Perfectoid almost Cohen-Macaulay 代数の明示的構成について

東京工業大学 理学院 数学系
石塚伶 (Ryo ISHIZUKA)

概要

与えられた Noether 環に対して、その上の non-Noether な代数の存在性や性質は可換環論において重要な役割を果たしている。このような代数の性質としてとくに perfectoid 性や almost Cohen-Macaulay 性が考えられており、正標数において完全閉包はこれらの性質を持つ。今回の講演では混標数において完全閉包の類似を構成し、perfectoid の手法を用いてそれが同じ性質を持つことを示す。本内容は下元数馬氏 (日本大学) との共同研究に基づくものである。

1 導入

本稿では環と言ったら単位的な可換環とする。また、$(R, \mathfrak{m}, k)$ を次元 d の完備 Noether 局所整域であって剰余体 k が完全であるとし、$x_1, \ldots, x_n$ を $\mathfrak{m}$ の生成元であって $x_1, \ldots, x_d$ が R の system of parameter になっているとする（[AM94] 参照)。また、R^+ を次のように定義する。

定義 1.1. R の商体の代数閉包における R の整閉包を R の**絶対整閉包**といい、これを R^+ と書く。

与えられた Noether 環に対して、その上の non-Noether な代数の存在性やその性質は Noether 環の理論においても重要な役割を果たしている。正標数において例えば次の Kunz の定理が知られている。

定理 1.2 ([Kun69]). 正標数 p の Noether 局所環 A に対して A が正則局所環であることと、標準的な射 $A \to A_{\mathrm{perf}} := \operatorname{colim}\{A \xrightarrow{F} A \xrightarrow{F} \cdots\}$ が平坦であることは同値。ただし $F\colon A \to A$ は $a \mapsto a^p$ で定まる Frobenius 射である。

この A_{perf} のことを A の**完全閉包** *(perfect closure)* と言い、A が整域のときはとくに A^+ において

$$A_{\mathrm{perf}} = \{a \in A^+ \mid \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, a^{p^n} \in A\} \tag{1}$$

と書ける。定義から明らかに A_{perf} 上の Frobenius 射は全単射である（この全単射性を環が**完全** *(perfect)* であるという)。一般に完全閉包は Noether 環であるかどうかはわからないが、このように A の非特異性を A_{perf} への射で特徴づけることができる。このような対応を混標数でも行いたいというのが目的の 1 つである。

完全閉包の大事な性質のうちの 1 つはその完全性である。そのためにまずは完全性の混標数類似

である perfectoid 性について述べる。これは P.Scholze 氏によって [Sch12] で定義され、今では数論幾何学において非常に重要な役割を果たしている。さらに Y.André 氏によって可換環論において長年の未解決問題であった直和因子予想が perfectoid の理論を用いて解決され（[And18b, And18a]）、それ以降、perfectoid は可換環論においても重要な位置を占めている。

まずは perfectoid の定義を行うが、ここでは主定理の証明に必要な範囲で定義する。p をある素数とする。

定義 1.3 ([BMS18, Shi18]). $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数 A が *perfectoid ring* であるとは、ある元 $\pi \in A$ が存在して次を満たすことである。

1. A において π^p は p を割り切る。
2. A は π-torsion free かつ π-adically complete である。
3. Frobenius 射から誘導される射 $A/\pi A \xrightarrow{F} A/\pi^p A$ は同型になる。

注意 1.4. とくに A の標数が p のときには $\pi = p = 0$ と取ることができるから、A が perfectoid ring であることと A が完全であることは同値である。このことから分かる通り、この perfectoid ring は正標数における完全性の混標数への一般化と見なすことが出来る。

また、定義だけではなく、例えば次のように Kunz の定理の混標数への一般化も行うことが出来ている。

定理 1.5 ([BIM19]). 環 A が p をその Jacobson 根基に含んでいるとする。このとき A が正則環であることと、ある perfectoid ring S への忠実平坦な射 $A \to S$ が存在することは同値である。

2 正標数において

正標数においてその完全閉包 R_{perf} は完全性だけでなく $(R, \mathfrak{m}, k)$ に対してさらに良い性質がわかっている。まずは次の用語を用意する。

定義 2.1. （正標数とは限らない）環 A の元 a の A における**整合的な p 乗根の列** *(compatible sequence of p-power roots)* $\{a^{1/p^j}\}_{j \geq 0}$ とは、$a^{1/p^0} = a$ であって任意の $j \geq 0$ で $a^{1/p^j} \in A$ かつ $(a^{1/p^{j+1}})^p = a^{1/p^j}$ であるような点列のことである。

とくに A が完全であるとすると、とくに Frobenius 射の単射性から $a \in A$ に対して $\{a^{1/p^j}\}_{j \geq 0}$ は一意的に定まる。絶対整閉包 R^+ では任意の元に対する整合的な p 乗根の列が取れていることに注意する。

定理 2.2 ([RSS07]). ここでは R は正標数であるとし、さらに R^+ における整合的な p 乗根の列 $\{x_1^{1/p^j}\}_{j \geq 0}, \ldots, \{x_n^{1/p^j}\}_{j \geq 0}$ を取る。このとき R の完全閉包 R_{perf} は

$$R_{\mathrm{perf}} = \bigcup_{j \geq 0} R[x_1^{1/p^j}, \ldots, x_n^{1/p^j}] \tag{2}$$

となる。さらにある $g \in R_{\mathrm{perf}}$ と、その整合的な p 乗根の列 $\{g^{1/p^j}\}_{j \geq 0}$ が R_{perf} に存在して R_{perf}

は $x_1,\dots,x_d$ に関して $(g)^{1/p^\infty}$-almost Cohen-Macaulay algebra になる。

ただし、almost Cohen-Macaulay algebra とは次で定義されているものである。これは Cohen-Macaulay 性の almost mathematics における類似である（[RSS07, GR03] 参照)。

定義 2.3. R 代数 A がある元 $\pi \in A$ に対して、整合的な p 乗根の列 $\{\pi^{1/p^j}\}_{j\geq 0}$ を持っているとする。このとき A 加群 M が $x_1,\dots,x_d$ に関して $(\pi)^{1/p^\infty}$*-almost Cohen-Macaulay algebra* であるとは、次の 2 条件をみたすことである。

1. 各 $1 \leq k \leq d$ について
$$(\pi)^{1/p^j} \cdot \frac{((x_1,\dots,x_k)M :_M x_{k+1})}{(x_1,\dots,x_k)M} = 0 \tag{3}$$
が任意の $j \geq 0$ に対して成り立つ。
2. 剰余加群 $M/\mathfrak{m}M$ がある $j \geq 0$ に対して $\pi^{1/p^j} \cdot M/\mathfrak{m}M \neq 0$ となる。

以上より、正標数において R から標準的に作られる Noether 環とは限らない環 R_{perf} は完全かつ almost Cohen-Macaulay algebra という良い性質を持っていることがわかる。ただし、この定義には正標数においてしか環準同型にならない Frobenius 射 F を用いているため、混標数でそのまま同じように構成することは難しい。

そこで、R_{perf} と一致する式 (2) の右辺は標数によらず構成することができることに着目した。これと同様の構成を混標数でも行えるが、[IS] では以下の通りそれが正標数における性質の類似、つまり perfectoid かつ almost Cohen-Macaulay を持つことを示した（定理 3.3)。

3 主定理

まず、主定理の証明で本質的に用いる操作である perfectoid ring に対する tilt を定義する。実際、perfectoid ring の構造の利点の 1 つはこの tilt によって混標数から正標数へ移行できることにある。なお、正標数から混標数に戻る untilt という操作もあり、これらによって adic space の間の同相や étale site の同型が示される（[Sch12]）が、今回の発表では使用しないため詳細は省く（[BMS18] 参照)。

定義 3.1 ([BMS18]). A を perfectoid ring とする。このとき A の *tilt* とは
$$A^\flat := \lim\{\cdots \xrightarrow{F} A/\pi A \xrightarrow{F} A/\pi A\} \tag{4}$$
のことである。とくにこれは完全な正標数の環になる。また、第 1 成分の射影を $\sharp\colon A^\flat \to A/pA$ と定義する。

命題 3.2. 上で定義した tilt $A^\flat$ について、ある $\pi^\flat \in A^\flat$ が存在して $\sharp(\pi^\flat) = \pi \in A$ となる。さらに $\sharp$ によって（正標数の環同士の）同型
$$\sharp\colon A^\flat/\pi^\flat A^\flat \xrightarrow{\cong} A/\pi A \tag{5}$$
が誘導される。

上述した通り、正標数の場合の定理 2.2 とほとんど同様に混標数において構成したものが、求める性質を満たしていることを示したのが [IS] の主定理である次の定理である。

定理 3.3 ([IS]). ここでは R を混標数 $(0,p)$ であり $x_1 = p$ と取れているとする。定理 2.2 と同様に $\{p^{1/p^j}\}_{j\geq 0}, \ldots, \{x_n^{1/p^j}\}_{j\geq 0}$ を固定する。このとき $\widetilde{R}_\infty$ (resp. $C(R_\infty)$) を

$$R_\infty := \bigcup_{j\geq 0} R[p^{1/p^j}, \ldots, x_n^{1/p^j}] \tag{6}$$

の $R_\infty[1/p]$ での整閉包 (resp. p-root closure) とする。それぞれの p 進完備化 $\widehat{R}_\infty$ と $\widehat{\widetilde{R}}_\infty$ と $\widehat{C(R_\infty)}$ について、ある非零な $g \in \widehat{R}_\infty$ とその整合的な p 乗根の列 $\{g^{1/p^j}\}_{j\geq 0} \subset \widehat{R}_\infty$ が存在し、次を満たす。

1. 標準的な射 $\varphi\colon \widehat{R}_\infty \to \widehat{\widetilde{R}}_\infty$ について、任意の $n > 0$ で $p^{1/p^n} \cdot \mathrm{Coker}(\varphi) = 0$ となる（すなわち φ は $(p)^{1/p^\infty}$-almost surjective になる)。
2. $\widehat{\widetilde{R}}_\infty$ は perfectoid な整域であり R^+ の p 進完備化 $\widehat{R^+}$ の部分環になる。さらに g の $\widehat{\widetilde{R}}_\infty$ への像は非零である。
3. $\widehat{\widetilde{R}}_\infty$ と $\widehat{C(R_\infty)}$ は $p, x_2, \ldots, x_d$ に関して $(pg)^{1/p^\infty}$-almost Cohen-Macaulay algebra である。
4. もし R が整閉整域であったとすると、ある不分岐な完備正則局所環 A とその非零元 h が存在して $\widetilde{R}_\infty$ は A 上の整拡大になり、$A[1/h] \to \widetilde{R}_\infty[1/h]$ は $\widetilde{R}_\infty[1/h]$ に含まれる有限 étale な $A[1/h]$ 代数の順極限と一致する。

それぞれについて証明の方針を述べる。

Proof.

1. 一様完備化という操作を行い、[BCK19, Lemma 2.9.12 page at 120] を用いる。
2. R_∞ の $R_\infty[1/p]$ での p-root closure $C(R_\infty)$ が perfectoid であることと、自然な包含写像 $C(R_\infty) \hookrightarrow \widetilde{R}_\infty$ が $(p)^{1/p^\infty}$-almost surjective になることを示す。この 2 つから perfectoid であることがわかり、整域であることは [Hei22] によって $\widehat{R^+}$ が整域になっていることから従う。
3. 正標数へ tilt を取って移行し、そこである完備 Noether 局所整域の完全閉包との間に almost isomorphism があることを示し、定理 2.2 と定理 3.2 を利用する。
4. $\widetilde{R}_\infty$ が $R_k := R[p^{1/p^k}, x_2^{1/p^k}, \ldots, x_n^{1/p^k}]$ の $R_k[1/p]$ での整閉包の順極限になることを用いる。

□

参考文献

[AM94] Michael. F. Atiyah and Ian. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, February 1994.

[And18a] Yves André, *La conjecture du facteur direct*, Publ.math.IHES **127** (2018), no. 1, 71–93.

[And18b] ———, *Le lemme d'Abhyankar perfectoide*, Publ.math.IHES **127** (2018), no. 1, 1–70.

[BCK19] Bhargav Bhatt, Bryden Cais, and Kiran S Kedlaya, *Perfectoid spaces: Lectures from the 2017 Arizona Winter School*, Mathematical Surveys and Monographs, no. volume 242, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2019.

[BIM19] Bhargav Bhatt, Srikanth B. Iyengar, and Linquan Ma, *Regular rings and perfect(oid) algebras*, Communications in Algebra **47** (2019), no. 6, 2367–2383.

[BMS18] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze, *Integral p-adic Hodge theory*, Publ.math.IHES **128** (2018), no. 1, 219–397.

[GR03] Ofer Gabber and Lorenzo Ramero, *Almost Ring Theory*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.

[Hei22] Raymond C. Heitmann, *$R+$ ˆ is surprisingly an integral domain*, Journal of Pure and Applied Algebra **226** (2022), no. 1, 106809.

[IS] Ryo Ishizuka and Kazuma Shimomoto, *A mixed characteristic analogue of the perfection of rings and its almost Cohen-Macaulay property*, 24, In preparation.

[Kun69] Ernst Kunz, *Characterizations of Regular Local Rings of Characteristic p*, American Journal of Mathematics **91** (1969), no. 3, 772–784.

[RSS07] Paul Roberts, Anurag K. Singh, and V. Srinivas, *Annihilators of local cohomology in characteristic zero*, Illinois Journal of Mathematics **51** (2007), no. 1, 237–254.

[Sch12] Peter Scholze, *Perfectoid Spaces*, Publ.math.IHES **116** (2012), no. 1, 245–313.

[Shi18] Kazuma Shimomoto, *Integral perfectoid big Cohen–Macaulay algebras via André's theorem*, Math. Ann. **372** (2018), no. 3, 1167–1188.