非アルキメデス的関数解析におけるコンパクト性

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
石塚康介 (Kosuke ISHIZUKA)

概要

一般に完備非アルキメデス的付値体は局所コンパクトでないため, 通常のコンパクト性は非アルキメデス的関数解析において, 一般論を記述するのにふさわしくない. コンパクト性の代替物としてコンパクトイドという概念が, Gruson と van der Put によって導入され, van Rooij や Schikhof などによってコンパクトイドが研究された. 本稿では, コンパクトイド性の一種である局所コンパクトイドについて得られた結果を紹介する.

1 導入

非アルキメデス的関数解析とは, 係数体が (完備) 非アルキメデス的付値体であるような関数解析のことをいう. 付値は三角不等式を満たすため, 古典的な場合 (係数体が実数体, 複素数体である関数解析) と同様に, 開写像原理, 一様有界性原理などは非アルキメデス的関数解析においても成り立つ. しかし, 非アルキメデス的付値体は, 局所コンパクトではない, 強三角不等式と呼ばれる次の不等式

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$$

を満たすなど, 実数体, 複素数体と異なる特徴をもつため, 非アルキメデス的関数解析特有の現象が起きることがある. 例えば, ハーン-バナッハの定理は, 非アルキメデス的関数解析においては一般に成立しない. このような事情から, 非アルキメデス的関数解析の研究では, 古典的な概念と類似した概念を, まず定義し, そして古典的な場合との違いを調べるということが一つのテーマとなる.

そのような研究テーマの中に, コンパクト性の類似であるコンパクトイドというものがある. 既に述べた通り, 非アルキメデス的付値体は一般に局所コンパクトではない. よって, 古典的なコンパクト作用素などの概念を, 非アルキメデス的関数解析に導入したところで, その概念が機能するはずがない. ゆえに, 通常のコンパクト性は非アルキメデス的関数解析において一般論を記述するのにふさわしくないといえる. そこで, コンパクト性の代替物であるコンパクトイドを扱う. コンパクトイドは 1974 年に Gruson と van der Put によって導入された概念であり, 主に van Rooij や Schikhof によって研究された. 本稿では, コンパクトイドを更に拡張した概念である局所コンパクトイドについて得られた結果を報告する.

2 コンパクトイドの概説

K は非自明な付値 $|\cdot| : K \to [0, \infty)$ による, 完備非アルキメデス的付値体とする. $B_K := \{x \in K : |x| \leq 1\}$ によって K の整数環を表す. まず, 局所凸空間を導入する. 局所凸空間は非アルキメデ

ス的関数解析における基本的な対象である.

定義 2.1. E を K 上のベクトル空間, $\mathcal{P}$ を E 上のセミノルムの族とする. $\mathcal{P}$ が生成する E 上の局所凸位相とは, 0 の基本近傍系が

$$\left\{\{x \in E : \max_{1\leq i\leq n} p_i(x) \leq r\} : n \in \mathbb{N},\, p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{P},\, r > 0\right\}$$

で与えられる K 上の位相的ベクトル空間としての位相である. このような位相を備えた位相的ベクトル空間 E を局所凸空間という.

断らない限り, E は局所凸空間を表すことにする. また慣習的な理由から B_K-加群 $A \subseteq E$ を絶対凸集合とよぶことにする. コンパクトイドを導入する前に, コンパクトの定義を復習しておく. 通常のコンパクトの定義ではなく, 位相群である E に埋め込まれた集合のコンパクト性を確認する:

$X \subseteq E$ がコンパクトであるとは, 任意の 0 の近傍 U に対して, $a_1, \cdots, a_n \in E$ が存在して, $X \subseteq U + \{a_1, \cdots, a_n\}$ を満たすことをいう.

さて, コンパクトイドを導入するが, 上に述べたコンパクトの定義と比較するとよい.

定義 2.2. $X \subseteq E$ がコンパクトイドであるとは, 任意の 0 の近傍 U に対して, $a_1, \cdots, a_n \in E$ で, $X \subseteq U + \mathrm{aco}\{a_1, \cdots, a_n\}$ を満たすものが存在するときにいう. ここで, $Y \subseteq E$ に対して, $\mathrm{aco}Y$ は Y で生成される絶対凸集合である.

注意 2.3. 一般に B_K はコンパクトではないが, コンパクトイドであることは明らかである. コンパクトイドを用いることで, 古典的な関数解析におけるコンパクト性による議論を, 非アルキメデス的関数解析においても展開することができる.

コンパクトイドの定義のなかで一つだけ留意すべき点がある. それは, $a_1, \cdots, a_n$ という有限個の元を, X ではなく E から選ぶという点である. 何が問題かというと, コンパクト性は位相的な性質であるため埋め込みによらないが, コンパクトイドという性質の「埋め込み」への依存性は, 定義から直ちに分かることではないということである. コンパクトイドの定義は, B_K-加群的な性質によるので「埋め込み」によらないとは, B_K-加群の同型によらないと考えることが適切である. 問題点をまとめると次のようになる:

絶対凸集合 $A \subseteq E$ がコンパクトイドとする. 局所凸空間 F と, 絶対凸集合 $B \subseteq F$ に対して, 位相的 B_K-加群の同型 $\phi\colon A \to B$ があるとする. このとき, $B \subseteq F$ はコンパクトイドであるか?

この問題に対しては, 次の定理により肯定的に解決される.

定理 2.4 ([2], 3.8.9)**.** $X \subseteq E$ をコンパクトイドとする. このとき次が成り立つ:
(1) K の付値が離散的であるときは, 任意の 0 の近傍 U に対して, 有限集合 $G \subseteq X$ で, $X \subseteq U + \mathrm{aco}G$ を満たすものが存在する.
(2) K の付値は稠密で, $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ とする. このとき, 任意の 0 の近傍 U に対して, 有限集合 $G \subseteq \lambda X$ で, $X \subseteq U + \mathrm{aco}G$ を満たすものが存在する.

続いて, 局所コンパクトイドを導入する.

定義 2.5. $X \subseteq E$ が E で局所コンパクトイドであるとは, 任意の 0 の近傍 U に対して, $a_1, \cdots, a_n \in$

E で, $X \subseteq U + [a_1, \cdots, a_n]$ を満たすものが存在するときにいう. ここで, $Y \subseteq E$ に対して, $[Y]$ は Y で生成される部分空間である.

コンパクトイドと違い, 局所コンパクトイドは埋め込みによることが知られている. 反例を紹介する前に記号を導入する. 添え字集合 I に対して,

$$c_0(I) := \{(x_i)_{i \in I} \in K^I : \text{任意の}\, \epsilon > 0 \,\text{に対し, 有限個の}\, i \in I \,\text{を除いて}\, |x_i| \leq \epsilon\},$$

とする. $I = \mathbb{N}$ のときは I を省略して, $c_0 := c_0(\mathbb{N})$ と書くことがある. $c_0(I)$ 上のノルムを, $\|(x_i)_{i \in I}\| := \sup_I |x_i|$ で定める.

例 2.6 ([3], 3.6)**.** $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ とする. $(c_0, \|\cdot\|)$ の元 $f_1, f_2, \cdots$ を

$$f_1 := (\lambda, \lambda^{-1}, 0, 0, \cdots),\ f_2 := (\lambda^2, 0, \lambda^{-2}, 0, 0, \cdots),\ \cdots\cdots \in c_0$$

と定める. このとき, $A := \mathrm{aco}\{f_1, f_2, \cdots\}$ は $(c_0, \|\cdot\|)$ で局所コンパクトイドであるが, $[A]$ で局所コンパクトイドではない.

局所コンパクトイドは埋め込みによることが分かったが, 局所コンパクトイドに完備性を課すと, この問題点は克服される. まず, 完備局所コンパクトイドの性質をいくつか紹介する.

定理 2.7 ([3], 2.3)**.** $A \subseteq E$ を完備な絶対凸集合で E で局所コンパクトイドであるとする. D を A に含まれる最大の部分空間とするとき, コンパクトイド $B \subseteq A$ が存在して, 包含写像から誘導される写像 $D \times B \to A$ は同相写像である.

定理 2.8 ([3], 3.4)**.** $A \subseteq E$ を完備な絶対凸集合で E で局所コンパクトイドであるとする. このとき次が成り立つ.
(1) K の付値が離散的であるときは, 任意の 0 の近傍 U に対して, 有限集合 $G \subseteq A$ と, 有限次元部分空間 $D \subseteq A$ で, $A \subseteq U + \mathrm{aco}G + D$ を満たすものが存在する.
(2) K の付値は稠密で, $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ とする. このとき, 任意の 0 の近傍 U に対して, 有限集合 $G \subseteq \lambda A$ と, 有限次元部分空間 $D \subseteq A$ で, $A \subseteq U + \mathrm{aco}G + D$ を満たすものが存在する.

[3] では, 定理 2.8 によって完備局所コンパクトイドの局所コンパクトイド性は埋め込みによらないことが指摘されている. 定理 2.7, 2.8 に対して次の考察をした.

考察

(1) 完備局所コンパクトイドはコンパクトイドと有限型空間の和である. ここで, 局所凸空間 F が有限型であるとは, F 上の任意の連続なセミノルム p に対して, $F/\{p = 0\}$ が有限次元空間であることをいう.
(2) コンパクトイド性は埋め込みによらず, また有限型空間も埋め込みによらないので, コンパクトイドと有限型空間の和である局所コンパクトイドは, 埋め込みによらず局所コンパクトイドである.

考察 (1) では, 完備性が本質的であるが, 完備性を課さなくても同様のことが成立すると考え, 次の問題を提起した.

問題 1. $X \subseteq E$ を E で局所コンパクトイドであるとする. このとき, コンパクトイド $B \subseteq E$ と, 有限型空間 $F \subseteq E$ が存在して, $X \subseteq B + F$ となるか?

考察 (2) から分かるように, コンパクトイドと有限型空間の和である局所コンパクトイドは扱いやすいので, 十分条件について考えた.

問題 2. 局所コンパクトイドが, コンパクトイドと有限型空間の和である十分条件はどのようなものがあるか?

定理 2.7 によると, 完備であることは十分条件であるといえる.

3 主結果

本稿における主な結果は, 定理 3.1, 例 3.3, 定理 3.4 である.
まず, 問題 1 に対しては, 部分的な結果を得た.

定理 3.1 ([1], 3.1)**.** $(E, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $X \subseteq E$ を E で局所コンパクトイドである集合とする. このとき, コンパクトイド $B \subseteq E$ と, 有次元部分空間 $F \subseteq E$ が存在して, $X \subseteq B + F$ を満たす.

全体空間が一般の局所凸空間である場合は未解決である.
次に, 問題 2 について考える. 例 2.6 によると, 局所コンパクトイド A で, $[A]$ では局所コンパクトイドではない集合が存在した. そこで, 逆に $[A]$ で局所コンパクトイドである A が良い性質を持つかどうかを考察してみたが, そのような A で, コンパクトイドと有限型空間の和でないものが存在することが分かった.

例 3.2. $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ とする. $(c_0, \|\cdot\|)$ の元 $f_1, f_2, \cdots$ を

$$f_1 := (\lambda, \lambda^{-1}, 0, 0, \cdots),\ f_2 := (\lambda^2, 0, \lambda^{-2}, 0, \cdots),\ \cdots\cdots \in c_0$$

と定める. また, $e_1 := (1, 0, \cdots) \in c_0$ とする. このとき, $A := \mathrm{aco}\{e_1, f_1, f_2, \cdots\}$ は $[A]$ で局所コンパクトイドであるが, コンパクトイドと有限型空間の和でない.

Proof. $A \subseteq [e_1] + \{(x_n)_n \in [A] : |x_n| \le |\lambda|^{-(n-1)}\}$ より, A は $[A]$ で局所コンパクトイドである. また, 第一成分への射影を考えると, A はコンパクトイドと有限型空間の和でないことが分かる. □

考察 (2) によるとコンパクトイドと有限型空間の和である局所コンパクトイドは, 埋め込みによらず局所コンパクトイドであった. 逆が成り立つかどうかを考える. すなわち, 埋め込みによらず局所コンパクトイドである場合, コンパクトイドと有限型空間の和であるかということである. 上の例の A は, 埋め込みによらず局所コンパクトイドかどうかを調べることが容易ではない. しかし, 次の例ではその問題を解決できる. 次の例は [1], Example 3.3 を改良して得られた.

例 3.3. $I := \mathbb{N} \amalg \mathbb{N}^2 \amalg \{\omega\}$, $(E, \|\cdot\|) := (c_0(I), \|\cdot\|)$ とする. また, $\alpha \in I$ について, e_α を α 成分のみが 1 であるベクトルとする. $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ を 1 つ固定する. 絶対凸集合 $A \subseteq E$ を,

$$A := \mathrm{aco}\{e_\omega\} + \mathrm{aco}\{\lambda^n e_\omega + \lambda^{-n} e_n : n \in \mathbb{N}\} + \mathrm{aco}\{\lambda^{-n} e_n + \lambda^{-j} e_{(n,j)} : n, j \in \mathbb{N}\}$$

と定める．ここで, $(n,j)\in\mathbb{N}^2$ である．このとき, A は埋め込みによらず局所コンパクトイドであるが, コンパクトイドと有限型空間の和でない.

問題 2 に対する十分条件とし, 次の定理を示した.

定理 3.4 ([1], 3.4)**.** $(E,\|\cdot\|)$ をノルム空間, $A\subseteq E$ を E で局所コンパクトイドである絶対凸集合とする．このとき, $[A]$ がバナッハ空間であれば, $[A]$ は有限次元空間である.

系 3.5 ([1], 3.5)**.** $(E,\|\cdot\|)$ をノルム空間, $A\subseteq E$ を E で局所コンパクトイドである絶対凸集合とする．このとき, $[A]$ がバナッハ空間であれば, コンパクトイドと有限型空間の和である.

参考文献

[1] K. Ishizuka, Some compact-like properties in non-archimedean functional analysis, arXiv preprint arXiv:2207.13476v2 (2022).

[2] C. Perez-Garcia, W.H. Schikhof, Locally convex spaces over non-archimedean valued fields, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 119. Cambridge University Press, Cambridge (2010).

[3] W.H. Schikhof, p-Adic local compactoids, Report 8802, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands (1987).