アダマール多様体上のジャンプ拡散過程の性質

大阪市立大学大学院 理学研究科 数物系専攻
甲斐大貴 (Hirotaka Kai)

概要

Markov 過程とは，未来の状態の確率に，過去の情報が反映されず，現在の状態のみに依存する運動の事である．Lèvy 過程はユークリッド空間上の Markov 過程で定常増分性を持つ確率連続な確率過程である．この確率過程についての大域的性質については様々な先行研究がある．本講演では確率過程の大域的性質として，既約性，再帰性，過渡性，保存性を取り上げる．既約的な Lèvy 過程は再帰性か過渡性のどちらかを満たすことは良く知られている．そして Chung-Fuchs [4] は Lèvy 過程が再帰性をもつ必要十分条件を特性関数を使って特徴づけを行なった．特に 3 次元以上の非退化な Lèvy 過程は過渡的であることが Chung-Fuchs [4] の結果から分かる．一方で Lèvy 過程をリーマン多様体上に構成する試みが様々な研究者によって行われてきた．Elles-Malliavin-Elworthy は正規直交枠束上の確率微分方程式の解を底空間に射影することによって Brown 運動を構成した．実際対応する生成作用素は多様体上の Laplace-Beltrami 作用素である．Applebaum [2] はこの構成方法を発展させて，生成作用素が Lèvy 過程のそれに類似しているジャンプ拡散過程をリーマン多様体上に構成した．リーマン多様体上のジャンプ拡散過程については次のような先行研究がある．Ichihara [10] はリーマン多様体上の Brown 運動が再帰的，過渡的になるための十分条件を断面曲率，Ricci 曲率の観点から求めた． Masamune-Uemura-Wang [14] は対称なジャンプ拡散過程が保存性を持つための多様体の測地球の体積増加レートを求めた．

このような背景の下，我々は断面曲率が負の定数で pinch されていれば，ジャンプ拡散過程は既約性，過渡性，保存性を持つことを示した．本講演では上記の結果をジャンプ拡散過程の radial part を評価することで得られることを示す．

1　導入

(M, g) を $m(\geq 2)$ 次元単連結完備リーマン多様体とし無限遠点 ∂_M による 1 点コンパクト化を $\widehat{M}$ とする．更に ∇ を Levi-Civita 接続とする．M の枠束を $\mathcal{F}(M)$ とし，$\mathcal{F}(M)$ から M への射影を π と書く．$\mathcal{F}(M)$ の部分多様体 $O(M)$ を次のように定義する．

$$O(M) = \{u = ((v_1)_{\pi u}, \ldots, (v_m)_{\pi u}); (v_1)_{\pi u}, \ldots, (v_m)_{\pi u} \text{は } \mathrm{T}_{\pi u}M \text{ の正規直交基底 }\}$$

$u \in O(M)$ を次の関係で $\mathrm{T}_{\pi u}M$ から $\mathbb{R}^m$ への線形同型写像と考える．

$$\mathbb{R}^m \ni z \mapsto \sum z^i (v_i)_{\pi u} \in \mathrm{T}_{\pi u}M$$

勝手な $z \in \mathbb{R}^m$ に対して，$Hz(u) \in \mathrm{T}_u O(M)$ を $uz \in \mathrm{T}_{\pi u}M$ の水平持ち上げと定義すると Hz は $O(M)$ 上のベクトル場となる．特に $\mathbb{R}^m$ 上の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_m$ に対して，$H_i(u) = He_i$ と書

くことにする．$O(M)$ 上の常微分方程式

$$\frac{\partial \Xi_t}{\partial t} = Hz(\Xi_t),\ \Xi_0 = id$$

の解を $\Xi_z^t = \mathrm{Exp}(tHz)$ と書く．

$\{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^m); 0 \leq t < \infty\}$ を m 次元 Brown 運動とし $N(dz, ds)$ を $\nu(dz)ds$ を intensity に持つ Poisson ランダム測度とする．ただし $\nu(dz)$ は

$$\int_{\mathbb{R}_0^m} (1 \wedge |z|^2)\nu(dz)$$

を満たす Lèvy 測度である．これらの記号の下，$\{U_t; 0 \leq t < e\}$ を次の確率微分方程式の解とする．

$$\begin{aligned} F(U_t^u) - F(u) &= \sigma \int_0^t \sum_{i=1}^m H_i F\left(U_{s-}^u\right) \circ dB_s^i \\ &+ \int_0^t \int_{|z|>1} \left\{(F \circ \Xi_z)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right)\right\} N(dz, ds) \\ &+ \int_0^t \int_{|z|\leq 1} \left\{(F \circ \Xi_z)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right)\right\} \widetilde{N}(dz, ds) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^m} \left\{(F \circ \Xi_z)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right) - \sum_{i=1}^m z^i H_i F\left(U_{s-}^u\right) 1_{\{|z|\leq 1\}}\right\} \nu(dz)\, ds \\ &\forall F \in C^\infty(M). \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $e = \inf\{t > 0; X_t \notin M\}$ は爆発時刻，σ は 0 か 1 に値を取る定数とし，$\circ dB_s^i$ は Stratonovich 積分である．この確率微分方程式の解の射影 $\{X_t = \pi U_t; 0 \leq t < e\}$ を M 上の Lèvy 型確率過程と呼ぶ．一般に $\{U_t; 0 \leq t < e\}$ は Markov 過程であるが $\{X_t = \pi U_t; 0 \leq t < e\}$ は Markov 過程かどうかは分からない．次の定理は $\{X_t = \pi U_t; 0 \leq t < e\}$ が Markov 性を持つ十分条件を与えている．

定理 1 (Applebaum, D. and Estrade, A. (2000))**.** *Lèvy* 測度 $\nu(dz)$ が回転不変であるとき，$\{X_t = \pi U_t; 0 \leq t < e\}$ は出発点 x のフレームの選び方に依らない．従って，$\{X_t = \pi U_t; 0 \leq t < e\}$ は *Markov* 過程となる．

これで，本研究に必要な基本的な設定は終わりである．ここからは本研究の主結果について述べたいと思う．

2　主結果

まずは，Markov 過程の再帰性，過渡性，既約性についての定義をまとめる．

定義 1. D を M 上の滑らかな境界を持つ相対コンパクト集合とし，到達時刻，最終脱出時刻をそれぞれ

$$T_D = \inf\{t > 0;\ X_t \in D\}$$

$$\sigma_D = \sup\{t > 0;\ X_t \notin D\}$$

と定義する．このとき

- $\mathbb{P}_x[\sigma_D = \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は再帰的である．
- $\mathbb{P}_x[\sigma_D < \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は過渡的である．
- $\mathbb{P}_x[T_D < \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は既約的である．

既約的な右連続 Markov 過程は再帰性か過渡性のどちらかを持つ．また，再帰的な右連続 Markov 過程は爆発しないことに注意する．詳細は Getoor[7] を参照すること．

仮定 1. 以下の条件を仮定する．

- $\nu(dz)$ は回転不変である
- $\nu(dz)$ は $\mathbb{R}_0^m$ 上の *Lebesgue* 測度に対して絶対連続であり，その *Radon-Nikodým* 微分 $h(z) = \frac{\nu(dz)}{dz}$ は連続かつ $\{|z| \le 1\}$ 上で $h(z) > 0$ である．
- $\int_{|z|>1} |z|^2 \nu(dz) < \infty$
- X_t に対して密度関数 $p(t, x, y)$ が存在し，x に関して C^2 級である．
- y についての可積分関数 $G_1(t, y), G_2(t, y)$ が存在して $|\nabla_x p(t, x, y)| \le G_1(t, y)$, $|\nabla_x \nabla_x p(t, x, y)| \le G_2(t, y)$ を満たす

$\mathrm{dist}(\cdot, \cdot) : M \times M \to [0, \infty)$ を M 上の距離関数とする．また, M の基準となる点 $o \in M$ を一つ固定して，$r(\cdot) = \mathrm{dist}(o, \cdot)$ と定義する．

定理 2. ある負の定数 β が存在して，M の断面曲率 K が $K \le \beta < 0$ を満たすとき，次の不等式が成り立つような定数 $C(\beta, m) > 0$ が存在する．

$$r(X_t) \ge r(x) + \sigma W_t + M_t + C(\beta, m)t$$

ただし，W_t,M_t は次のように定義される．

$$W_t = \int_0^t \langle \nabla r(X_{s-}), dB_s \rangle,$$

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^m} \Big(r \circ \xi_z(X_{s-}) - r(X_{s-}) \Big) \widetilde{N}(dz, ds).$$

この定理から次のことが分かる．

定理 3.

$$\mathbb{P}_x[\lim_{t\to\infty} r(X_t) = \infty,\ e = \infty] = \mathbb{P}_x[e = \infty]$$

が全ての $x \in M$ で成り立つ．従って，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は過渡的である．

定義 2. *Markov* 過程 $\{X_t; 0 \le t < e\}$ が保存的であるとは，

$$\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1$$

が全ての $x \in M$ で成り立つことである．

以下の定理によって，保存性を示すためには $\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1$ となる $x \in M$ を一つ見つけてくるだけで十分であることが分かる．

定理 4. $j(x) = \mathbb{P}_x[e = \infty]$ と定義する．このとき次のいずれかが成り立つ．

- 全ての $x \in M$ に対して，$j(x) = 1$.
- 全ての $x \in M$ に対して，$j(x) = 0$.
- 全ての $x \in M$ に対して，$0 < j(x) < 1$.

また断面曲率に更なる条件を加えることで次の定理が導かれる．

定理 5. 任意の $\delta > 0$ に対して，停止時刻を

$$T(\delta) = \inf\{t > 0;\ r(X_t) < 2\delta\}$$

と定義する．断面曲率 K に対して $\alpha \leq K \leq \beta < 0$ を満たす負の定数 α, β が存在すると仮定する．このとき次のことが成り立つ．

定数 $C(\alpha, m, \delta)$ が存在し，$\{t < e \wedge T(\delta)\}$ 上で

$$r(X_t) \leq r(x) + \sigma W_t + M_t + C(\alpha, m, \delta)t$$

が成り立つ．

定理 6. 任意の $x \in M$ に対して，

$$\mathbb{P}_x\Big[\limsup_{t\to\infty} |W_t| < \infty\Big] = 1$$

$$\mathbb{P}_x\Big[\limsup_{t\to\infty} |M_t| < \infty\Big] = 1$$

が成り立つ．

これらの定理から $\{X_t; 0 \leq t < e\}$ が保存的であることが導かれる．一方で，リーマン多様体上のブラウン運動を従属操作することによってジャンプ拡散過程を得ることが出来る．従属操作によって得られたジャンプ拡散過程に対して過渡性，保存性が示すことが出来る．

定理 7. $\{T_t;\ 0 \leq t < \infty\}$ を *subordinator* とし，$\{X_t;\ 0 \leq t < e\}$ を M 上のブラウン運動とする．さらに，$0 > Ric \geq \alpha$, $K \leq \beta < 0$ を満たすとする．このとき，$\{X_{T_t};\ t \leq t < e\}$ は過渡的，保存的である．

参考文献

[1] Applebaum ,D. and Estrade ,A.: *Isotropic Lèvy processes on Riemannian manifolds*, *Ann. Probab.* **28** (2000), 166-184.

[2] Applebaum, D.: *A horizontal Lévy process on the bundle of orthonormal frames over a complete Riemannian manifold. Séminarie de Probabilités.* XXIX, 166-180. Lecture Notes in Math., **1613**. *Springer, Berlin* (1995)

[3] Fujiwara, T.: *Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows. J. Math. Kyoto. Univ.* **31** (1991), 99-119.

[4] Chung, K. L. and Fuchs, W. H.: *On the distribution of values of sums of random variables. Amer. Math. Soc.* **6** (1951).

[5] Fujiwara, T.: *Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows. J. Math. Kyoto. Univ.* **31** (1991), 99-119.

[6] Fujiwara, T., Kunita, H.: *Stochastic differential equations of jump type and Lévy processess in diffeomorphisms group. J. Math. Kyoto. Univ.* **25** (1985), 71-106.

[7] Getoor, R. K.: *Transience and recurrence of Markov processes*, *Seminar on Probability, XIV(Paris, 1978/1979)(French),* 397-409, Lecture Notes in Math., **784**, *Springer, Berlin,* (1980).

[8] Hsu, E.: *Stochastic analysis on manifolds. Amer. Math. Soc.* (2002).

[9] Hunt, G. A.: *Semigroups on measures on Lie groups*, *Trans. Amer. Math. Soc* **81** (1956), 264-293.

[10] Ichihara, K.: *Curvature, geodesics and the Brownian motion on a Riemannian manifold. II. Explosion properties*, *Nagoya Math. J.* **87** (1982), 115-125.

[11] Kai ,H. and Takeuchi ,A.: *Gradient formula for jump processes on Riemannian manifolds*, *Electron. J. Probab.* **26** (2021), article no. 101, 1 –15.

[12] Kobayashi ,S. and Nomizu ,K.: *Foundations of Differential Geometry. Volume I*, *Wiley, NewYork*, (1963).

[13] Kunita, H.: *Stochastic Flows and Jump-Diffusions. Springer,* (2019).

[14] J. Masamune, T. Uemura, and J. Wang.: *On the conservativeness and the recurrence of symmetric jump-diffusions. J. Funct. Anal.* **263** (2012), 3984-4008.

[15] Takeuchi, A.: *Bismut-Elworthy-Li-type formulae for stochastic differential equations with jumps. J. Theoret. Probab.* **23** (2010), 576-604.