群の帰納極限における左順序の孤立性について

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース
地引知栄 (Chihaya Jibiki)

概要

本研究は、群上の左順序に関するものである。群上に孤立順序が存在しなければ、順序のなす位相空間がカントール集合と同相となることが、2004 年に Linnell によって示されている。そこで、どのような群が孤立順序を持つのかが疑問として浮かぶが、有限生成でない群の場合について考察する。特に、群が帰納極限としてあらわされる場合を取り上げる。

1 導入

群上の左順序とは、群 G 上の全順序 $<$ で左からの群演算に対してその順序が不変であるようなもの、すなわち $\forall g', g_1, g_2 \in G,\ g_1 <_G g_2 \Rightarrow g'g_1 <_G g'g_2$ を満たすもののことである．左順序の研究は 1 次元力学系との繋がりは指摘されていたが、それ以外に他分野との関連が知られておらず 21 世紀に入るまで研究は進んでいなかった。しかし近年に次のような応用先があることがわかり、活発に研究されている。

(1) 組み紐群上に Dehornoy 順序という左順序が構成された [1]。この Dehornoy 順序から得られる、 Dubrovina-Dubrovin 順序は孤立順序と呼ばれる特徴的な左順序だった。
(2) Heegaard Floer homology が単純な構造を持つのかを、基本群が左順序を持つのかで簡単に判定することができるのではないかという予想 (L-space 予想) が提唱された [2]。
(3) 群環の zero-divisors 問題の解として左順序性が期待されている [3]。

ここで述べる結果は、(1) に関連する群上の孤立順序についてのものである。特に、既知の孤立順序を群の帰納極限上に拡張したとき、孤立順序にならないことを示した。

なお、この分野の全体像はサーベイがいくつか書かれている [3, 4]。

2 準備

2.1 左順序の基本的な性質

左順序の定義は既に述べた。なお、ここでは左順序としては狭義全順序 $<$ を用いる．また，左順序を持つ群はねじれのない群であることに注意する。

左順序をとらえる上で、基本的となる半群を述べる。

■**定義** (positive cone)　左順序 $<_G$ に対して $P_G \coloneqq \{g \in G | 1 <_G g\}$ を $<_G$ の **positive cone** という.

■**命題** 1　群 G の positive cone P_G に対して、次の (1)(2) が成り立つ。

(1) $P_G \cdot P_G \subset P_G$
(2) $G = P_G \sqcup P_G^{-1} \sqcup \{1\}$

■**命題** 2　群 G が与えられているとする。このとき、命題 1 の (1)(2) を満たす部分集合 $P_G \subset G$ が存在するとき、$\forall g, h \in G$ で、

$$g <_G h \Leftrightarrow g^{-1}h \in P_G$$

は左順序を定め、P_G がその positive cone となる。

命題 1 と命題 2 より、群 G に対して左順序を定めることと、命題 1(1)(2) を満たす半群 P_G、すなわち positive cone を定めることは同値であることがわかる。よって今後は、左順序を定義する代わりに positive cone を定義しても良い。

■**定義** (convex subgroup)　群 G とその左順序 $<_G$ に対して、部分群 $C \subset G$ が **convex subgroup** であるとは、

$$\forall g \in G, \forall c_1, c_2 \in C, c_1 <_G g <_G c_2 \Rightarrow g \in C$$

となること。

本稿では、部分集合 $A \subset G$ を含む (で生成される)convex suubgroup を $\langle\langle A \rangle\rangle_P \subset G$ と表すこととする。

それでは左順序の例として、冒頭に挙げた Dehornoy 順序を見る。

2.2　組み紐群による例

組み紐群とは，有限表示

$$B_n \coloneqq \left\langle \sigma_1, ..., \sigma_{n-1} \middle| \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & (|i-j| \geq 2) \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & (|i-j| = 1) \end{array} \right\rangle$$

によって定義される群のことである。

組み紐群の元は $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ とその逆元を組み合わせた語であるが、これらの語に対して $\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}$ とその逆元を含まず、σ_i を含み σ_i^{-1} を含まない表現を持つ語を **i-positive** という。1-positive から、$(n-1)$-positive までの語を集めた集合を P_D とする。

■**定理** [1]　P_D は、B_n の positive cone である。

P_D から命題 2 で定まる B_n 上の左順序を Dehornoy 順序と呼ぶ。

組み紐群の元に対し，$\alpha_i \coloneqq (\sigma_i \cdots \sigma_{n-1})^{(-1)^{i-1}}$ とする。Dehornoy 順序より次が得られる.

■定理 [5]　半群 $P_{DD} \coloneqq \langle \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \rangle^+$ は、B_n の positive cone である。さらに、P_{DD} は孤立順序である。

孤立順序は後で定義する。P_{DD} から定まる B_n 上の左順序が、Dubrovina-Dubrovin 順序である。i-positive な元の集合を P_i と書けば、$P_{DD} = P_1 \cup P_2^{-1} \cup \cdots \cup P_{n-1}^{(-1)^n}$ と表される。

2.3　孤立順序とは

命題 2 により、左順序に対し positive cone が一対一に対応するのであった。ここで群 G の冪集合を 2^G とする。2^G には離散位相による積位相が入る。ここで、G の任意の positive cone P は $P \subset G$ より、$P \in 2^G$ である。よって、G の全ての positive cone を集めた集合を $LO(G)$ とすれば、$LO(G) \subset 2^G$ であり $LO(G)$ は部分空間となる。これを、左順序のなす位相空間という。この位相は，次の $g \neq 1$ に対して定義される 2 種類の準開基を用いて表すこともできる。

$$U_g \coloneqq \{P \in LO(G) | g \in P\}$$
$$U_g^c \coloneqq \{P \in LO(G) | g \notin P\}$$

なお、U_g と U_g^c は互いに補集合の関係になっているので U_g と U_g^c は閉集合である。よって、この空間は完全不連結である。

そしてチコノフの定理より、2^G はコンパクトである。さらに、以下が示される。

■定理 [6]　$LO(G)$ は、コンパクト完全不連結空間である。さらに、G が可算集合のとき、$LO(G)$ は距離化可能である。

すなわち G が可算群であるとき、$LO(G)$ が孤立点を持たなければ $LO(G)$ はカントール集合と同相となる。そこで特に $LO(G)$ が孤立点を持つとき、その孤立点のことを G の**孤立順序**と呼ぶ。

この定理より $LO(G)$ が孤立順序を持つのか否かが重要な研究テーマとなる．2022 年現在、様々な群上に孤立順序が存在するのか否かが具体的に調べ上げられている。以下にその一例を挙げる (細かな条件は省かれている)。

孤立順序を持つ

- 組み紐群
- $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$
- $G *_{\mathbb{Z}} H$ (CF(G)、CF(H)、INV(H) 条件が必要。)
- $G *_A H$ (stepping 条件が必要。)
- $F_n \times \mathbb{Z}$

孤立順序を持たない

- virtually 可解群
- $F_n *_{\mathbb{Z}} H$
- $G * H$

- $\mathbb{Z}^n$
- B_∞, F_∞

そして本研究は、上記において未だ研究が不十分であると考えられる可算生成群に関して調べたものとなる。

3　研究内容

3.1　先行研究

注目すべきは、次の 2 つの先行研究である。

■定理 A [7]　$l, m_2, n_2, m_3, n_3, ..., m_l, n_l \geq 2$ として、次の群を考える。

$$G \coloneqq \left\langle x_1, ..., x_l | x_1^{m_2} = x_2^{n_2}, ..., x_{l-1}^{m_l} = x_l^{n_l} \right\rangle$$

このとき、positive cone が次の l 個の元で生成される。

$$\begin{aligned}
&x_1,\\
&x_1^{-m_2+1}x_2,\\
&...\\
&x_1^{m_2+1}x_2^{-m_3+1}\cdots x_{i-1}^{-m_i+1}x_i\\
&...\\
&x_1^{m_2+1}x_2^{-m_3+1}\cdots x_{l-1}^{-m_l+1}x_l
\end{aligned}$$

特に、その左順序は孤立順序である。

■定理 B [8]　群 G, H は有限生成であり、$z_G \in Z(G), z_h \in H$ をそれぞれ非自明な元とする。そして G, H はそれぞれ孤立順序を持ち、その positive cone がそれぞれ $\mathcal{G} \coloneqq \{g_1, ..., g_m\}, \mathcal{H} \coloneqq \{h_1, ..., h_n\}$ で生成されるとする。さらに、$\mathcal{G}, \mathcal{H}$ は CF(G),CF(H),INV(H) という条件を満たすとする。このとき $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ から誘導される孤立順序が、$G *_{\mathbb{Z}} H$ 上に構成される。

定理 A においては、l の無限大への極限を考えることで群の帰納極限上に拡張された左順序を得ることができる。定理 B においては、構成した群 $G *_{\mathbb{Z}} H$ を再び定理 B の H として群 $G *_{\mathbb{Z}} (G *_{\mathbb{Z}} H)$ が構成され、これを繰り返すことでこちらも、群の帰納極限上に拡張された左順序を得ることができる。よって、いずれの定理も自然に群の融合積による帰納極限へと拡張できる。具体的には、次のような群 $\tilde{G}$ である。

群の族 $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ とその部分群の族 $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を考え、全ての m に単射群準同型 $\varphi_m : A_m \hookrightarrow G_{m+1}$ が与えられているとする。このとき次のような群の融合積 $G^{(m)}, m = 1, 2, ...$ が帰納的に定義される。

$$\begin{aligned}
G^{(1)} &= G_1\\
G^{(m+1)} &= G^{(m)} *_{\varphi_m} G_{m+1}
\end{aligned}$$

このとき、$\tilde{G} \coloneqq \varinjlim G^{(m)}$ と定義する。

3.2　主結果

■定理　$\tilde{G}$ がアーベル群でないとする。そして、任意の positive cone $\tilde{P} \in LO(\tilde{G})$ は正の最小元を持たない一方、positive cone $P^{(m)} := \tilde{P} \cap G^{(m)} \in LO(G^{(m)})$ は正の最小元を持つとする。さらに $P^{(m)}$ の正の最小元を $\tilde{p}_m$ とし、これらが次を満たすとする。

(1) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \geq m$ such that $A_n \subset \langle\langle \tilde{p}_m \rangle\rangle_{P^{(n)}}$
(2) $\forall m \in \mathbb{N}, G_m \subset \langle\langle A_m \rangle\rangle_{P^{(m)}}$
(3) $\forall m \in \mathbb{N}, G_m \subset \langle\langle \varphi_m(A_m) \rangle\rangle_{P^{(m)}}$

このとき、$\tilde{P}$ は孤立順序ではない。

定理 A と定理 B はそれぞれ $\tilde{G}$ 上に左順序を構成する。

■系　上記定理 A と定理 B から自然に拡張される可算生成群 $\tilde{G}$ 上の左順序は、いずれも孤立順序にならない。

この結果は、構成した可算生成群 $\tilde{G}$ 上に孤立順序が存在しないことを保証するものではない。しかし既知の有限生成群上の孤立順序を可算生成群へと拡張しても、既に孤立性は失われてしまっていることを示している。

参考文献

[1] Patrick Dehornoy. Braid groups and left distributive operations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 345, No. 1, pp. 115–150, 1994.

[2] Steven Boyer, Cameron McA. Gordon, and Liam Watson. On L-spaces and left-orderable fundamental groups. *Math. Ann.*, Vol. 356, No. 4, pp. 1213–1245, 2013.

[3] Adam Clay and Dale Rolfsen. *Ordered groups and topology*, Vol. 176 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.

[4] 伊藤哲也. 群の不変順序と位相幾何学. 数学, Vol. 67, No. 2, pp. 133–153, 2015.

[5] T. V. Dubrovina and N. I. Dubrovin. On braid groups. *Mat. Sb.*, Vol. 192, No. 5, pp. 53–64, 2001.

[6] Adam S. Sikora. Topology on the spaces of orderings of groups. *Bull. London Math. Soc.*, Vol. 36, No. 4, pp. 519–526, 2004.

[7] Patrick Dehornoy. Monoids of O-type, subword reversing, and ordered groups. *J. Group Theory*, Vol. 17, No. 3, pp. 465–524, 2014.

[8] Tetsuya Ito. Construction of isolated left orderings via partially central cyclic amalgamation. *Tohoku Math. J. (2)*, Vol. 68, No. 1, pp. 49–71, 2016.