特性方向重み付き微分型非線形波動方程式の解析 *

東北大学大学院理学研究科数学専攻 博士 1 年
北村駿介 (Shunsuke KITAMURA)

1　導入

偏微分方程式論においては、物理や工学、生命科学、社会学などを背景に持つ具体的な現象から導かれた方程式を解析する方針と、これらの背景や導出過程に因らない頑強な理論、いわゆる一般論を構築する方針があり、これらは相互に作用しながら発展を続けている。今回の講演では一般論の構築を見据えたモデル方程式の解析の結果について述べる。導入では、初めに一般論とはどういう形で記述されるかを述べた後、モデル方程式が担う役割について述べる。

最初に、非線形項が未知関数 u とその偏微分によって構成されている場合を考察する。一次元の非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) & \text{in} \quad \mathbf{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x),\ u_t(x, 0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{1}$$

に対して、添え字は偏微分を表わすとし、既知関数 H, f, g と初期値の大きさを表わすパラメータ ε を

$$H, f, g\ ;\text{十分滑らか},\ \operatorname{supp}\{f, g\}\ ;\text{コンパクト},\ 0 < \varepsilon \ll 1$$

と仮定する。初期値問題 (1) の解の最大存在時間を lifespan として、$\widetilde{T}(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する。

$$\widetilde{T}(\varepsilon) := \sup\{t > 0; \text{適当に固定した } (f, g) \text{ に対して } (1) \text{ の古典解 } u(x, t) \text{ が存在する }\}.$$

lifespan について、$\widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ を満たすならば時間大域解を持つと言い、$\widetilde{T}(\varepsilon) < \infty$ を満たす、つまり有限時間で解 u が発散するならば時間局所解を持つと言う。

また、解析を行う上で初期値に対して $(f, g) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ が成り立たなければ解の一意性が崩れてしまうので、$H(0) = 0$ が成り立ってほしい。この条件は H をマクローリン展開したときに定数部分が 0 という条件と同値であり、高次の剰余項を R_{n+1} として展開すると次のようになる。

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\alpha!}(u\partial_{\lambda_0} + u_x\partial_{\lambda_1} + u_t\partial_{\lambda_2} + u_{xx}\partial_{\lambda_3} + u_{xt}\partial_{\lambda_4})^{\alpha} H(\hat{\lambda})\Big|_{\hat{\lambda}=0} + R_{n+1}.$$

この展開は初期値問題 (1) の ε が十分小さいことから解 u も小さいので成立する。上記において $\alpha = 1$ の項は線形より、この項を入れると波動方程式では無くなってしまう。従って解 u は小さい

* 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2102 の支援を受けたものである。

ので、線形項の主な部分は $\alpha \geq 2$ の低次の項であると考えることができる。このような考察のもと、Li, Yu and Zhou[6] によって初期値問題 (1) に対して次のような初期値に条件を課さない古典解の長時間存在が示されている。

定理 1.1　初期値問題 (1) が自然数 α を用いて $\hat{\lambda} = 0$ の近傍において $H(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^{1+\alpha})$ を満たすとき、ある正定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, g, \alpha)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ を満たす ε に対して下記が成立する。

$$\widetilde{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} C\varepsilon^{-\alpha/2} & \text{in general case,} \\ C\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)} & \text{if} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0, \\ C\varepsilon^{-\alpha} & \text{if} \quad \partial_u^{\beta} H(\hat{0}) = 0,\ (1+\alpha \leq \beta \leq 2\alpha). \end{cases}$$

ここで、$C > 0$ は ε に因らない定数である。

この定理 1.1 の H に対する原点近傍の条件はまさに考察から得られた非線形項の低次の項について条件付けをしている。また、定理 1.1 の場合分けは最初の 2 つは強 Huygens の原理により、$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ の場合は初期値の影響が空間次元が高次元の場合と同じようになることに起因する。最後の場合分けは非線形項に u の冪が低次で入るときは単純なエネルギー法によって解を構成できず、別の不等式を使う際に逐次近似の評価が悪くなることに起因する。

また、$f \equiv g \equiv 0$ のとき、解の一意性より (1) の解は $u \equiv 0$ となり $\widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ を満たす。従って、時間局所解を持つ (1) に対して $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ が成り立つことが予想できるため、lifespan の下から ε^{-1} を変数に持つ関数によって評価されるのは自然である。このような、lifespan の ε の関数による下からの評価を一般論という。

この一般論に対して、さらに良い ε のオーダーの関数では評価できない、つまり一般論が最適な評価であることを示す為には、特別な初期値と非線形項を用いて同じ ε のオーダーの関数によって lifespan が上から評価されることを示せば良い。特に最適性は、滑らかさを犠牲にして詳細な解析が可能になる $H = |u|^p$ や $H = |u_t|^p$ $(p > 1)$ と定義したモデル方程式によって示される。定理 1.1 の最初の 2 つの場合は Zhou[8] により非線形項を $H = |u|^{1+\alpha}$ と、最後の場合に対しては Zhou[9] により非線形項を $H = |u|^{\gamma}|u_t|^{1+\alpha-\gamma}$ $(0 \leq \gamma \leq \alpha)$ と置くことによって最適性が示されている。

注意として、これらのモデル方程式による最適性で空間一次元の一般の場合の解析が網羅されたわけでは無い。モデル方程式の結果を一般の場合に適用するには、非線形項の冪が偶数の場合はそのままで良いが、奇数の場合は解 u に正値性などが必要になる。また、Morisawa, Sasaki and Takamura[7] によるモデル方程式 $H = |u_t|^p + |u|^q (p, q > 1)$ の解析によって、空間一次元の一般論のより細かい場合分けが必要であることが示されている。

従って、モデル方程式の解析は一般の場合の解の存在性を議論する上で最適性を保証するものでありながら、モデル方程式の lifespan 評価を行うことによって一般の場合も解析できる場合もある上、モデル方程式の lifespan 評価から非線形項が一般の場合の最適な lifespan 評価を予想することができる。つまり、モデル方程式の解析と一般論の構築は表裏一体の関係にあると言える。

一方、より現実の現象に近い方程式では係数が時空変数を持つ関数になっている場合がある。送電線の電位及び電流のモデル方程式などに現れる消散波動方程式は波動方程式と熱方程式の中間的な性

質を持ち、その境界が判明しつつある。その境界に位置する、特別ではあるが非常に重要なモデルの

$$u_{tt} - \Delta u + \frac{2}{1+t} u_t = |u|^p \ (p > 1)$$

は、リュービル変換 $v(x,t) = (1+t)u(x,t)$ によって半線形波動方程式

$$v_{tt} - \Delta v = \frac{|v|^p}{(1+t)^{p-1}} \ (p > 1)$$

に変換される。この方程式による初期値問題は Kato, Takamura and Wakasa[2] によって有限時間爆発する $1 < p \leq 3$ の場合の古典解の lifespan 評価が得られており、臨界指数が非線形熱方程式の藤田指数 $p_F(1) = 1 + 2/1 = 3$ であることから熱的だと思われていたにもかかわらず、lifespan が初期値の全空間積分によって場合分けされるということから波動的であることを示した。このような事実から、一般論の非線形項を時空変数を含む形、つまり

$$\tilde{H} = (x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt})$$

と拡張することが求められる。しかしながら、時空変数に対する条件が不明なため、モデル方程式の解析から一般論の条件を考察する。非線形項に対して時空の変数 (x,t) を含む場合を考察するため、モデル方程式の非線形項は重み関数 $F = F(x,t)$ を持ち、今回は重み関数を冪の形で入れる。加えて、非線形項に u が低次で含まれている場合のモデル方程式の解析は既に先行研究で行われたので、一般の場合を考察する上で議論の穴を埋める意味で、非線形項が $|u_t|^p$ である場合に対して解析を行う。

2 準備

一次元空間上の実数値未知関数 $u = u(x,t)$ に対して、非線形項に時空の変数の重みを持つ非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x,t)|u_t|^p & \text{in} \quad \mathbf{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x), \ u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{2}$$

を考える。ここで $p > 1$ かつ、初期値について $f \in C_0^2(\mathbf{R})$ かつ $g \in C_0^1(\mathbf{R})$ かつ $0 < \varepsilon \ll 1$ とする。加えて重み F に対しては十分滑らかであると仮定する。また、$R(> 1)$ に対して $\operatorname{supp}\{f, g\} \subset \{|x| \leq R\}$ を満たすとして一般性を失わない。これらの仮定の下では、Duhamel の原理により、次の積分方程式と同値になる。

$$u(x,t) = \varepsilon u^0(x,t) + L(F|u_t|^p)(x,t). \tag{3}$$

ここで、積分方程式の線形な部分は

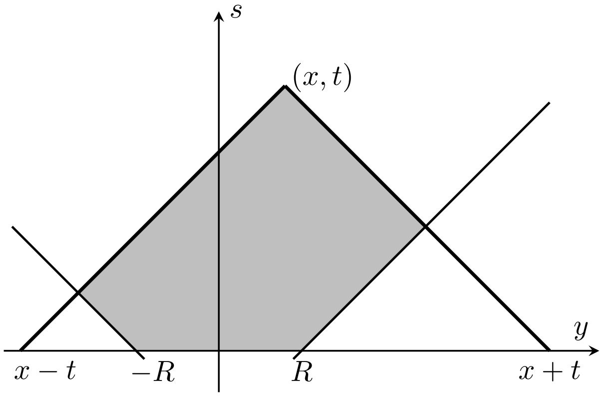
$$u^0(x,t) := \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy,$$

Duhamel の項は

$$L(v)(x,t) := \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} v(y,s)dy \quad \text{for} \quad v \in C(\mathbf{R} \times [0,\infty))$$

によって定義される。解の有限伝播性により u_t は supp $u_t \ \subset \{|x| \le t+R\}$ を満たすので、L の積分領域は頂点 (x,t) の三角形領域のうち、次の (図 0) のように色塗りされた部分になる。

(図 0) L の積分領域



積分方程式 (3) に着目すると、u が u_t によって記述されているので、そのまま逐次近似法によって解を構成することが出来ない。従って (3) の両辺を形式的に t で偏微分した積分方程式

$$u_t(x,t) = \varepsilon u_t^0(x,t) + L'(F|u_t|^p)(x,t) \tag{4}$$

から解を構成する。ここで、線形部分は

$$u_t^0(x,t) := \frac{1}{2}\{f'(x+t) - f'(x-t) + g(x+t) + g(x-t)\}$$

となり、Duhamel の項の微分は

$$L'(v)(x,t) := \frac{1}{2}\int_0^t v(x+t-s,s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t v(x-t+s,s)ds \quad \text{for} \quad v \in C(\mathbf{R}\times[0,\infty))$$

となる。この積分作用素 L' は、L の積分変数 (y,s) について、$(x+t,0)$ から (x,t) までと $(x-t,0)$ から (x,t) までの線積分を表わしている。この微分した積分方程式 (4) に対して連続解 w が得られれば、微積分学の基本定理により

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,s)ds + \varepsilon f(x)$$

は積分方程式 (3) の C^1 級解となる。さらに、微分した積分方程式 (4) を更に x によって微分した積分方程式

$$u_{tx}(x,t) = \varepsilon u_{tx}^0(x,t) + L'(F_x|u_t|^p + F|u_t|^{p-2}u_t u_{tx})(x,t)$$

と積分方程式 (4) を連立して時空一様空間での逐次近似法によって連続解が得られれば、u_{tt} と u_{xx} は u_{tx} と u_t によって表わすことが出来るので、u は積分方程式 (3) の古典解となる。$p>1$ より、u_t を変数として持つ関数 $|z|^{p-2}z$ は指数 $(p-1)$ の Hölder 連続性を持つため、連続解を得られる。従って、任意の $p>1$ に対して積分方程式 (3) の古典解が得られるため、モデル方程式の lifespan を同様に $T(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する。

$$T(\varepsilon) := \sup\{T>0; \text{適当に固定した } (f,g) \text{ に対して古典解 } u(x,t) \text{ が } 0 \le t \le T \text{ で存在する }\}.$$

ここで、定理 1.1 とその最適性より有限時間において解が爆発することが予想できるため、$\varepsilon \to 0$ のときの $T(\varepsilon)$ の増大度を調べることによって重みの影響を考察することが出来る。先に主結果を述べ、先行研究と比較する。また、$T(\varepsilon) \sim A(\varepsilon, C)$ なる記号は、C_1 と C_2 という ε に無関係な正定数が存在して、不等式 $A(\varepsilon, C_1) \le T(\varepsilon) \le A(\varepsilon, C_2)$ を満たすことを表す。

3　主結果

$\langle x \rangle := \sqrt{1+x^2}$ と記号を定義する。(2) について、$a, b \in \mathbf{R}$ によってパラメータ付けされた特性方向の重み $F(x,t) = \langle t + \langle x \rangle \rangle^{-1-a} \langle t - \langle x \rangle \rangle^{-1-b}$ を持つ一次元半線形波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \dfrac{|u_t|^p}{\langle t + \langle x \rangle \rangle^{1+a} \langle t - \langle x \rangle \rangle^{1+b}} & \text{in } \mathbf{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x), \quad u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

の古典解の lifespan について、我々は下記の結果を得た。

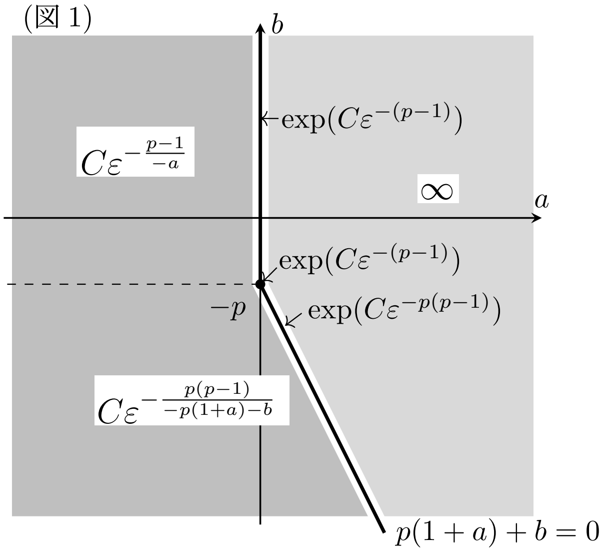
定理 3.1　$a > 0$ かつ $p(1+a) + b > 0$ ならば、ある正定数 $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(a, b, f, g, p)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ を満たす ε に対して $T(\varepsilon) = \infty$ が成立する。(図 1)

定理 3.2　ある正定数 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(a, b, f, g, p)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$ を満たす ε に対して下記が成立する。(図 1)

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} \exp(\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{for} \quad a = 0 \text{ and } b \ge -p, \\ \exp(\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{for} \quad a > 0 \text{ and } p(1+a) + b = 0, \\ \varepsilon^{-(p-1)/(-a)} & \text{for} \quad a < 0 \text{ and } b \ge -p, \\ \varepsilon^{-p(p-1)/(-p(1+a)-b)} & \text{for} \quad p(1+a) + b < 0 \text{ and } b < -p. \end{cases}$$

(a, b)-平面上に主結果を表わすと下記の通りになる。

(図 1)



4　先行研究

先行研究による既知の結果と主結果を比較する。初期値問題 (2) について $F \equiv 1$ の場合、つまり重みが無い場合において、Zhou[9] により lifespan の最適な評価が得られている。主結果の記号を用いて下記のように書ける。

$$T(\varepsilon) \sim C\varepsilon^{-(p-1)}$$

これは主結果の $a = b = -1$ の場合と一致している。

また、空間変数重みの場合 $F = \langle x \rangle^{-(1+a)}$ は Kitamura, Morisawa and Takamura[4] により次の結果が得られている。

$$T(\varepsilon) = \infty \qquad \text{for} \quad a > 0,$$
$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} \exp\left(C\varepsilon^{-(p-1)}\right) & \text{for } a = 0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)/(-a)} & \text{for } a < 0. \end{cases}$$

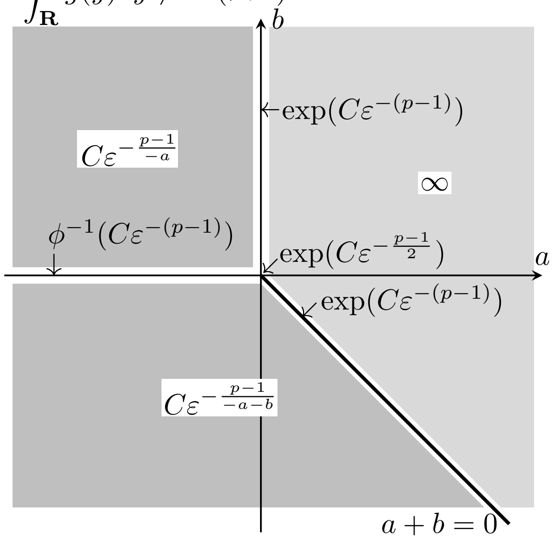
これは主結果における $b \geq -p$ の場合と一致している。理由としては、lifespan を決定する各点のアプリオリ評価が得られる $t - |x| = 0$ の近傍では、$\langle t + \langle x \rangle \rangle \sim \langle x \rangle \sim (1+t)$ と、重みが同値になるからである。従って、時間変数重みの場合 $F = (1+t)^{-(1+a)}$ の場合も同じ結果になることが容易に分かる。

非線形項が $|u|^p$ の場合、つまり偏微分方程式が

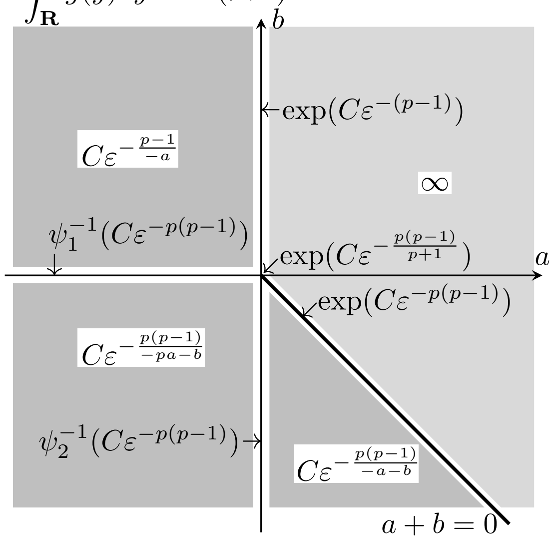
$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{|u|^p}{\langle t + \langle x \rangle \rangle^{1+a} \langle t - \langle x \rangle \rangle^{1+b}} \quad \text{in } \mathbf{R} \times (0, \infty)$$

の場合の初期値問題は、Kitamura, Takamura and Wakasa[5] によって次の (図 2) 及び (図 3) で示される lifespan 評価が得られている。

$\int_{\mathbf{R}} g(y)dy \neq 0$ (図 2)



$\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ (図 3)



ϕ_1^{-1} と ψ_1^{-1}、ψ_2^{-1} はそれぞれ

$$\phi_1(s) = s^{-a}\log(2+s), \ \psi_1(s) = s^{-pa}\log(2+s), \ \psi_2(s) = s^{-b}\log^{p-1}(2+s)$$

で定義される関数の逆関数である。主結果とは異なり、初期速度の全空間積分の値によって場合分けされている特徴がある。この理由は、微分した積分方程式 (4) の線形部分 u_t^0 は領域

$$\{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0,T] : |x| + R \le t\}$$

で恒等的に零になるという強 Huygens の原理が常に成り立つため、同様に強 Huygens の原理が働く (図 3) の初期速度の全空間積分の値が零の場合と類似した計算になるためである。その証拠に、$\langle t+\langle x\rangle\rangle$ 重みと $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 重みが相互作用する第 4 象限の斜めの直線上では、lifespan 評価が $\exp(C\varepsilon^{-p(p-1)})$ で一致している。また、この重みが相互作用する直線の傾きも主結果の $p(1+a)+b=0$ と異なっている。これは主結果の場合は最適な lifespan 評価が 1 度目の Iteration ではなく 2 度目の Iteration によって得られるため、非線形項の指数 p が lifespan 評価の場合分けの条件に含まれている。

また、$\langle t-\langle x\rangle\rangle$ と $\langle x\rangle$ は原点付近で同値ではないため、非線形項が $|u|^p\langle x\rangle^{-(1+a)}$ という空間変数のみの重みを持つ場合の lifespan 評価は特性重みの場合とは異なる部分がある。実際、Kitamura, Morisawa and Takamura[3] によって次の結果が得られている。

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)} & \text{for } a>0, \\ \phi^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{for } a=0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)/(1-a)} & \text{for } a<0 \end{cases} \quad \text{if } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx \ne 0, \quad \Big(\phi(s) := s\log(2+s)\Big)$$

and

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-p(p-1)} & \text{for } a>0, \\ \psi_p^{-1}(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{for } a=0, \\ C\varepsilon^{-p(p-1)/(1-pa)} & \text{for } a<0, \end{cases} \quad \text{if } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx = 0. \quad \Big(\psi_p(s) := s\log^{p-1}(2+s)\Big)$$

以上より、解の有限伝播性から $\langle t+\langle x\rangle\rangle \sim (1+t)$ が成り立つため、一般論を時空変数 (x,t) が含むように拡張する場合には、その lifespan の下からの評価の場合分けには変数として $(1+t)$ と $\langle x\rangle$ と $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ の 3 種類について条件付けをすれば良いだろうと予想を立てることが出来る。

5　主結果の証明の概略

主結果の lifespan の上下からの評価を纏めた定理は lifespan $T(\varepsilon)$ の定義より、

・$T>0$ が $T \le A(\varepsilon, C_1)$ を満たすとき、古典解 $u \in C^2(\mathbf{R}\times[0,T])$ が存在する。$\Rightarrow T(\varepsilon) \ge A(\varepsilon, C_1)$

・$T>0$ が $T \ge A(\varepsilon, C_2)$ を満たすとき、古典解 $u \in C^2(\mathbf{R}\times[0,T])$ が存在しない。$\Rightarrow T(\varepsilon) \le A(\varepsilon, C_2)$

によって表現される 2 定理を合わせた表現である。前半は解の存在を示し、後半は解の爆発を示す。また、後半の定理に対しては

・$T \ge A(\varepsilon, C_2)$ を満たす $T>0$ に対して連続解 $u_t \in C(\mathbf{R}\times[0,T])$ が存在すると仮定すると、$u_t(x,t)=\infty$ を満たす点 $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0,T]$ が存在し、連続解であることに矛盾する。

という形の背理法を用いる。解の存在は John[1] と同様な手法である、積分方程式 (4) の各点評価の Iteration によって得られる。解の爆発に関しては、$b \ge -p$ の場合、つまり $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 重みが効かない領域で爆発する場合は、Zhou[9] の積分方程式 (3) に着目して常微分方程式に落とし込む方法を用いて証明し、$b<-p$ の場合、つまり $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 重みが効く領域で爆発する場合は、積分方程式 (4) に対する John[1] の手法を用いることで証明される。

参考文献

[1] F.John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), 235-268.

[2] M. Kato, H. Takamura and K. Wakasa, *The lifespan of solutions of semilinear wave equations with the scale-invariant damping in one space dimension*, Differential Integral Equations **32** (2019), no. 11-12, 659-678.

[3] S. Kitamura, K. Morisawa and H. Takamura, *The lifespan of classical solutions of semilinear wave equations with spatial weights and compactly supported data in one space dimension*, J. Differential Equations **307** (2022), 486-516.

[4] S. Kitamura, K. Morisawa and H. Takamura, *Semilinear wave equations of derivative type with spatial weights in one space dimension*, arXiv:2112.01015, to appear in Nonlinear Analysis, RWA.

[5] S. Kitamura, H. Takamura and K. Wakasa, *The lifespan estimates of classical solutions of one dimensional semilinear wave equations with characteristic weights*, arXiv:2204.00242

[6] T.-T. Li, X. Yu, and Y.Zhou, *Life-span of classical solutions to one-dimensional nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 3, 266-279. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 4, 516.

[7] K. Morisawa, T. Sasaki and H. Takamura, *The combined effect in one space dimension beyond the general theory for nonlinear wave equations*, arXiv:2205.07198

[8] Y. Zhou, *Life span of classical solutions to* $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 2, 230-243. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 2, 280.

[9] Y.Zhou, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **22** (2001), 275-280.