

# 面積保存写像から定まる変分問題

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻  
梶原 唯加 (Yuika KAJIHARA)

## 概要

2次元面積保存写像  $f$  がツイスト条件と呼ばれる性質を満たすとき、 $f$  に対して、ある関数  $H$  が存在して、 $H$  の臨界点からもとの写像の軌道を定めることができる。つまり、 $H$  を用いて  $f$  に対する「離散系の変分問題」を考えることができる。本発表では、通常の変分問題 (微分方程式から定まる「連続系の変分問題」) の結果と比較しながら、周期軌道、ヘテロクリニック軌道、ホモクリニック軌道といった時間大域的なふるまいによって特徴づけられる写像の軌道を変分法によって構成する手法について述べる。

## 1 はじめに：変分構造とは何か

変分問題とは、文字通り変分を計算する問題である。そして、変分の計算 (calculus of variations) とは、一般に関数上の微分を指す。高校数学の問題で  $F'(x) = 0$  なる  $x \in \mathbb{R}$  を調べて  $F$  のグラフを描けといった類の問題を誰しも目にしたことがあると思う。変分問題も本質的にはこのような問題と同じで、 $F'(x) = 0$  なる  $x$  が存在するのか調べたり、 $x$  がどのような性質を持つのか調べたりするのが (連続系の) 変分問題である。ただし  $x$  は関数空間の元である。与えられた微分方程式系に対して、ある (汎) 関数  $F$  があって、 $F'(x) = 0$  なる  $x$  がもとの微分方程式系の解に対応するとき、その微分方程式系は「変分構造を持つ」と表現される。また次節で述べるように、写像および写像によって決定される軌道に対しても同様に変分構造を考えることができる。変分問題に含まれる話題は様々であるが、ここでは「変分問題を経由することで微分方程式系や写像によって定義される時間大域的に特徴づけられた解や軌道を得る」ことを考え、特に写像から定まる変分問題に重点を置いて述べる。

微分方程式論の演習などでよく扱われる線形微分方程式系などの例を除き、微分方程式は一般には解けないことが大半である。その一方で系が変分構造を持つとき、 $F$  の臨界点の存在を証明し、その性質を知ることができれば、微分方程式系の記述だけでは見えなかった特殊解の存在を示すことができる。そして、これと同様の議論が写像に対しても有用なことを次節以降で確認していく。

## 2 面積保存写像の変分問題

この節では2次元の面積保存写像が持つ変分構造や、その性質を通じてもとの写像によって定まる軌道を変分法によって捉える手法について述べる。面積保存写像および軌道とは、次で定義される。

**定義 2.1** (面積保存写像, area-preserving map). 写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ ) が

$$dx \wedge dy = d\bar{x} \wedge d\bar{y} \quad (1)$$

を満たすとき, 面積保存写像と呼ぶ.

以下,  $f$  は  $C^1$  級微分同相写像であると仮定する.

**定義 2.2** (軌道, orbit). 写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  に対し,  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  が  $f$  の軌道であるとは, 任意の  $i \in \mathbb{Z}$  について,  $x_{i+1} = f(x_i)$  が成り立つことをいう. ( $\mathbb{Z}$  を  $\{0, \dots, n\}$  に置き換えて, 有限列についても同様の性質を満たせば軌道と呼ぶこととする.)

## 2.1 有限列によって表される臨界点

まず, 有限の長さの軌道について考えよう. 写像の変分構造を考えるうえでは, ポアンカレの補題が本質的な役割を果たす.

**補題 2.3** (ポアンカレの補題).  $n$  次元単連結領域上で定義された  $k$  次の  $\omega$  が閉形式である (つまり  $d\omega = 0$ ) ならば, ある  $k-1$  次微分形式  $\eta$  が存在して,  $\omega = d\eta$  を満たす. ただし  $1 \leq k \leq n$  とする.

簡易な変形により, (1) は  $d(\bar{y}d\bar{x} - ydx) = 0$  と表すことができる. ここでポアンカレの補題 (補題 2.3) より, ある  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  があって,

$$dh = \bar{y}d\bar{x} - ydx$$

を満たす. この  $h$  を用いて関数  $H$  を

$$H(x_j, \dots, x_k) := \sum_{i=j}^{k-1} h(x_i, x_{i+1}) \quad (2)$$

で与える. ここで次が成り立つ:

**補題 2.4.** (2) の臨界点は写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ ) の軌道を与える. ただし,  $f$  は次を満たすとする:

$$\text{ある } \delta > 0 \text{ があって, } \partial\bar{x}/\partial y \geq \delta \quad (3)$$

*Proof.* 以下,  $\partial_i$  は  $i$  番目の変数の偏微分を表すとする. (2) の臨界点を  $x = (x_j, \dots, x_k)$  とすると,  $\partial_2 h(x_{i-1}, x_i) + \partial_1 h(x_i, x_{i+1}) = 0$  が成り立つ. このとき,

$$y_i = -\partial_1 h(x_i, x_{i+1}) \quad (4)$$

とすると,  $(x_i, y_i)$  は  $f$  の orbit となる. 実際,

$$f(x_i, y_i) = f(x_i, -\partial_1 h(x_i, x_{i+1})) = (x_{i+1}, \partial_2 h(x_i, x_{i+1})) = (x_{i+1}, -\partial_1 h(x_{i+1}, x_{i+2}))$$

より明らか. ただし, (4) の右辺が多価関数になっていたり, 発散しないことを示す必要がある. これを示すために, (3) を用いる.  $f$  は微分同相であるから, 逆写像を考えて  $y$  が  $\bar{x}$  を変数に持つものとしてみれば, (3) から  $\partial y / \partial \bar{x} > 0$  となる. (4) と合わせると,

$$\frac{\partial y_i}{\partial \bar{x}} = -\partial_2 \partial_1 h(x_i, x_{i+1}) > 0$$

を得る.  $H$  は  $C^2$  級だから,  $y_i$  は発散しない. また,  $y_i$  の単調性から多価関数にもなり得ない. 以上より,  $f$  の軌道が臨界点から得られる.  $\square$

**Remark 1.** 上の補題において「軌道を与える」という, 少し曖昧な表現をしているのは, 臨界点そのものは軌道ではないからである.

**Remark 2.** 上の証明においては条件 (3) は, より弱い条件  $\partial\bar{x}/\partial y > 0$  に置き換えても問題ない. この条件は一般にツイスト条件と呼ばれる. したがって, 写像に対して変分構造の存在を保証するためには, 「面積保存写像かつツイスト条件を満たす」という仮定で十分である. (そうであるにもかかわらず, あえて条件 (3) を課している理由は 4.2 節で述べる.)

以上の議論から次が導かれる.

**命題 2.5.**  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が面積保存かつツイスト条件を満たすならば, 変分構造を持つ.

## 2.2 無限列によって表される臨界点の例

2.1 節では生成関数  $h$  を  $n$  個足し合わせた関数  $H$  を考え,  $H$  の臨界点から,  $f$  に対する有限長さ  $n$  の軌道  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$  を求めた. では,  $f$  の軌道  $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  を臨界点から得るにはどうすればいいかを考えよう. 最も単純な例は固定点 (周期 1 の周期軌道) や  $k$ -周期軌道を考える場合である. ここで周期軌道は次で定義される:

**定義 2.6** (周期軌道).  $f$  を  $\mathbb{R}^n$  上の写像とし,  $x_i \in \mathbb{R}^n$  とする. このとき,  $f$  の軌道  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  が  $f$  の  $k$ -周期軌道 (ただし  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) であるとは, 任意の  $i$  について,  $x_{i+k} = x_i$  を満たすことをいう. また, このような  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  の最小値を最小周期と呼ぶ.

ただし, 周期軌道を考えるのならば,  $h$  に対しても何らかの周期的な性質を仮定する必要がある. そこで次を仮定する:

$$\text{任意の } x, \bar{x} \in \mathbb{R} \text{ について, } h(x, \bar{x}) = h(x+1, \bar{x}+1) \quad (h_1)$$

この仮定を満たすための写像  $f$  を考える場合は,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  の代わりに,  $f: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  を考える. そのうえで  $f$  から定まる  $h$  が  $(h_1)$  (およびその他の「良い性質」) を満たすために, 通常は (3) に加えて  $y = 0, 1$  が  $f$  上の不変曲線になっているという仮定を課して考えるが, 詳細は割愛する. [2, 4]などを参照されたい.  $(h_1)$  を仮定したもとの,

$$h(x^*, x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}} h(x, x) \quad (5)$$

を求める. このとき

$$\partial_2 h(x^*, x^*) + \partial_1 h(x^*, x^*) = 0$$

が成り立つから,  $y^* = -\partial_1 h(x^*, x^*)$  として, 任意の  $i$  について  $(x_i, y_i) = (x^*, y^*)$  とおけば,  $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  が軌道になる. 周期が 2 以上の周期点については次節で改めて述べる.

では, ヘテロクリニック軌道やホモクリニック軌道のように  $i \rightarrow \pm\infty$  のふるまいによって特徴づけられるような軌道に対応する臨界点の存在を示すにはどうすればいいだろうか. ここで, ヘテロクリニック軌道およびホモクリニック軌道とは次で定義される.

**定義 2.7** (ヘテロクリニック軌道).  $f$  を  $\mathbb{R}^n$  上の写像とし,  $x_i \in \mathbb{R}^n$  とする. このとき,  $f$  の軌道  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  が  $f$  のヘテロクリニック軌道であるとは, ある異なる二つの固定点  $u^0, u^1$  が存在して,  $x_i \neq u^0, u^1$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) かつ  $|x_i - u^0| \rightarrow 0$  ( $i \rightarrow -\infty$ ) かつ  $|x_i - u^1| \rightarrow 0$  ( $i \rightarrow \infty$ ) を満たすことをいう.

**定義 2.8** (ホモクリニック軌道).  $f$  を  $\mathbb{R}^n$  上の写像とし,  $x_i \in \mathbb{R}^n$  とする. このとき,  $f$  の軌道  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  が  $f$  のホモクリニック軌道であるとは, ある固定点  $u$  が存在して,  $x_i \neq u$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) かつ  $|x_i - u| \rightarrow 0$  ( $i \rightarrow \pm\infty$ ) を満たすことをいう.

例えば  $f$  のホモクリニック軌道と, それに対応する  $h$  上の臨界点  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  を  $\{(i, x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  の形でプロットしたグラフを考えると図 1, 2 のようになる. 図 1 では  $x = u^0, u^1$  および  $y = -\partial_1 h(u^j, u^j)$  で定まる  $(x, y)$  を固定点としている. 図 1 の青い軌道があるホモクリニック軌道を模式的に表している. 過去には  $x = u^0$  の固定点に収束するが, 一度  $x = u^1$  の近傍に近づいて (図 2 で見ると 1 の部分), 再び  $x = u^1$  の近傍から離れて (図 2 で見ると 2 の部分), その後は  $x = u^0$  の固定点に収束する. また, 図 2 の中一度  $x = u^1$  の近傍に近づいたあと,  $x = u^1$  の近傍から離れることなくそのまま  $x = u^1$  に収束すれば, それは単調なヘテロクリニック軌道の一例になる.

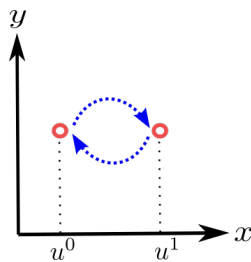


図 1:  $f$  上のホモクリニック軌道

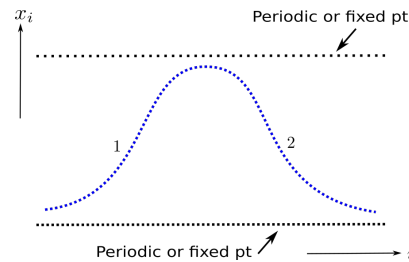


図 2: 図 1 に対応する  $H$  の臨界点

**Remark 3.** 力学系の文脈では周期点もある種の固定点のひとつとして扱われる. そのため周期点に収束するような軌道も同様にヘテロ/ホモクリニック軌道と呼ぶ. その意味で図 2 では「*Periodic or fixed pt(point)*」と表記した.

ではヘテロクリニック軌道やホモクリニック軌道のグラフを描く  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  を臨界点として得る方法を考えよう. 関数  $H: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$H(x) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} h(x_i, x_{i+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n h(x_i, x_{i+1})$$

と定義するとどうか? これは  $\lim$  が定義できるのかという問題が生じてしまう.  $\lim$  が定義できる場合でも  $i \rightarrow \pm\infty$  での  $h(x_i, x_{i+1})$  が 0 に収束しないと常に発散してしまう. そこで, 無限和が収束するような正規化を考える. 定義にも記述したように, ヘテロ/ホモクリニック軌道は  $i \rightarrow \pm\infty$  において特定の固定点に収束する. そこで,  $H$  の代わりに  $I$  を次のように定義する.

$$I(x) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (h(x_i, x_{i+1}) - c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n (h(x_i, x_{i+1}) - c) \tag{6}$$

ここで,  $c = \min_{x \in \mathbb{R}} h(x, x)$  である. 上記の  $I$  に対して, ある特定の範囲や制約条件を課したもとの最小点を考えることで, ヘテロ/ホモクリニック軌道の存在が証明できることを次節で見ていく.

### 3 臨界点の存在証明手法

ここでは臨界点として特に最小点 (minimizer と呼ばれる) に着目して考えるとする。ただし、ここでの最小点とは global minimizer ではなく、local minimizer を意図していることに注意されたい。つまり、対象となる空間全体の中での最小点を見るのではなく、「ある特定の範囲や制約条件を課したもとの最小点」を考える。

#### 3.1 周期軌道

本稿では、固定点 (周期 1 の周期点) に収束するようなヘテロ/ホモクリニック軌道についてのみ述べる。ただし、周期軌道の存在も同様に関数  $H$  の臨界点から証明することができる。周期が 2 以上の周期点について考えよう。このとき  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  の「周期」を次で定義する。

**定義 3.1** ( $(q, p)$ -周期).  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  が  $(q, p)$ -周期的であるとは、

$$x_{i+q} = x_i + p \quad (7)$$

が任意の  $i \in \mathbb{Z}$  について成り立つことを指す。

$\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  が  $(q, p)$ -周期的であるとき、もとの  $f$  の軌道  $(x_i, y_i)$  は  $q$ -周期的になる。このような周期点の存在は、いわゆる「周期境界条件」のもとの最小点を考えればよい。

$$H(x^*) = \min_{x \in X_{q,p}} \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1}) \quad (8)$$

ここで、 $H(x) = \sum h(x_i, x_{i+1})$  であり、

$$X_{q,p} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid x_{i+q} = x_i + p \ (\forall i \in \mathbb{Z})\}$$

である。また、今回考える設定のもとでは結果的に  $p, q$  が互いに素な場合のみを考えればよいことが示せる。(この事実や  $x^*$  が存在することの証明については、[2] を参照されたい。) したがって、周期軌道は  $p, q$  の比に着目すればよい。ここで  $\mathcal{M}_{p/q}$  を次で定義する：

$$\mathcal{M}_{p/q} = \{x^* \in X_{q,p} \mid x^* \text{ は (8) を満たす}\}$$

#### 3.2 ヘテロクリニック軌道

この節以降では固定点 (周期 1 の周期点) に収束するようなヘテロ/ホモクリニック軌道の存在証明について考える。臨界点の中で、ヘテロクリニック軌道を与えるものの存在を示すにはどうすればいいだろうか。ヘテロクリニック軌道はいつでも存在するわけではない。したがって追加で仮定が必要である。そこで次を仮定する。

$$\text{ある } u^0, u^1 \in \mathcal{M}_0 \text{ があって、任意の } v \in \mathcal{M}_0 \text{ に対して、} v < u^0 \text{ または } u^1 < v \text{ である} \quad (9)$$

ここで,  $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  について  $x < y$  とは, 任意の  $i$  について  $x_i < y_i$  であることを意味するとする. (9) は固定点の集合に「すき間」があることを仮定している. (9) を満たすような組  $\{u^0, u^1\}$  を [2] での呼び名に則って neighboring pair と呼ぶことにする. 以下, 記号を濫用して  $u^0, u^1$  は特に  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  の元の意味でも,  $\mathbb{R}^1$  の元でも用いるとする. ( $u^j = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  かつ任意の  $i$  について  $x_i = u^j$  とする. )

neighboring pair  $\{u^0, u^1\}$  に対して,  $X := [u^0, u^1]^{\mathbb{Z}}$  とする.  $X$  上にヘテロクリニック軌道が存在することを示そう. 関数  $I: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  を (6) で定義する. この節の冒頭で, 「ある特定の範囲や制約条件を課したもとの最小点」を考えると述べたが, これはつまり,  $X$  のある部分集合  $Y$  に対して,

$$I(x^*) = \inf_{x \in Y} I(x) \quad (10)$$

という形で与えられる臨界点  $x^*$  を考え, このとき, こちらが望む軌道を含むようにうまく仮定をした部分集合  $Y$  を選ぶということである. 今回のように, ヘテロクリニック軌道を考えるのであれば

$$Y = \{x \in [u^0, u^1]^{\mathbb{Z}} \mid |x_i - u^0| \rightarrow 0 (i \rightarrow -\infty) \text{ かつ } |x_i - u^1| \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)\} \quad (11)$$

と定義するのは自然だろう. もちろん,  $x^*$  が実際に  $X$  の元になっていることと,  $x^* = \{x_i^*\}$  が  $u^0, u^1$  と任意の  $i$  で一致していないことを確認する必要がある. ( $Y$  の‘境界’に  $x^*$  がのっている場合は  $x^*$  が臨界点であることが保証されないため.) 詳しい証明は [6] を参照されたい.

上で定義した  $X$  はコンパクト性が保証されない. そこで次を思いだそう.

**補題 3.2** (チコノフの定理). 任意個のコンパクト空間の直積空間はコンパクトである.

この定理を利用することで別証明も考えられる.  $Y^0, Y^1$  をそれぞれ

$$Y^j(l, p) = \{x \in X \mid |x_l - u^j| \leq p\} (j = 0, 1)$$

によって定義し

$$\begin{aligned} K &= \{k = (k_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z} \mid k_0 = 0, k_i < k_{i+1}\} \\ P &= \{\rho = (\rho_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_{>0} \mid 0 < \rho_i < (u^1 - u^0)/2\} \end{aligned} \quad (12)$$

とする. さらに  $k \in K, \rho \in P$  に対して,  $Y$  を

$$Y = \left( \bigcap_{i \leq 0} Y^0(k_i, \rho_i) \right) \cap \left( \bigcap_{i > 0} Y^1(k_i, \rho_i) \right) \quad (13)$$

と定める.  $Y$  は  $X$  上に無限個の「杭」を立てて, その杭の間を通るような軌道の集合である. 次節以降で考える軌道も, この杭の選び方を変えることである程度共通の形で  $Y$  を記述できる. このとき,  $Y$  はコンパクト (より正確には点列コンパクト) であることが保証され,  $x^* \in Y$  が直ちに導かれる. ただし, このような集合を選ぶことで別の困難も新たに生じてしまう. 杭の先端 ( $x^* \in Y$  が  $|x_l - u^j| = p$  上) を通っていないことを示さなければならない. 結果的には  $k \in K, \rho \in P$  をうまく選ぶことで, (11) の場合と同様のヘテロクリニック軌道が得られることがわかる.

### 3.3 ホモクリニック軌道

3.2 節で得られたヘテロクリニック軌道の集合を  $X_{\text{het}}$  とおく. さらに, 関数  $p_0: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\{x_i\} \rightarrow x_0$  で定める. ヘテロクリニック軌道が存在しても, ホモクリニック軌道が存在するとは限ら

ない。そこで、3.2 節で得られたヘテロクリニック軌道の集合について次の仮定をする。

$$p_0(X_{\text{het}}) \neq (u^0, u^1) \quad (14)$$

上記の  $(u^0, u^1)$  は  $\mathbb{R}$  上の开区間を意味する。これも周期軌道の neighboring pair と同様、ヘテロクリニック軌道に「すき間」を仮定しているものと考えてもらえばよいと思う。図 2 のような最も「単純」なホモクリニック軌道（「単純」が意味するところは次節で言及する）の場合は

$$Y = \left( \bigcap_{i \neq 1,2} Y^0(k_i, \rho_i) \right) \cap \left( \bigcap_{i=1,2} Y^1(k_i, \rho_i) \right) \quad (15)$$

と選んで、(10) を考えればよい。このとき、 $u^1$  側に立てる杭を 1 本ではなく 2 本、つまり  $\bigcap_{i=1} Y^1$  ではなく  $\bigcap_{i=1,2} Y^1$  選ぶことが証明のポイントである。 $(\bigcap_{i \neq 1} Y^0) \cap (\bigcap_{i=1} Y^1)$  としてしまうと、ヘテロクリニック軌道の証明で言及したことと同様に、 $x^*$  が杭の先端を通らないことが示せない。

**Remark 4.** このように設定した空間の「境界」上に臨界点がないことを証明しなければならないことは、今回の話題に限らず、変分解析において共通の困難点である。

### 3.4 より複雑な軌道

3.2, 3.3 節では最も単純な形のヘテロクリニック軌道とホモクリニック軌道の存在について述べた。「単純」と表現したのは、各軌道の振る舞いとして、下図のように複数回固定点の近傍を行ったり来たりするようなパターンも考えられるからである。（ここで述べた設定とは少し異なるが、同様の手法で固定点の近傍を有限回行ったりきたりするヘテロ/ホモクリニック軌道の存在が [6] で示されている。）

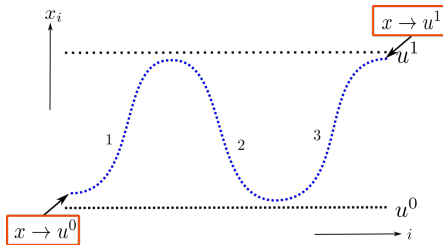


図 3: 単純（単調）でないヘテロクリニック軌道

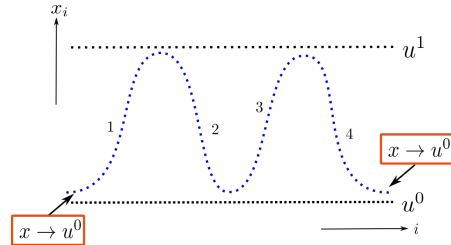


図 4: 単純でないホモクリニック軌道

しかしながら、この場合も  $Y$  の取り方としては (13), (15) と同様に無限個の杭を立てて、その立て方を少し変えるだけである。例えば、図 3 の軌道であれば図 5 に記すように杭を立てて制限する。

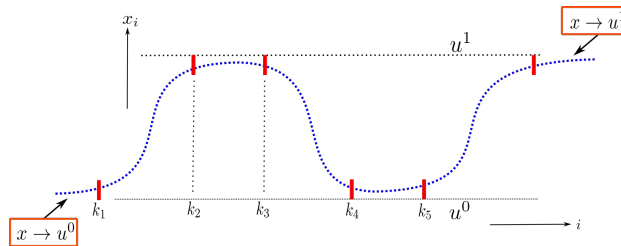


図 5: 3 回上下に振幅するヘテロクリニック軌道と杭

また，無限回上下に振幅し続けるような，ヘテロクリニックでもホモクリニックでもない軌道の存在も示すことができる．この場合は  $a \equiv b \pmod{4}$  として，

$$Y = \left( \bigcap_{i \equiv 0,1} Y^0(k_i, \rho_i) \right) \cap \left( \bigcap_{i \equiv -1,2} Y^1(k_i, \rho_i) \right) \quad (16)$$

を考えればよい．つまり，図 6 に示すように，上下に 2 本ずつ交互に杭を打って，その間を通る軌道の集合を考える．

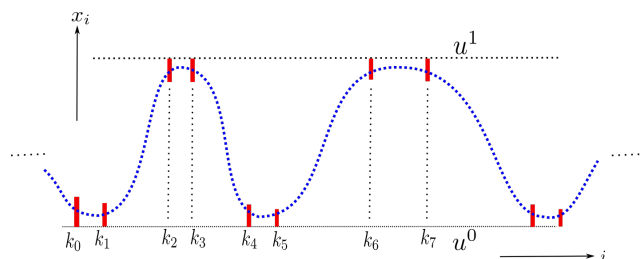


図 6: 無限回上下に振幅する軌道と杭

ただし，この場合， $I(x)$  は常に発散してしまう．そのため，ヘテロ/ホモクリニック軌道を考える際に (6) で記したような正規化をしたように，無限回の振幅をするような軌道を考える場合は，正規化した (6) に対してまたさらなる正規化を考えなくてはならない．無限回の振幅をするような軌道の存在証明については [3] を参照されたい．

## 4 その他の議論

### 4.1 連続系との比較

写像のヘテロ/ホモクリニック軌道を変分構造を用いて示す手法について述べてきたが，これまで記した大まかな手順は [5] に記されたポテンシャル系における周期解，ヘテロクリニック解，ホモクリニック解の存在証明に用いられた技法が元になっている．（ヘテロ/ホモクリニック解の定義は定義にある固定点を平衡点に読み替え，各ステップを表す  $i$  を時間  $t$  に置き換えればよい．）

ポテンシャル系とは，ある滑らかな関数  $V: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto V(t, x)$  があって，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (17)$$

と表されるような微分方程式系を指す．（一般には右辺にマイナスがつく表記の方が多いが，変分解析ではしばしば (17) の表記で表される．）簡単のため次元自励系として振り子の運動方程式 ( $V(x) = \sin(2\pi x)$ ) を考えよう．このとき（記号を濫用して再び  $H$  を用いて）

$$H(x) = \int_a^b \frac{1}{2} \dot{x} + V(x) dt \quad (18)$$

とすると， $H$  の臨界点は振り子の運動方程式の解になっている．（連続系の場合は，写像と違い， $H'(x) = 0$  となるような関数  $x$  そのものが解になる．）周期境界条件のもとでの最小点は  $x = k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )，つまり振り子が上向きに直立した状態であり，これ以外に最小点は存在しない．直感的には振り子が真下で静止した状態の臨界点が真っ先に想像されそうだが，この臨界点は最小点



ではない。したがって、例えば  $x = 0, 1$  を選べば、これは前節で述べた neighboring pair に対応する。そして、 $x = 0, 1$  は物理的には同じ位置を表すが、 $S^1$  による同一視をやめて別の点とみなせば、 $x = 0$  に  $t \rightarrow -\infty$  で、 $x = 2\pi$  に  $t \rightarrow \infty$  に収束する軌道はヘテロクリニック解となる。写像の場合に見たように、平衡点での 1 周期分の (18) の値を引き算して、

$$I(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \int_i^{i+1} \frac{1}{2} \dot{x} + V(x) dt - c \right)$$

と  $I$  を定義し、(11) と同様に関数空間を設定して最小点をみることでヘテロクリニック解が得られる。関数空間の場合はチコノフの定理が適用できないため、前節で述べたような「無限 (整数) 個の杭を立てる」という方針は使えない。コンパクト性が保証されないため、関数列の収束に関する議論も重要になる。また、振り子はホモクリニック軌道の存在証明をするために仮定した (14) を満たさず、ホモクリニック解も存在しない。

一方で、振り子の視点に周期的な摂動を加えると、カオス的な振る舞いをするのが知られており、この場合はホモクリニック解が存在する。証明は次節で見たのと同様に「(有限個の) 杭を立てる」という操作を用いるが、詳細は割愛する。

## 4.2 $h$ に関する諸注意

度々登場している  $h$  および、その元となる  $f$  の性質についていくつかコメントしておこう。まず、 $h$  は  $C^1$  級の 2 次元写像  $f: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  をもとに決まる関数であった。そして、この  $f$  のリフト  $\tilde{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, ((x, y) \mapsto (X, Y))$  は面積保存写像であり、ある  $\delta > 0$  があって、 $\partial X / \partial y \geq \delta$  を満たすような写像である。詳細は省くが、 $f$  に上記の仮定を課しておく、 $f$  から定まる  $h$  について最小点を調べるうえで「良い性質」が成り立つ。したがって、あくまで今回述べた性質は  $h$  が「良い性質」を満たすための十分条件であるが、今回考えた話題のように

「写像  $f$  からスタートして、その  $f$  が描く軌道を変分構造を用いて調べる」

というスタンスでは、そもそも変分構造  $h$  の存在を示すためには面積保存写像やツイスト条件という仮定は本質的なものである。また、力学系の観点から考えて  $f$  にある程度の滑らかさを仮定することも自然なことだろう。

一方、これまで記した面積保存写像の変分問題に関する話題は、Aubry-Mather 理論と呼ばれるものの一部であるが、この理論のもとになったのは Aubry らによる Frenkel-Kontorova model と呼ばれる、結晶格子の配置に関するモデルについての結果 [1] である。彼らの論文では

$$h(x, X) = \frac{1}{2} C(x - X)^2 + V(x) + V(X) \quad (19)$$

に対して、 $H = \sum_{i=0}^n h(x_i, x_{i+1})$  の臨界点を考える。そのとき、臨界点  $\{x_i\}$  そのものに物理的意味づけがなされている。このように、写像  $f$  の軌道について調べるのではなく、

「ある関数  $h$  の和によって定義された関数  $H$  についての臨界点の性質について調べる」

という立場でこれまでの証明を考えると、例えば  $h$  が  $C^2$  級であるという仮定は強すぎる。そこで、 $h$  がどのような仮定（「良い性質」）を満たしていれば、臨界点として周期点やヘテロクリニック点と

いった特徴的なものが得られるのかを調べたのが Bangert [2] である。Bangert が提示した仮定を満たすための十分条件であり、かつ  $f$  に課せられた仮定がなるべく簡明になる設定が今回用いた設定である。

**Remark 5.** *Aubry-Mather* 理論を数学の理論として発展させたのは *Mather* の功績によるところが大きい。そのきっかけとなった *Mather* の最初の論文は [4] である。3.1 節で周期軌道が  $p/q$  で表される有理数によって特徴づけられることをみたが、この論文では、無理数周期に対応する準周期軌道も含めて、周期軌道の存在を変分構造を用いて示している。

## 5 おわりに

本稿ではなるべく証明の大まかな流れがどのようなものかを伝えることを念頭に置き、証明の細部に立ち入ることは避けた。そのため、設定や主張がどこか曖昧に感じられた方もいるかもしれないが、その点をご了承いただきたい。また、1 節で述べたように、本稿で扱った事項は「変分問題を經由することで微分方程式系や写像によって定義される時間大域的に特徴づけられた解や軌道を得る」というテーマに基づく。このようなテーマに関する論文の主定理は「 $\circ\circ$ という系に対して、 $\circ\circ$ という条件を満たす解が存在する」といった形式で書かれることが多いが、今回はあえて定理は書かなかった。というのも（これは私個人の意見であるが）変分解析を用いた解や軌道の存在証明は、「 $\circ\circ$ という解が存在する」という定理の主張以上に、それを得るまでの証明のステップを楽しむ感覚の方が強い気がするからである。少しでも証明の楽しさが伝われば幸いである。

## 参考文献

- [1] S. Aubry and P. Y. Le Daeron, *The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions. I. Exact results for the ground-states*, Phys. D **8** (1983), no. 3, 381–422.
- [2] V. Bangert, *Mather sets for twist maps and geodesics on tori*, Dynam. Report. Ser. Dynam. Systems Appl. **1** (1988), 1–56.
- [3] Y. Kajihara, *Variational structures for infinite transition orbits of monotone twist maps*, <https://arxiv.org/abs/2212.01850>.
- [4] J. N. Mather, *Existence of quasiperiodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*, Topology **21** (1982), no. 4, 457–467.
- [5] P. H. Rabinowitz, *The calculus of variations and the forced pendulum*, Hamiltonian dynamical systems and applications, NATO Sci. Peace Secur. Ser. B Phys. Biophys., Springer, Dordrecht, 2008, pp. 367–390.
- [6] G. Yu, *Chaotic dynamics of monotone twist maps*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **38** (2022), 179–204.