有限 Grosse-Wulkenhaar 模型における多点相関関数の厳密解

東京理科大学大学院 理学研究科 科学教育専攻
鹿俣尚志 (Naoyuki Kanomata)

概要

エルミート行列の行列模型であり 3 点相互作用がある Grosse-Wulkenhaar 模型に関心がある．この模型は非可換空間であるモヤル空間のスカラー ϕ^3 理論にあるポテンシャルを入れた場の理論に対応する．先行研究では，Ward-Takahashi 恒等式を使って多点相関関数の Schwinger-Dyson 方程式を導出し，ラージ N, V 極限のもとで求められた．本研究では，極限操作を行わず，有限 Grosse-Wulkenhaar 模型における多点相関関数の厳密解を求めた [1]．任意の多点相関関数は，外場 J が対角行列の場合の多点相関関数を使って計算できるということが知られている．したがって外場 J が対角行列の場合の多点相関関数を厳密に計算した．なお，本研究は佐古彰史氏との共同研究である．

1 Φ_2^3 行列模型（Grosse-Wulkenhaar 模型）について

この章では先行研究 [3],[4],[6] に基づいて Φ_2^3 行列模型（Grosse-Wulkenhaar 模型）についてレヴューを行う．$\Phi = (\Phi_{mn})$ を $m, n = 1, 2, \ldots, N$ のエルミート行列，$V \in \mathbb{R}$，e は $e(0) = 0$ となる単調増加する微分可能な関数とする．そのとき $E_{m-1} = \mu^2 \left(\frac{1}{2} + e\left(\frac{m-1}{\mu^2 V}\right)\right)$ と定義される．ただし μ^2 は質量 μ の 2 乗，$E = (E_{m-1}\delta_{mn})$ は $m, n = 1, \ldots, N$ の対角行列，$\kappa \in \mathbb{R}$ は繰りこみ定数，$\lambda \in \mathbb{R}$ は結合定数，$i = \sqrt{-1}$ とする．このとき Φ_2^3 行列模型の作用 $S[\Phi]$ は $S[\Phi] := iV \operatorname{tr}\left(E\Phi^2 + \kappa\Phi + \frac{\lambda}{3}\Phi^3\right)$ と定義する．外場 $J = (J_{mn})$ を $m, n = 1, 2, \ldots, N$ のエルミート行列，測度は $\mathcal{D}\Phi := \prod_{m=1}^{N} d\Phi_{mm} \prod_{1\le m<n\le N} d\mathrm{Re}\Phi_{mn} d\mathrm{Im}\Phi_{mn}$ と定義する．このとき Φ_2^3 行列模型の多点相関関数の生成汎関数は $\mathcal{Z}[J] := \int \mathcal{D}\Phi \exp\left(-S[\Phi] + iV\operatorname{tr}(J\Phi)\right)$ と定義される．$\log \frac{\mathcal{Z}[J]}{\mathcal{Z}[0]}$ を使って $\sum_{i=1}^{B} N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1\ldots a_{N_1}^1|\ldots|a_1^B\ldots a_{N_B}^B|}$ は

$$\log\frac{\mathcal{Z}[J]}{\mathcal{Z}[0]} := \sum_{B=1}^{\infty} \sum_{1\le N_1\le\cdots\le N_B}^{\infty} \sum_{p_1^1,\ldots,p_{N_B}^B=1}^{N} (iV)^{2-B} \frac{G_{|p_1^1\ldots p_{N_1}^1|\ldots|p_1^B\ldots p_{N_B}^B|}}{S_{(N_1,\ldots,N_B)}} \prod_{\beta=1}^{B} \frac{\mathbb{J}_{p_1^\beta\ldots p_{N_\beta}^\beta}}{N_\beta}$$

と定義される．この $\sum_{i=1}^{B} N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1\ldots a_{N_1}^1|\ldots|a_1^B\ldots a_{N_B}^B|}$ は幾何学的に解釈することが可能で，B 個のバウンダリー（パンクチャー）を持つリーマン面の三角形分割に対応するファインマン図（リボングラフ）のある規則での全ての足し上げに対応する．各 $|a_1^i\cdots a_{N_i}^i|$ は i 番目のバウンダリー（パンクチャー）から N_i 本の線が出ているファインマン図（リボングラフ）に対応している．そ

して $N_i+1\equiv 1$ となる $\mathbb{J}_{p_1\dots p_{N_i}}:=\prod_{j=1}^{N_i}J_{p_jp_{j+1}}$，$(N_1,\dots,N_B)=(\underbrace{N_1',\dots,N_1'}_{\nu_1},\dots,\underbrace{N_s',\dots,N_s'}_{\nu_s})$，$S_{(N_1,\dots,N_B)}=\prod_{\beta=1}^{s}\nu_\beta!$ とする．

2　分配関数 $\mathcal{Z}[J]$ の計算

ここでは Φ_2^3 行列模型（Grosse-Wulkenhaar 模型）の生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ を計算するにあたってエルミート行列の非対角成分の積分は Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分 [7] を使って計算する．エルミート行列の対角成分の積分はエアリー関数を使って計算する．

$\widetilde{E}=(\widetilde{E_m\delta_{mn}})=\frac{1}{\lambda}E=\left(\frac{E_{m-1}}{\lambda}\delta_{mn}\right)$ を $m,n=1,\dots,N$ のエルミート行列，$\frac{\kappa}{\lambda}=\widetilde{\kappa}$ とする．そのとき $\mathcal{Z}[J]$ は

$$\mathcal{Z}[J]=\int\mathcal{D}\Phi\exp\left(-2i\lambda V\mathrm{tr}\left(\frac{\widetilde{E}\Phi^2}{2}+\frac{\widetilde{\kappa}\Phi}{2}+\frac{1}{3!}\Phi^3\right)\right)\exp\left(iV\mathrm{tr}\left(J\Phi\right)\right)$$

と計算される．ここで $\Phi=X-\widetilde{E}$ とするために新しい変数 X を導入する．ただし $X=(X_{mn})$ はエルミート行列とする．次に測度 $\mathcal{D}\Phi$ を以下のように変数変換する．

$$d\Phi_{ij}=\sum_{m,n=1}^{N}\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial X_{mn}}dX_{mn}=dX_{ij}.$$

$\mathrm{tr}\left(\frac{\widetilde{E}\Phi^2}{2}+\frac{\widetilde{\kappa}\Phi}{2}+\frac{1}{3!}\Phi^3\right)$ を変数変換することによって

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\widetilde{E}\Phi^2}{2}+\frac{\widetilde{\kappa}\Phi}{2}+\frac{1}{3!}\Phi^3\right)=\mathrm{tr}\left(\frac{(X)^3-3(\widetilde{E})^2X+2(\widetilde{E})^3+3\widetilde{\kappa}X-3\widetilde{\kappa}\widetilde{E}}{6}\right)$$

と計算される．そのとき $\mathcal{Z}[J]$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[J]=&\exp\left(-i\lambda Vtr\left(\frac{2}{3}(\widetilde{E})^3-\widetilde{\kappa}\widetilde{E}+\frac{1}{\lambda}J\widetilde{E}\right)\right)\\&\times\int\mathcal{D}X\exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}\mathrm{tr}(X^3)\right)\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}\mathrm{tr}\{(M-I+K)X\}\right)\end{aligned}\tag{1}$$

と計算される．ここで $M=\frac{(\widetilde{E})^2}{\widetilde{\kappa}}=\frac{E^2}{\lambda\kappa}$，$K=\frac{J}{\kappa}$，$I$ は単位行列とする．測度 $\mathcal{D}X$ は

$$\mathcal{D}X=\left(\prod_{i=1}^{N}dx_i\right)\left(\prod_{1\le k<l\le N}(x_l-x_k)^2\right)dU$$

と定義される [8][2]．ただし x_i は $i=1,\cdots,N$ の行列 X の固有値，dU はユニタリ群 $U(N)$ 上の

Haar 測度である．そのとき (1) は以下のように計算をすることができる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J] = &\exp\left(-i\lambda V tr\left(\frac{2}{3}(\widetilde{E})^3 - \widetilde{\kappa}\widetilde{E} + \frac{1}{\lambda}J\widetilde{E}\right)\right) \\
&\int\left(\prod_{i=1}^{\mathrm{N}} dx_i \exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}x_i^3\right)\right)\left(\prod_{1\leq k<l\leq N}(x_l - x_k)^2\right) \\
&\int dU \exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}\mathrm{tr}\{(M - I + K)U\widetilde{X}U^*\}\right). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

ただし $\widetilde{X} = U^*XU$ とする．また以下のような公式を使う．

Fact. ユニタリ群 $U(n)$ 上での Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分 [7] は

$$
\int_{U(n)} \exp\left(t\mathrm{tr}\left(AUBU^*\right)\right)dU = c_n\frac{\det\limits_{1\leq i,j\leq n}\left(\exp\left(t\lambda_i(A)\lambda_j(B)\right)\right)}{t^{\frac{(n^2-n)}{2}}\Delta(\lambda(A))\Delta(\lambda(B))} \qquad (3)
$$

として表される．ここでは $A = (A_{ij})$ と $B = (B_{ij})$ は $i = 1, \cdots, n$ の $\lambda_i(A)$ と $\lambda_i(B)$ を固有値に持つエルミート行列，$t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$，$\Delta(\lambda(A)) := \prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j(A) - \lambda_i(A))$ はヴァンデルモンド行列式，$c_n := \left(\prod\limits_{i=1}^{n-1} i!\right) \times \pi^{\frac{n(n-1)}{2}}$ は定数，$(\exp\left(t\lambda_i(A)\lambda_j(B)\right))$ は $\exp\left(t\lambda_i(A)\lambda_j(B)\right)$ を成分に持つ i 行 j 列の $n \times n$ 行列とする．

Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分 (3) を (2) の $\int dU \exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}\mathrm{tr}\{(M - I + K)U\widetilde{X}U^*\}\right)$ へ適用すると結果は

$$
\int dU \exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}\mathrm{tr}\{(\mathrm{M} - \mathrm{I} + \mathrm{K})U\widetilde{X}U^*\}\right) = \frac{C}{N!}\frac{\det\limits_{1\leq i,j\leq N}\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}x_i s_j\right)}{\prod\limits_{i<j}(x_j - x_i)\prod\limits_{i<j}(s_j - s_i)}
$$

となる．ただし s_t は $t = 1, \cdots, N$ の行列 $M - I + K$ の固有値，$C = \left(\prod\limits_{p=1}^{N} p!\right) \times \left(\frac{\pi}{i\lambda V\widetilde{\kappa}}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}}$ とする． $(\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}x_i s_j\right))$ は $\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}x_i s_j\right)$ を成分にもつ i 行 j 列の $N \times N$ 行列とする．そのとき生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J] = &\frac{C}{N!}\exp\left(-i\lambda V tr\left(\frac{2}{3}(\widetilde{E})^3 - \widetilde{\kappa}\widetilde{E} + \frac{1}{\lambda}J\widetilde{E}\right)\right)\frac{1}{\prod\limits_{1\leq t<u\leq N}(s_u - s_t)} \\
&\int\left(\prod_{i=1}^{N} dx_i \exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}x_i^3\right)\right)\left(\prod_{1\leq k<l\leq N}(x_l - x_k)\right)\det_{1\leq m,n\leq N}\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}x_m s_n\right) \\
= &C\exp\left(-i\lambda V tr\left(\frac{2}{3}(\widetilde{E})^3 - \widetilde{\kappa}\widetilde{E} + \frac{1}{\lambda}J\widetilde{E}\right)\right)\frac{1}{\prod\limits_{1\leq t<u\leq N}(s_u - s_t)} \\
&\int\left(\prod_{i=1}^{N} dx_i \exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}x_i^3\right)\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}x_i s_i\right)\right)\prod_{1\leq k<l\leq N}(x_l - x_k) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

として表される．$\displaystyle\prod_{1\le k<l\le N}(x_l-x_k)=\det_{1\le k,l\le N}\left(x_k^{l-1}\right)$ を使って (4) の右側の残っている積分を計算する．

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{N}dx_i\exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}x_i^3\right)\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}s_ix_i\right)\right)\det_{1\le k,l\le \mathrm{N}}\left(x_l^{k-1}\right)\\
&=\sum_{\sigma\in S_{\mathrm{N}}}\mathrm{sgn}\sigma\prod_{i=1}^{N}\phi_{\sigma(i)}(s_i)\\
&=\det_{1\le i,j\le N}\left(\phi_i(s_j)\right).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ただし $\phi_k(z)$ は

$$
\begin{aligned}
\phi_k(z)&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \ x^{k-1}\exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}x^3+iV\kappa xz\right)\\
&=\left(\frac{i}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)^{k-1}\left(\frac{-2\pi}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{d}{dy}\right)^{k-1}Ai\left[y\right]\Bigg|_{y=-\frac{V\kappa z}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

と計算される．ただし $Ai[y]$ はエアリー関数，$(\phi_i(s_j))$ は $\phi_i(s_j)$ を成分にもつ i 行 j 列の $N\times N$ 行列とする． (4)，(5)，(6) の結果をまとめると，以下の結果を得る．

Proposition 2.1. 上で定義された $\mathcal{Z}[J]$ は以下で得られる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J]&=\int\mathcal{D}\Phi\exp\left(-iV\mathrm{tr}\left(E\Phi^2+\kappa\Phi+\frac{\lambda}{3}\Phi^3\right)\right)\exp\left(iV\mathrm{tr}\left(J\Phi\right)\right)\\
&=C'\frac{e^{\frac{-iV}{\lambda}\mathrm{tr}(JE)}A_N(y_1,\cdots,y_N)}{\displaystyle\prod_{1\le t<u\le N}(s_u-s_t)}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ここで $C'=\exp\left(-\frac{iV}{\lambda^2}\mathrm{tr}\left(\frac{2}{3}E^3-\lambda\kappa E\right)\right)\left(\prod_{p=1}^{N}p!\right)\frac{(-2)^N\pi^{\frac{N(N+1)}{2}}}{\lambda^{\frac{N(N+1)}{6}}V^{\frac{N(2N-1)}{3}}\kappa^{\frac{N(N-1)}{2}}}$，$s_t$ は $t=1,\cdots,N$ の行列 $\frac{E^2}{\lambda\kappa}-I+\frac{J}{\kappa}$ の固有値である．そして $j=1,\cdots,N$ の $y_j=-\frac{V\kappa s_j}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}$ とする．$A_N(y_1,\cdots,y_N)=\left(\displaystyle\prod_{1\le i<j\le N}(\partial_{y_i}-\partial_{y_j})\right)Ai[y_1]\cdots Ai[y_N]$ と定義する．

3 n 点関数 $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ の計算

(7) で得られた生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ を $G_{|a^1|\ldots|a^n|}$ を計算するために使う．$G_{|a^1|\ldots|a^n|}$ の厳密解は，外場 J を対角行列とした $\log\mathcal{Z}[J]$ における $\partial^n/\partial J_{a^1a^1}\cdots\partial J_{a^na^n}$ の n 回微分を計算することによって得ることができる．この計算に先行研究 [5] の公式を適用させて計算をした結果，$G_{|a^1|\ldots|a^n|}$ の厳密

解を得ることに成功した.

$$
\begin{aligned}
&G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}\\
=&(iV)^{n-2}\frac{\partial^n}{\partial J_{a^1a^1}\ldots\partial J_{a^na^n}}\ \log\frac{\mathcal{Z}[J]}{\mathcal{Z}[0]}\bigg|_{J=0}\\
=&(iV)^{n-2}\mathcal{C}\sum_{\pi}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^{|\pi|}(\log x)\bigg|_{x=\mathcal{Z}[0]}\right\}\\
&\prod_{B\in\pi}\sum_{S\subset B}\Bigg(\bigg(\prod_{i\in S}\Big(-iV\frac{E_{a^i-1}}{\lambda}\Big)\bigg)\sum_{M\subset\overline{S}}\Bigg(\bigg(\Big\{\prod_{k\in M}\Big(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\Big)\partial_{a^k}\Big\}A_N(z_1,\ldots,z_N)\bigg)\\
&\bigg(\Big\{\prod_{q\in\overline{M}}\frac{\partial}{\partial t_{a^q}}\Big\}\frac{1}{\prod_{1\le l<j\le N}(t_j-t_l)}\bigg)\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}
$$

ただし $B=S\sqcup\overline{S}$，$\overline{S}=M\sqcup\overline{M}$ とする．$j=1,\ldots,N$ において $z_j=-\frac{VE_{j-1}^2}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}\lambda}+\frac{V\kappa}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}$ とする．$\partial_{a^k}=\frac{\partial}{\partial z_{a^k}}$ $(k\in M)$，$l=1,\ldots,N$ において $t_l=\frac{(E_{l-1})^2}{\lambda}$ とする．$\mathcal{C}=C'\kappa^{\frac{N(N-1)}{2}}$．ただし，$\sum_{\pi}$ は集合 $\{1,\ldots,n\}$ を π で分割し，その分割可能な π のパターン全てを足し上げる．$\prod_{B\in\pi}$ は分割 π の要素 B の総乗を計算する．$|S|$ は集合 S の濃度とする．$\sum_{S\subset B}$ は B の部分集合 S が取り得る全ての和を計算する．$\sum_{M\subset\overline{S}}$ は $\overline{S}=B\backslash S$ の部分集合 M が取り得る全ての和を計算する．そして関数 $F(S,M,\overline{M})$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&F(S,M,\overline{M})\\
:=&\left(\prod_{i\in S}\left(-iV\frac{E_{a^i-1}}{\lambda}\right)\right)\left(\left\{\prod_{k\in M}\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\partial_{a^k}\right\}A_N(z_1,\ldots,z_N)\right)\\
&\left(\left\{\prod_{q\in\overline{M}}\frac{\partial}{\partial t_{a^q}}\right\}\frac{1}{\det_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}\right).
\end{aligned}
$$

Proposition 3.1. $F(S,M,\overline{M})$ を使うと n 点関数 $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ は

$$
G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}=(iV)^{n-2}\mathcal{C}\sum_{\pi}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^{|\pi|}(\log x)\bigg|_{x=\mathcal{Z}[0]}\right\}\prod_{B\in\pi}\sum_{S\subset B}\sum_{M\subset\overline{S}}F(S,M,\overline{M})
$$

として表される．

先行研究 [3] において $\sum_{i=1}^{B}N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1\ldots a_{N_1}^1|\ldots|a_1^B\ldots a_{N_B}^B|}$ は

$$
\begin{aligned}
&G_{|a_1^1\ldots a_{N_1}^1|\ldots|a_1^B\ldots a_{N_B}^B|}\\
=&\lambda^{N_1+\cdots+N_B-B}\sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_B=1}^{N_B}G_{|a_{k_1}^1|\ldots|a_{k_B}^B|}\left(\prod_{l_1=1,l_1\neq k_1}^{N_1}P_{a_{k_1}^1a_{l_1}^1}\right)\cdots\left(\prod_{l_B=1,l_B\neq k_B}^{N_B}P_{a_{k_B}^Ba_{l_B}^B}\right)
\end{aligned}
$$

であることが知られている．ただし $i=1,\ldots,B$ において $2\leq B$，$N_i>1$ である．また $P_{ab}:=\dfrac{1}{E_{a-1}^2-E_{b-1}^2}$ と定義する．求めた $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ の厳密解を適用すると Φ_2^3 行列模型の多点相関関数の厳密解を求めることができる．

4　2 点関数 $G_{|a|b|}$ の計算

この節では Proposition 3.1 の公式を適用して具体的に 2 点関数 $G_{|a|b|}$ の厳密解を求める．以下では $a=a^1$，$b=a^2$ とする．始めに $\pi=\{\{1,2\}\}$ の場合の計算をする．

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{|\pi|}(\log x)\bigg|_{x=\mathcal{Z}[0]}\prod_{B\in\pi}\frac{\partial^{|B|}\mathcal{Z}[J]}{\prod\limits_{j\in B}\partial J_{a^j a^j}}\bigg|_{J=0}=\frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\partial^2\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}. \tag{8}$$

集合 S，M，$\overline{M}$ のすべての場合の計算をすると，以下のような結果を得ることができる．$F(\{1,2\},\emptyset,\emptyset)$ の場合では，

$$F(\{1,2\},\emptyset,\emptyset)=\left(-iV\frac{E_{a-1}}{\lambda}\right)\left(-iV\frac{E_{b-1}}{\lambda}\right)A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\leq l,j\leq N}\left(t_l^{j-1}\right)}$$

となる．$F(\{1\},\{2\},\emptyset)$ の場合では，

$$F(\{1\},\{2\},\emptyset)=\left(-iV\frac{E_{a-1}}{\lambda}\right)\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\partial_b A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\leq l,j\leq N}\left(t_l^{j-1}\right)} \tag{9}$$

となる．$F(\{2\},\{1\},\emptyset)$ も同様にして (9) のように計算をすることができる．(9) における文字 a と b を入れ替える．$F(\emptyset,\{1,2\},\emptyset)$ の場合では，

$$F(\emptyset,\{1,2\},\emptyset)=\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)^2\partial_a\partial_b A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\leq l,j\leq N}\left(t_l^{j-1}\right)}$$

となる．$F(\{1\},\emptyset,\{2\})$ の場合では，

$$F(\{1\},\emptyset,\{2\})=\left(-iV\frac{E_{a-1}}{\lambda}\right)A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{-1}{\det\limits_{1\leq l,j\leq N}\left(t_l^{j-1}\right)}\sum_{i=1,i\neq b}^{N}\frac{1}{t_b-t_i} \tag{10}$$

となる．$F(\{2\},\emptyset,\{1\})$ も同様にして (10) のように計算をすることができる．(10) における文字 a と b を入れ替える．$F(\emptyset,\{1\},\{2\})$ の場合では，

$$F(\emptyset,\{1\},\{2\})=\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\partial_a A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{-1}{\det\limits_{1\leq l,j\leq N}\left(t_l^{j-1}\right)}\sum_{i=1,i\neq b}^{N}\frac{1}{t_b-t_i} \tag{11}$$

となる．$F(\emptyset,\{2\},\{1\})$ も同様にして (11) のように計算をすることができる．(11) における文字 a と b を入れ替える．$F(\emptyset,\emptyset,\{1,2\})$ の場合では,

$$\begin{aligned}&F(\emptyset,\emptyset,\{1,2\})\\&=A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}\left(\sum_{i=1,i\neq a}^{N}\frac{1}{t_a-t_i}\sum_{j=1,j\neq b}^{N}\frac{1}{t_b-t_j}-\frac{1}{(t_a-t_b)^2}\right)\end{aligned}$$

となる．これより (8) は以下のように計算をすることが可能である．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\partial^2\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}\\&=\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\ldots,z_N)}\right)\Bigg\{F(\{1,2\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{1,2\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{1,2\})\\&\quad+\sum_{l,n=1,l\neq n}^{2}\Big(F(\{l\},\{n\},\emptyset)+F(\{l\},\emptyset,\{n\})+F(\emptyset,\{l\},\{n\})\Big)\Bigg\}.\end{aligned}\tag{12}$$

次は $\pi=\{\{1\},\{2\}\}$ の場合を計算する．

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{|\pi|}(\log x)\bigg|_{x=\mathcal{Z}[0]}\prod_{B\in\pi}\frac{\partial^{|B|}\mathcal{Z}[J]}{\prod\limits_{j\in B}\partial J_{a^ja^j}}\bigg|_{J=0}=-\frac{1}{\mathcal{Z}[0]^2}\frac{\partial\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}}\bigg|_{J=0}\frac{\partial\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}.\tag{13}$$

集合 S, M, $\overline{M}$ のすべての場合の計算をすると，以下のような結果を得ることができる．

$$F(\{1\},\emptyset,\emptyset)=-iV\frac{E_{a-1}}{\lambda}A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}.$$

$$F(\emptyset,\{1\},\emptyset)=\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\partial_aA_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}.$$

$$F(\emptyset,\emptyset,\{1\})=A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{-1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}\sum_{i=1,i\neq a}^{N}\frac{1}{t_a-t_i}.$$

これらの結果は以下のようにまとめることができる．

$$\frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\partial\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}}\bigg|_{J=0}=\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\ldots,z_N)}\right)\Big\{F(\{1\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{1\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{1\})\Big\}.\tag{14}$$

$B=\{1\}$ のときも $B=\{2\}$ と同じ方法で計算をすることができる．

$$\frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\partial\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}=\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\ldots,z_N)}\right)\Big\{F(\{2\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{2\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{2\})\Big\}.\tag{15}$$

(13) へ (14) と (15) の計算結果を適用すると以下のような結果を得る．

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\mathcal{Z}[0]^2}\frac{\partial \mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}}\bigg|_{J=0}\frac{\partial \mathcal{Z}[J]}{\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0} \\
=&-\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\ldots,z_N)}\right)^2\prod_{l=1}^{2}\Bigg(F(\{l\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{l\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{l\})\Bigg). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

最終的に (12) と (16) を合わせると 2 点関数 $G_{|a|b|}$ は以下のような結果を得る．

$$
\begin{aligned}
G_{|a|b|} =& \frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\partial^2 \mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0} - \frac{1}{\mathcal{Z}[0]^2}\frac{\partial \mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}}\bigg|_{J=0}\frac{\partial \mathcal{Z}[J]}{\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0} \\
=& \left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\ldots,z_N)}\right)\Bigg\{F(\{1,2\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{1,2\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{1,2\}) \\
&+\sum_{l,n=1,l\neq n}^{2}\Bigg(F(\{l\},\{n\},\emptyset)+F(\{l\},\emptyset,\{n\})+F(\emptyset,\{l\},\{n\})\Bigg)\Bigg\} \\
&-\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\ldots,z_N)}\right)^2\prod_{l=1}^{2}\Bigg(F(\{l\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{l\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{l\})\Bigg).
\end{aligned}
$$

これより，Proposition 3.1 の公式を適用すると 2 点関数 $G_{|a|b|}$ の厳密解を得られる．

5 まとめ

本研究では，Φ_2^3 有限行列模型における多点相関関数の厳密解を求めた．Φ_2^3 行列模型では，多点相関関数は $\sum_{i=1}^{B} N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1\ldots a_{N_1}^1|\ldots|a_1^B\ldots a_{N_B}^B|}$ として表される．$\sum_{i=1}^{B} N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1\ldots a_{N_1}^1|\ldots|a_1^B\ldots a_{N_B}^B|}$ は $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ を使って展開できることが知られている [3]．つまり $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ を求めることで一般の場合の多点相関関数を求められるので，$G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ の厳密解を求める方法を導いた．

2 節では，生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ の計算を行った．エルミート行列の非対角成分の積分は Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分 [7] を使って計算した．また, エルミート行列の対角成分の積分は Airy 関数を使って計算した．3 節では，$G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ を計算するために 2 節で得られた生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ を使った．$G_{|a^1|\ldots|a^n|}$ の厳密解は，外場 J を対角行列とした $\log \mathcal{Z}[J]$ における $\partial^n/\partial J_{a^1a^1}\cdots\partial J_{a^na^n}$ の n 回微分を計算することによって得られる．$G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ の厳密解は Proposition 3.1 として表された．Proposition 3.1 における $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ の公式では，積分が残っていない．より具体的には，$G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ は変数が $S\subset B$，M，$\overline{M}(B\backslash S=M\sqcup\overline{M})$ である関数 $F(S,M,\overline{M})$ によって決定された．4 節では Proposition 3.1 の公式を適用して具体的に 2 点関数 $G_{|a|b|}$ の厳密解を求めた．$\sum_{i=1}^{B} N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1\ldots a_{N_1}^1|\ldots|a_1^B\ldots a_{N_B}^B|}$ は $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ を使って展開することが可能なので，Φ_2^3 有限行列模型の全ての厳密解を求めることが可能である．

参考文献

[1] N. Kanomata and A. Sako, Exact solution of the Φ_2^3 finite matrix model, Nucl. Phys. B **982**, 115892 (2022) doi:10.1016/j.nuclphysb.2022.115892 [arXiv:2205.15798 [hep-th]].

[2] B. Eynard, T. Kimura and S. Ribault, Random matrices, No Journal (2015), 1510.04430.

[3] H. Grosse, A. Sako and R. Wulkenhaar, Exact solution of matricial Φ_2^3 quantum field theory, Nucl. Phys. B **925**, 319-347 (2017) doi:10.1016/j.nuclphysb.2017.10.010 [arXiv:1610.00526 [math-ph]].

[4] H. Grosse, A. Sako and R. Wulkenhaar, The Φ_4^3 and Φ_6^3 matricial QFT models have reflection positive two-point function, Nucl. Phys. B **926**, 20-48 (2018) doi:10.1016/j.nuclphysb.2017.10.022 [arXiv:1612.07584 [math-ph]].

[5] M. Hardy, Combinatorics of partial derivatives, Electron. J. Combin. 13 (2006), Research Paper 1, 13.

[6] A. Hock, Matrix field theory, Ph.D. Thesis, WWU Münster, 2020, arXiv:2005.07525.

[7] C. Itzykson and J. B. Zuber, The Planar Approximation. 2., J. Math. Phys. **21**, 411 (1980) doi:10.1063/1.524438

[8] M. L. Mehta, Random Matrices, vol. 142 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 3rd ed., 2004.