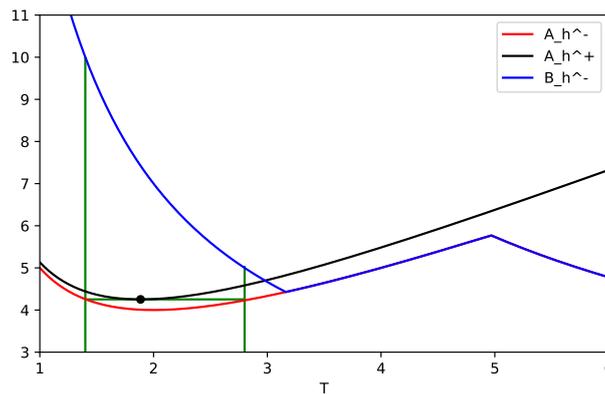


図 1: 証明のイメージ ( $A = 1, B = 1, h = 1, c = \sqrt{2}$ )

最後の証明のイメージを伝えるため, 図 1 に,  $A = 1, B = 1, h = 1, c = \sqrt{2}$  について,  $A_h^\pm, B_h^-$  のグラフ,  $A_h^+$  の最小値, 極小点が少なくとも一つ含まれる範囲を表し, さらに, その範囲で  $B_h^- > A_h^+$  が成立していることを示した. □

系 2. 主結果 2 の仮定のもとで, さらに  $N_h(-c, c)$  が孤立化ブロックの条件を満たすとき,  $N_h(-c, c)$  の最大不変集合  $I$  は,  $\check{H}^{2d-3}(I) \neq \{0\}$  を満たす. □

## 参考文献

- [1] R.W. Easton, Existence of invariant sets inside a submanifold convex to the flow, Journal of Differential Equations, 7:54-68, 1970.

- [2] R. Moeckel, A variational proof of existence of transit orbits in the restricted three-body problem, *Dynamical Systems*, 20(1):45-58, 2005.
- [3] J. Moser, On the generalization of a theorem of Liapunov, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 11:257-271, 1958.