

曲面結び目の自明な再接着により得られる trisection

東京工業大学理学院数学系数学コース

磯島 司 (Tsukasa ISOSHIMA)*

概要

3つの4次元の1ハンドル体による4次元閉多様体の分解を trisection という。境界付き4次元多様体の trisection は relative trisection と呼ばれている。ある条件を満たす2つの relative trisection に対し、それらの適切な貼り合わせにより、4次元閉多様体の trisection を構成することが出来る。本稿では、これを曲面結び目の自明な切り貼りに適用した際に得られた結果を紹介する。この結果は、Heegaard 分解における Waldhausen の定理の4次元のアナロジーである予想に関連する結果である。

1 4次元多様体の trisection

本稿では、4次元多様体は全て滑らか、コンパクト、連結かつ向き付けられているとする。また、曲面結び目は、4次元多様体に滑らかに埋め込まれた閉曲面を指すこととする。

本章では、4次元多様体の trisection に関する基本事項を紹介する。Gay-Kirby[GK16] により導入された4次元多様体の trisection とは、4次元多様体を3つの4次元の1ハンドル体により分解することをいう。trisection は、3次元における基本概念の1つである、3次元多様体の分解である Heegaard 分解の4次元のアナロジーとみなすことができる。

定義 1.1. X を4次元閉多様体とする。3つ組 $T := (X_1, X_2, X_3)$ は以下を満たすとき、 $(g; k_1, k_2, k_3)$ -trisection と呼ばれる。ここで g, k_i ($i = 1, 2, 3$) は $0 \leq k_i \leq g$ を満たす整数である。

- $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$
- $i = 1, 2, 3$ に対し、 X_i は境界連結和 $\natural_{k_i} S^1 \times D^3$ に微分同相である。
- $i = 1, 2, 3$ に対し、 $X_i \cap X_{i+1} = \partial X_i \cap \partial X_{i+1}$ は $\natural_g S^1 \times D^2$ に微分同相である。ここで $X_4 = X_1$ である。
- $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ は向き付けられた種数 g の閉曲面 $\Sigma_g := \#_g S^1 \times S^1$ に微分同相である。

3つ組 T を trisection と呼ぶ代わりに、 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ を trisection と呼ぶこともある。定義 1.1 において、 $k_1 = k_2 = k_3 =: k$ のときは **balanced** trisection と呼ばれ、 (g, k) -trisection と表される。それ以外の場合は **unbalanced** trisection と呼ばれる。 g は trisection の **種数** と呼ばれる。 $H_\alpha := X_3 \cap X_1$, $H_\beta := X_1 \cap X_2$, $H_\gamma := X_2 \cap X_3$ に対し、 $H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma$ を **spine** という。

* 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2112 の支援を受けたものである。

trisection は spine により一意的に定まる [LP72].

例 1.2.

- 4-ball 3つによる S^4 の自然な3分割は種数 0, つまり $(0,0)$ -trisection である.
- $B_{i,j,k} := \{[z_0: z_1: z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid \|z_i\|, \|z_j\| \leq \|z_k\|\}$ とする. このとき, $\mathbb{C}P^2 = B_{0,1,2} \cup B_{2,0,1} \cup B_{1,2,0}$ は $(1,0)$ -trisection である.

3次元多様体を図示する Heegaard 図式と同様に, trisection diagram と呼ばれる, 4次元多様体を表す図式を定義することが出来る.

定義 1.3. $T = (X_1, X_2, X_3)$ を $(g; k_1, k_2, k_3)$ -trisection とし, $\Sigma = X_1 \cap X_2 \cap X_3$ とする. 4つ組 $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ は以下を満たすとき, $(g; k_1, k_2, k_3)$ -trisection diagram と呼ばれる.

- (Σ, α, β) は $\#_{k_1} S^1 \times S^2$ の Heegaard 図式である.
- (Σ, β, γ) は $\#_{k_2} S^1 \times S^2$ の Heegaard 図式である.
- (Σ, γ, α) は $\#_{k_3} S^1 \times S^2$ の Heegaard 図式である.

すなわち, それぞれの3つ組が曲面の微分同相と, 同族曲線間のハンドルスライドにより図1に移るとき, 4つ組 $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ は trisection diagram と呼ばれる. α, β, γ は全て g 本の Σ 上の単純閉曲線の組であり, 図2, 3のようにそれぞれ赤, 青, 緑で表される.

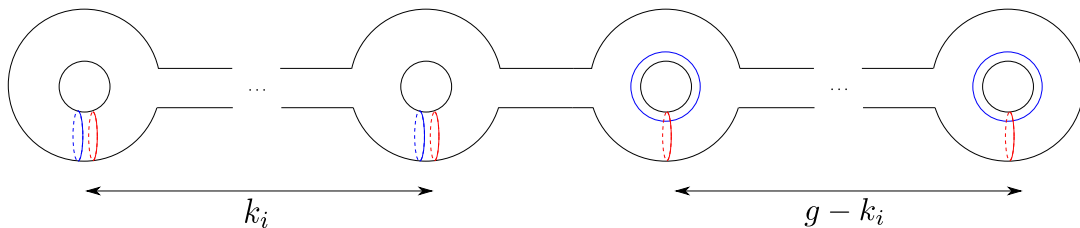


図1: $\#_{k_i} S^1 \times S^2$ の標準的な種数 g の Heegaard 図式.

例 1.4. 図2は例1.2の $\mathbb{C}P^2$ の $(1,0)$ -trisection diagram を表す.

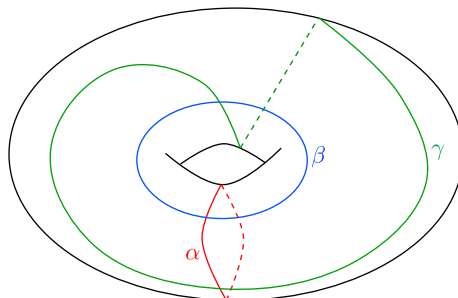


図2: $\mathbb{C}P^2$ の $(1,0)$ -trisection diagram.

定義 1.5. X を 4次元閉多様体とし, $T = (X_1, X_2, X_3), T' = (X_1', X_2', X_3')$ を X の trisection とする. X の自己微分同相写像 $h: X \rightarrow X$ で, $h(X_i) = X_i'$ を満たすものが存在するとき, T と T' は微分同相であるという. また, X の isotopy $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ で, $h_0 = id, h_1(X_i) = X_i'$ を満たすものが存在するとき, T と T' は isotopic であるという.

注意 1.6. T と T' が微分同相であることと, それぞれに対応する trisection diagram が, 曲面の微分同相写像と同族曲線間のハンドルスライドで移りあうことは同値である.

Heegaard 分解における stabilization と同様に, trisection に対して stabilization を定めることが出来る.

定義 1.7. $X = (X_1, X_2, X_3)$ を trisection とする. また, C を, $X_i \cap X_j$ にプロパーに埋め込まれた boundary parallel な arc であるとする. このとき, X_i', X_j', X_k' ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) を次のように定める.

- $X_i' = X_i - \nu(C)$
- $X_j' = X_j - \nu(C)$
- $X_k' = X_k \cup \overline{\nu(C)}$

このとき, trisection (X_1, X_2, X_3) を (X_1', X_2', X_3') に置き換える操作を k -stabilization という. ここで, (X_1', X_2', X_3') も X の trisection になることに注意する. また, stabilization の反対の操作を destabilization という.

stabilization は trisection diagram に対しても定義することが出来る.

定義 1.8. $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ を trisection diagram とする. $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ と図 3 のいずれかとの連結和をとる操作のことを, $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ の stabilization という. 左から順に, 1, 2, 3-stabilization に対応している.

図 3 は左から順に S^4 の $(1; 1, 0, 0), (1; 0, 1, 0), (1; 0, 0, 1)$ -trisection diagram を表している. $(g; k_1, k_2, k_3)$ -trisection に対して 1, 2, 3-stabilization を行って得られる trisection の type はそれぞれ $(g+1; k_1+1, k_2, k_3), (g+1; k_1, k_2+1, k_3), (g+1; k_1, k_2, k_3+1)$ である.

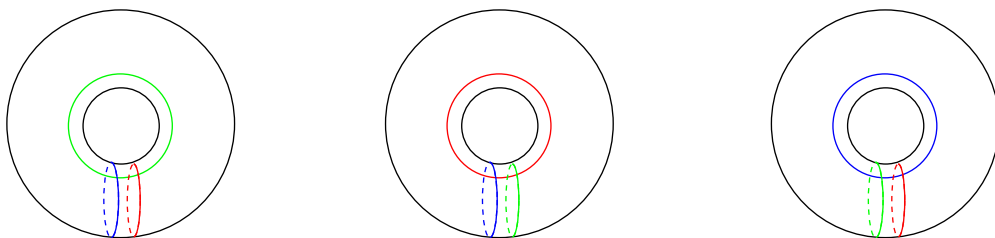


図 3: S^4 の unbalanced な種数 1 の trisection diagram

定理 1.9. 任意の 4次元閉多様体は trisection を許容する. 同じ 4次元閉多様体に対する任意の 2つ

の trisection は stably isotopic である.

すなわち, trisection は stabilization の差を除いて一意的である.

次の予想は, Heegaard 分解における Waldhausen の定理の 4 次元のアナロジーであり, **4 次元の Waldhausen 予想**と呼ばれている.

予想 1.10 ([MSZ16]). S^4 の任意の trisection は種数 0 の trisection かその stabilization に isotopic である.

注意 1.6 により, 曲面の微分同相と同族曲線間のハンドルスライドにより種数 0 の trisection diagram の stabilization に移らないような S^4 の trisection diagram が存在した場合, それは 4 次元の Waldhausen 予想に反例を与える.

上記は 4 次元閉多様体, つまり境界がない場合に対する trisection を考えていたが, 境界付き 4 次元多様体に対しても trisection は導入されており, それは **relative trisection** と呼ばれている. また, 結び目の bridge 分解の 4 次元のアナロジーとして, 曲面結び目に対する **bridge trisection** が導入されているが, 本稿ではこれらの紹介は省略する. relative trisection に関しては [Cas16, CGPC18, CO19] 等が, bridge trisection に関しては [MZ17, MZ18] 等が詳しい.

2 主結果

本章では, [Iso22] で得た結果を紹介する.

$i = 1, 2$ とする. 境界付き 4 次元多様体 X_i (簡単のため, 境界成分は連結とする) とその relative trisection T_i に対し, T_i が境界 ∂X_i に誘導する open book 分解を \mathcal{O}_i とする. このとき, \mathcal{O}_1 を \mathcal{O}_2 に移す, 向きを反対にする微分同相写像 $f: \partial X_1 \rightarrow \partial X_2$ があれば, T_1 と T_2 の貼り合わせにより, 4 次元閉多様体 $X = X_1 \cup_f X_2$ の trisection を構成することが出来る. 本章ではこれを曲面結び目の自明な切り貼りで考える.

X を 4 次元閉多様体とし, その trisection を $T_X = (X_1, X_2, X_3)$ とする. また, $S \subset X$ を曲面結び目とする. このとき, S の外部 $X - \nu(S)$ は $X_i - \nu(S)$ ($i = 1, 2, 3$) による自然な 3 分割を持つ. しかし, これは S が 2-knot でない限り relative trisection にはならない. これを改善するために, Kim-Miller [KM20] は **boundary-stabilization** と呼ばれる操作を導入した. つまり, その自然な 3 分割に boundary-stabilization を行って得られる 3 分割は S の外部の relative trisection になる. これを T_2 と表すこととする. 一方で, $\overline{\nu(S)}$ には, その relative Kirby diagram から自然に定まる relative trisection があり, これを T_1 と表すこととする. このとき, $\overline{\nu(S)}$ と $X_i - \nu(S)$ の自明な接着に対応するように T_1 と T_2 を貼り合わせることで, X の新しい trisection T_S を構成することが出来る. この自明な貼り合わせにより得られる 4 次元閉多様体は X であるため, 多様体の改変操作の観点から言えばこの操作には非自明な点はない. しかし, T_S の構成には boundary-stabilization という非自明な操作を用いているため, T_S と T_X に関しては次のような問題を考えることが出来る.

問題 2.1 ([Iso22]). T_S は T_X の stabilization に微分同相か? 特に isotopic か?

この問題に対し, 次を示した.

定理 2.2 ([Iso22]). $K \subset X$ を, normal Euler number $e(K)$ が 0 である 2-knot とし, $P_{\pm} \subset X$ を, $e(P_{\pm}) = \pm 2$ である unknotted P^2 -knot とする. そして, $S = K \# P_{\pm}$ とする. このとき, T_S は T_X の stabilization に微分同相である.

Proof. T_S に対応する trisection diagram を変形することで証明される. T_S の trisection diagram は図 4 で与えられる. □

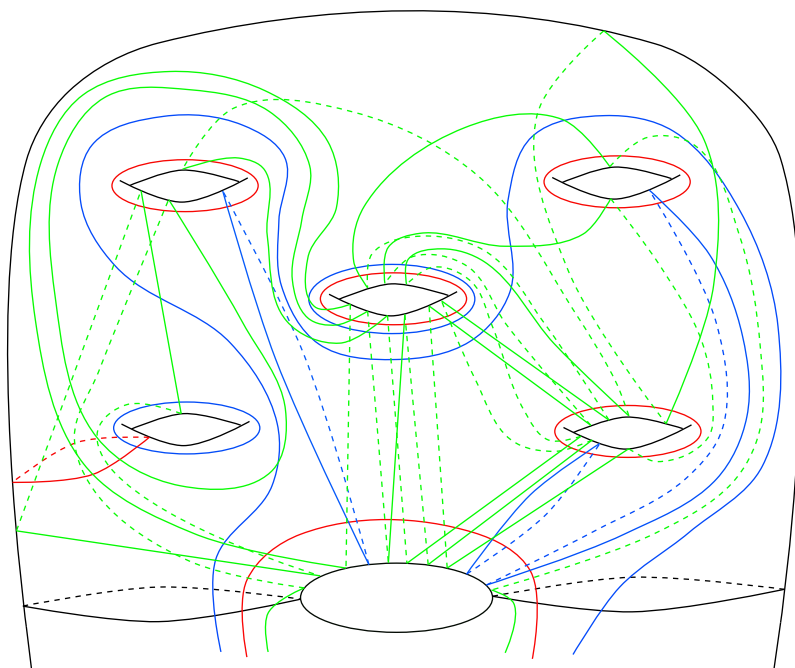


図 4: T_S の trisection diagram. 描かれていないところは, (X, K) の doubly-pointed trisection diagram から基点の開近傍を取り除いて得られる, $X - \nu(K)$ の arced relative trisection diagram を表す.

系 2.3. $X = S^4$, $S = K \# P_{\pm}$ のとき, T_S は S^4 の種数 0 の trisection に微分同相である.

もし S^4 の微分同相な任意の 2 つの trisection が isotopic であれば, 系 2.3 の T_S は 4 次元の Waldhausen 予想の主張を満たす.

系 2.3 の S は樹下型と呼ばれている P^2 -knot である. 樹下型の P^2 -knot に関して次の予想が知られている.

予想 2.4 (樹下予想). S^4 内の任意の P^2 -knot は樹下型である.

参考文献

- [Cas16] Nickolas Andres Castro, *Relative trisections of smooth 4-manifolds with boundary*, Ph.D. thesis, University of Georgia, 2016.

- [CGPC18] Nickolas A. Castro, David T. Gay, and Juanita Pinzón-Caicedo, *Diagrams for relative trisections*, Pacific J. Math. **294** (2018), no. 2, 275–305.
- [CO19] Nickolas A. Castro and Burak Ozbagci, *Trisections of 4-manifolds via Lefschetz fibrations*, Math. Res. Lett. **26** (2019), no. 2, 383–420.
- [GK16] David Gay and Robion Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 6, 3097–3132.
- [Iso22] Tsukasa Isoshima, *Trisections obtained by trivially regluing surface-knots*, 2022, arXiv:2205.04817.
- [KM20] Seungwon Kim and Maggie Miller, *Trisections of surface complements and the Price twist*, Algebr. Geom. Topol. **20** (2020), no. 1, 343–373.
- [LP72] François Laudenbach and Valentin Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 337–344.
- [MSZ16] Jeffrey Meier, Trent Schirmer, and Alexander Zupan, *Classification of trisections and the generalized property R conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 11, 4983–4997.
- [MZ17] Jeffrey Meier and Alexander Zupan, *Bridge trisections of knotted surfaces in S^4* , Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 10, 7343–7386.
- [MZ18] ———, *Bridge trisections of knotted surfaces in 4-manifolds*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **115** (2018), no. 43, 10880–10886.