A generalization of the Lodha–Moore group

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
児玉悠弥 (Yuya KODAMA)

概要

幾何学的群論における主要な研究対象に, Thompson 群 F と呼ばれる有限表示無限群がある. F が従順群であるかどうかは未だ未解決であるが, 近年 F によく似た非従順群が提案された. 本稿では, 筆者により導入された, この群を一般化したクラスについて概説する.

1 導入

1965 年に, Richard Thompson によって F, T, V という 3 つの群が定義された. これらの群は, ある種の有限性を持ちながらも多くの不思議な性質を持つ群で, 現在でも様々な手法を用いて研究されている. この中でも F は, "自由群を含まない非従順群" の例として期待されていた. 自由群を含まないことはすでに知られているが, その従順性は現在でも未解決である.

F の従順性に関する研究から, 近年 Lodha–Moore 群 G_0 と呼ばれる, F によく似た群が導入された [3]. G_0 は F と代数的に似た性質を持ち, さらに非従順な群である. F の生態をさらに明らかにするために, また, G_0 と F の "違い" を明らかにするために, G_0 のさらなる研究が不可欠である.

筆者は文献 [2] において, G_0 の性質をより深く理解するために, $G_0(2) = G_0$ を満たす群のクラス $\{G_0(n)\}_{n \geq 2}$ を導入した. また, 次が成り立つことを証明した.

Theorem 1.1 ([2]) n, m を 2 以上の自然数とする. このとき,

1. $G_0(n)$ の各元には一意なノーマルフォームが存在する.
2. $G_0(n)$ は有限表示群である.
3. $G_0(n)$ は非従順である.
4. $G_0(n)$ は自由群 F_2 を部分群として含まない.
5. $G_0(n)$ にはねじれ元が存在しない.
6. $G_0(n)$, $G_0(m)$ が同型であることと, $n = m$ であることは同値である.
7. $G_0(n)$ の交換子部分群は単純である.
8. $G_0(n)$ の中心は自明である.

この定理における特筆すべき点は, 自由群を部分群として含まない点である. 本稿では紙面の都合上詳細な証明を述べないが, $G_0(n)$ は G_0 や F を部分群として含む群であることが知られている. G_0 や F は自由群を部分群として含まないが, この事実は一般には $G_0(n)$ の部分群の判定に用いることはできず, 従って, 新たな証明を与える必要がある.

本稿では, 従順群, Thompson 群 F, Lodha–Moore 群 G_0, そしてそれを一般化した群 $G_0(n)$ の定義をそれぞれ説明する.

2 従順群

従順性の概念は, Hausdorff–Banach–Tarski のパラドックスの本質的な性質を取り出すために, von Neumann によって導入された. 以下で述べるように, 有限群や可換群はすべて従順群である. また, 従順性はいくつかの操作に関して閉じている, 非常に振る舞いの良い性質であることが知られている.

以下では簡単のため, G を有限生成群とする. 群が従順であることの定義は多く存在するが, ここでは次の定義を用いる.

Definition 2.1 群 G が**従順**であるとは, 次の条件を満たす写像 $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ が存在することをいう.

1. 任意の $g \in G$ と任意の G の部分集合 A に対して, $\mu(gA) = \mu(A)$.
2. $\mu(G) = 1$.
3. G の部分集合 A, B が交わらないとき, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Proposition 2.2 次が成り立つ.

1. 有限群は従順である.
2. 可換群は従順である.
3. ランク 2 の自由群 F_2 は非従順である.
4. 従順群の部分群は従順である.
5. 従順性は擬等長不変量[*1]である.

特に, もし G が F_2 を部分群として含めば, G も非従順であることがわかる. その逆を問うたのが von Neumann–Day である.

Question 2.3 (von Neumann–Day problem) 任意の非従順群は, 自由群を部分群に含むか？

今日では, この主張は一般には成り立たないことが知られている. 一番初めに見つけられた反例は [4], 有限表示群 (ねじれ元あり) での初めての例は [5], そして有限表示でねじれのない初めての例が Lodha–Moore 群 G_0[3] である. また, 有限生成ではないが, Monod の群 H も F_2 を含まない非従順群の一例として知られている. G_0 は H の部分群であることが知られており[*2], G_0 が F_2 を含まないことはこの事実から導かれる[*3].

[*1] 本稿では定義を述べないが, 群を幾何学的な側面から調べる際の適切な枠組みのひとつが, 擬等長同型によって定まる同値関係による同一視である.

[*2] 実際には G_0 を H の部分群として定義した後に, それと同型な群として本稿で述べる定義が導入される.

[*3] 3 以上の n に対して, $G_0(n)$ が H の部分群であるかは未解決の問題である. 従って, 現時点では H を用いて $G_0(n) \not> F_2$ を示すことはできない.

3 Thompson 群 F と Lodha–Moore 群

Thompson 群 F とは, Richard Thompson が 1965 年に初めて導入したことが知られている無限群である．通常は閉区間 $[0,1]$ 上の区分線形写像のなす群の部分群として定義されるが, ここでは Cantor 空間上の同相群の部分群として定める．

2 点集合 $\{0,1\}$ に離散位相を入れ, その可算無限直積空間を $2^{\mathbb{N}} := \prod_{i\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ とする．このとき各元は, 0 と 1 からなる無限列で表される．また, 閉区間を 3 等分し, その “真ん中” を取り除く操作を繰り返すことで得られる (よく知られた)Cantor 集合と $2^{\mathbb{N}}$ は同相である．

Definition 3.1 Thompson 群 F とは, 次の $2^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像が生成する群である．

$$x_0(\zeta) = \begin{cases} 0\eta & \zeta = 00\eta \\ 10\eta & \zeta = 01\eta \\ 11\eta & \zeta = 1\eta, \end{cases} \qquad x_1(\zeta) = \begin{cases} 0\eta & \zeta = 0\eta \\ 10\eta & \zeta = 100\eta \\ 110\eta & \zeta = 101\eta \\ 111\eta & \zeta = 11\eta. \end{cases}$$

ただし, 演算は写像の合成で定める．

Thompson 群の基本的な性質については, 例えば [1] を参照していただきたい．

Lodha–Moore 群 G_0 とは, $2^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像からなる群の部分群で, F を含むものである．その定義を述べる前に, $2^{\mathbb{N}}$ 上の “特別な同相写像 y” を定義する．

Definition 3.2 次のルールに従って帰納的に定義される同相写像を y という．

$$\begin{aligned} &y : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} && y^{-1} : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} \\ &y(00\zeta) = 0y(\zeta) && y^{-1}(0\zeta) = 00y^{-1}(\zeta) \\ &y(01\zeta) = 10y^{-1}(\zeta) && y^{-1}(10\zeta) = 01y(\zeta) \\ &y(1\zeta) = 11y(\zeta), && y^{-1}(11\zeta) = 1y^{-1}(\zeta). \end{aligned}$$

Definition 3.3 Lodha–Moore 群 G_0 とは, x_0, x_1 と次の $2^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像が生成する群である．

$$y_{10}(\zeta) = \begin{cases} 10y(\eta), & \zeta = 10\eta \\ \zeta, & \text{otherwise} \end{cases}$$

定義から明らかに, F は G_0 の部分群である．また, G_0 は F の部分群になりえないことも知られている．

4 一般化 Lodha–Moore 群

あまり一般的な記法ではないが, $\boldsymbol{N} := \{0,1,\ldots,n-1\}$ とし, n 進 Cantor 空間を通常の Cantor 空間 $2^{\mathbb{N}}$ と同様に定め, $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ と表すことにする．以下で定める一般化 Lodha–Moore 群 $G_0(n)$ とは, $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像からなる群の部分群である．なお, n 進 Cantor 空間 $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ と $2^{\mathbb{N}}$ は同相であるが, この事実はあまり重要ではない．

まずは, F を一般化した群 $F(n)$ を定義する. この群は現在でも統一的な呼称が定まっていないが, 本稿ではこの群を明示的に導入した Brown の名前を用いて, Brown–Thompson 群と呼ぶことにする.

Definition 4.1 次の n 個の元が生成する, $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像からなる群を **Brown–Thompson 群** $F(n)$ という.

$$x_0(\zeta) = \begin{cases} 0\eta & (\zeta = 00\eta) \\ 1\eta & (\zeta = 01\eta) \\ & \vdots \\ (n-2)\eta & (\zeta = 0(n-2)\eta) \\ (n-1)0\eta & (\zeta = 0(n-1)\eta) \\ (n-1)1\eta & (\zeta = 1\eta) \\ & \vdots \\ (n-1)(n-1)\eta & (\zeta = (n-1)\eta), \end{cases}$$

$$x_1(\zeta) = \begin{cases} 0\eta & (\zeta = 0\eta) \\ 1\eta & (\zeta = 10\eta) \\ 2\eta & (\zeta = 11\eta) \\ & \vdots \\ (n-2)\eta & (\zeta = 1(n-3)\eta) \\ (n-1)0\eta & (\zeta = 1(n-2)\eta) \\ (n-1)1\eta & (\zeta = 1(n-1)\eta) \\ (n-1)2\eta & (\zeta = 2\eta) \\ & \vdots \\ (n-1)(n-1)\eta & (\zeta = (n-1)\eta), \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-2}(\zeta) = \begin{cases} 0\eta & (\zeta = 0\eta) \\ & \vdots \\ (n-3)\eta & (\zeta = (n-3)\eta) \\ (n-2)\eta & (\zeta = (n-2)0\eta) \\ (n-1)0\eta & (\zeta = (n-2)1\eta) \\ & \vdots \\ (n-1)(n-2)\eta & (\zeta = (n-2)(n-1)\eta) \\ (n-1)(n-1)\eta & (\zeta = (n-1)\eta), \end{cases}$$

and

$$x_{0[(n-1)]}(\zeta) = \begin{cases} (n-1)x_0(\eta) & (\zeta = (n-1)\eta) \\ \zeta & (\zeta \neq (n-1)\eta). \end{cases}$$

定義から明らかに, $F(2) = F$ が成り立つ.

G_0 のときと同様に, まず $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ 上の "特別な同相写像" を定義する. n に依存して定まる写像ではあるが, 簡単のため, 同じ y を用いて表す.

Definition 4.2 次のルールに従って機能的に定義される同相写像を y という.

$$
\begin{aligned}
y &: \boldsymbol{N}^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{N}^{\mathbb{N}} & y^{-1} &: \boldsymbol{N}^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{N}^{\mathbb{N}} \\
y(00\zeta) &= 0y(\zeta) & y^{-1}(0\zeta) &= 00y^{-1}(\zeta) \\
y(01\zeta) &= 1\zeta & y^{-1}(1\zeta) &= 01\zeta \\
&\vdots & &\vdots \\
y(0(n-2)\zeta) &= (n-2)\zeta & y^{-1}((n-2)\zeta) &= 0(n-2)\zeta \\
y(0(n-1)\zeta) &= (n-1)0y^{-1}(\zeta) & y^{-1}((n-1)0\zeta) &= 0(n-1)y(\zeta) \\
y(1\zeta) &= (n-1)1\zeta & y^{-1}((n-1)1\zeta) &= 1\zeta \\
&\vdots & &\vdots \\
y((n-2)\zeta) &= (n-1)(n-2)\zeta & y^{-1}((n-1)(n-2)\zeta) &= (n-2)\zeta \\
y((n-1)\zeta) &= (n-1)(n-1)y(\zeta) & y^{-1}((n-1)(n-1)\zeta) &= (n-1)y^{-1}(\zeta)
\end{aligned}
$$

$n=2$ のときとの重要な違いは, $0, n-1$ 以外の文字が存在したとき, y が "消える" ことである.

Definition 4.3 一般化 Lodha–Moore 群 $G_0(n)$ とは, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{0[(n-1)]}$ と次の $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像が生成する群である.

$$
y_{(n-1)0}(\zeta) = \begin{cases} (n-1)0y(\eta), & \zeta = (n-1)0\eta \\ \zeta, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

定義から明らかに, $F(n)$ は $G_0(n)$ の部分群である. また, $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_{0[(n-1)]}$, $y_{10} \mapsto y_{(n-1)0}$ と定めることで, G_0 も $G_0(n)$ に埋め込むことができる. 従って, G_0 の非従順性から $G_0(n)$ の非従順性が従う.

参考文献

[1] J. W Cannon, W. J Floyd, and W. R Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseignement Mathématique **42** (1996), 215–256.

[2] Y. Kodama, *A generalization of the Lodha–Moore group*, arXiv preprint arXiv:2204.08230 (2022).

[3] Y. Lodha and J. T. Moore, *A nonamenable finitely presented group of piecewise projective homeomorphisms*, Groups, Geometry, and Dynamics **10** (2016), no. 1, 177–200.

[4] A. Y. Ol'shanskii, *On the question of the existence of an invariant mean on a group*, Uspekhi Mat. Nauk **35** (1980), no. 4(214), 199–200.

[5] A. Y. Ol'shanskii and M. V Sapir, *Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques **96** (2003), no. 1, 43–169.