

# ポテンシャルのついた非線形消散クライン・ゴールドン方程式の大域挙動

京都大学理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系  
石塚健二郎 (Kenjiro ISHIZUKA)

## 概要

非線形消散クライン・ゴールドン方程式に対してポテンシャルのついた場合を考える。ポテンシャルのついていない場合においてはソリトンと呼ばれる波の形が単純で、Cote-Martel-Yuan(2021) によって解の時間無限大での漸近挙動が完全にわかっている。一方、ポテンシャルがついた場合はそのポテンシャルの影響でソリトンの形が多様化して解析が困難になる。本講演ではポテンシャルのついた場合での解の時間無限大での解の漸近挙動のパターンについて考察する。

## 1 導入

本講演では次の Dirac のデルタ関数をポテンシャルに持つ非線形消散クライン・ゴールドン方程式について考える。

$$\partial_t^2 u + 2\alpha \partial_t u - \partial_x^2 u + u - \gamma \delta_0 u - |u|^{p-1} u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (1)$$

ここで  $\alpha > 0, \gamma < 2, p > 2$  とする。 $\delta_0$  は原点で特異な Dirac のデルタ関数である。また、 $u$  は実数値の未知関数とする。

(1) の  $\alpha = 0$  での初期値問題は [1] によって  $\mathcal{H} := H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$  で局所適切であることがわかっている。この手法と同様の作業をすると、 $\alpha > 0$  の場合でも  $\mathcal{H}$  で初期値問題が局所適切になることがわかる。即ち、以下が成立する。

- 任意の  $\varphi \in \mathcal{H}$  に対して、初期値  $\varphi$  の (1) の解が一意的に存在する。
- (Blow up alternative) 解  $\vec{u}$  が (正の方向に) 大域解でないならその最大存在時刻を  $T_{\max}$  とすると

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max} - 0} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} = \infty.$$

- 上の主張から  $\varphi \in \mathcal{H}$  に対して初期値  $\varphi$  での (1) の解の最大存在時刻を  $T_{\max}(\varphi) \in [0, \infty]$  とおくと  $T_{\max}$  は下半連続である。さらに、もし  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$  がある  $\varphi \in \mathcal{H}$  に収束するとき、 $T < T_{\max}(\varphi)$  に対して、 $u_n$  を初期値  $\varphi_n$  の (1) の解、 $u$  を初期値  $\varphi$  の (1) の解とすると  $u_n \rightarrow u$  in  $C([0, T], \mathcal{H})$  ( $n \rightarrow \infty$ ) となる。

また, エネルギー関数  $E_\gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$E_\gamma(u, v) = \frac{1}{2}(\|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{L^2}^2 - \gamma|u(0)|^2) - \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

とすると,(1) の解  $\vec{u}$  に対して

$$\frac{d}{dt}E_\gamma(\vec{u}(t)) = -2\alpha\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 \quad (2)$$

が成立する. また,  $|\gamma| < 2$  に対して  $Q_\gamma$  を

$$Q_\gamma(x) := \left[ \frac{p+1}{2\cosh^2\left\{\frac{p-1}{2}|x| + \tanh^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right\}} \right]^{\frac{1}{p-1}}$$

と定義すると,  $Q_\gamma$  は (1) の定常解

$$-Q_\gamma'' + Q_\gamma - \gamma\delta_0 Q_\gamma - |Q_\gamma|^p = 0$$

を  $H^{-1}(\mathbb{R})$  の意味で満たす.

(1) に関して,  $\gamma = 0$  の場合は Côte-Martel-Yuan [2] によって (1) の大域解  $\vec{u} = (u, \partial_t u)$  はある非負整数  $K$  と  $\sigma \in \{\pm 1\}$  と連続関数  $z_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  が存在し,

$$\vec{u}(t) = \sigma \sum_{k=1}^K (-1)^k (Q(\cdot - z_k(t)), 0) + o(1) \text{ in } \mathcal{H} \quad (t \rightarrow \infty)$$

と表せることが示された. ただし  $Q(x) = Q_0(x)$  としていて,  $z_k$  に関しては  $i < j$  なら  $t \rightarrow \infty$  で  $z_j(t) - z_i(t) \rightarrow \infty$  となる.

## 2 着想

まず着想について話す.  $K_\gamma, J_\gamma : H^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\begin{aligned} K_\gamma(v) &:= \|v\|_{H^1}^2 - \gamma|v(0)|^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ J_\gamma(v) &:= \frac{1}{2}(\|v\|_{H^1}^2 - \gamma|v(0)|^2) - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \end{aligned}$$

と定義する. さらに  $d_\gamma$  を

$$d_\gamma := \inf\{J_\gamma(v) : v \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, K_\gamma(v) = 0\}$$

と定義する. このとき Fukuizumi-Jeanjean[3] によると,  $\gamma \geq 0$  のときは  $v = Q_\gamma$  のときに

$$d_\gamma = J_\gamma(Q_\gamma), K_\gamma(Q_\gamma) = 0$$

が成立する. すなわち,  $Q_\gamma$  が  $K_\gamma$  が 0 となる状態の中で  $J_\gamma$  が最小となる関数であることを意味する. 一方,  $\gamma < 0$  のときは

$$d_\gamma = d_0$$

が成立し, さらにこのとき最小値となる  $v \in H^1(\mathbb{R})$  は存在しない. 即ち

$$d_\gamma = J_\gamma(v), K_\gamma(v) = 0$$

となる  $v$  は存在しない (これも [3] に載っている). これはデルタポテンシャルの反発的な力によって無限遠方に  $Q$  が逃げていくイメージである.

また,  $d_\gamma$  を変分的に定義しているため, 基底状態より下では  $K_\gamma$  の符号によって解が 0 に収束するか, 爆発解になるかを分類することが予想できる. これは古くからある議論で,  $d_\gamma$  より下の範囲では解の大域挙動は研究されてきた. また, Krieger-Nakanishi-Schlag[4] の議論では,  $\alpha = 0, \gamma = 0, p > 5$  の偶関数のときに解のエネルギーが  $d_\gamma$  を上回った場合でも位相的な議論を用いることで, 解が

- 0 に散乱する解 (消散効果がないので 0 に収束する解に対応する解となっている)
- 爆発解
- 基底状態  $Q$  に散乱する解

のいずれかになることが示された. このような研究内容から,  $\alpha > 0, \gamma \neq 0$  の場合でも位相的議論を用いることで (1) の解で

$$\bar{u}(t) = (Q(\cdot - z(t)), 0) + o(1) \text{ in } \mathcal{H}, z(t) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

となるような解が存在するのではないかと着目した.

また, 偶関数に制限して同様のことを考える.

$$r_\gamma = \inf\{J_\gamma(v) : v \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, v(x) = v(-x), K_\gamma(v) = 0\}$$

と定義する. このとき  $r_\gamma$  は  $-2 < \gamma < 2$  のときは

$$r_\gamma = J_\gamma(Q_\gamma)$$

が成立する. そして  $\gamma \leq -2$  のときは

$$r_\gamma = 2d_0$$

が成立し, さらに最小値となる偶関数  $v \in H^1(\mathbb{R})$  は存在しない (これも [3] に記載). よって  $\gamma < -2$  の偶関数の場合も位相的な議論を用いることで

$$\bar{u}(t) = (Q(\cdot - z(t)), 0) + (Q(\cdot + z(t)), 0)o(1) \text{ in } \mathcal{H}, z(t) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

となる解が存在することが期待できる. 特にこのような解は  $\gamma = 0$  のときは存在しなかった解なので, ポテンシャルの影響を含んだ解の時間無限大での挙動が期待できる.

### 3 主定理

これらの背景を踏まえて, (1) に関する基本的な性質を整備し, 以下の主張を得た.

**定理 3.1.**  $\bar{u}$  を (1) の大域解とする. このときある非負整数  $K$  と  $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $\{\sigma_k\}_{k \in \{1, 2, \dots, K\}} \subset \{-1, 1\}^K$  と連続関数  $z_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} (1 \leq k \leq K)$  が存在して以下が成立する.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - \sigma Q_\gamma - \sum_{k=1}^K \sigma_k Q(\cdot - z_k(t))\|_{H^1} + \|\partial_t u(t)\|_{L^2} = 0$$

$$1 \leq k \leq K \text{ で } \lim_{t \rightarrow \infty} |z_k(t)| = \infty, \quad 1 \leq k \leq K-1 \text{ で } \lim_{t \rightarrow \infty} \{z_{k+1}(t) - z_k(t)\} = \infty$$

**注意 3.2.**  $\gamma \leq -2$  のときは  $Q_\gamma$  が存在しないが, このとき  $\sigma = 0$  と考えることで差支えない.

## 4 準備

### 4.1 (1) の大域有界性

ここからは主定理の証明を記していく。(1) はデルタポテンシャルの影響により原点での値がエネルギーの値に影響を与えているが、ノルムとしては以下のように評価ができる。

**命題 4.1.**  $\gamma < 2$  のとき, ある  $C_\gamma > 1$  が存在して任意の  $u \in H^1(\mathbb{R})$  に対して以下が成立する.

$$C_\gamma^{-1} \|u\|_{H^1}^2 \leq \|u\|_{H^1}^2 - \gamma |u(0)|^2 \leq C_\gamma \|u\|_{H^1}^2$$

**証明.** [2] の lemma2.3 を参照. □

この主張より  $\|u\|_{H^1}^2 - \gamma |u(0)|^2$  が  $H^1(\mathbb{R})$  と同値になる. これを用いて以下を示す.

**命題 4.2.** ある  $F(0) = 0$  となる連続関数  $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  が存在して以下が成立する.

$\vec{u}$  が (1) の大域解ならば以下が成立する.

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq F(\|\vec{u}(0)\|_{\mathcal{H}})$$

**証明.**  $M, W, V : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \\ W(t) &= \frac{1}{2} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ V(t) &= W(t) - \frac{\gamma}{2} |u(t, 0)|^2 \end{aligned}$$

とする. このとき  $\gamma < 2$  なら

$$V(t) \sim W(t)$$

が成立することに注意する. ここで

$$\begin{aligned} M'(t) &= \int u(t) \partial_t u(t) dx + \alpha \|u(t)\|_{L^2}^2 \\ &= \int u(t) \partial_t u(t) dx + 2\alpha \int_0^t \int u(s) \partial_t u(s) dx ds + \alpha \|u(0)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

で,  $E(t) := E(\vec{u}(t))$  とすると

$$\begin{aligned} M''(t) &= \|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 - (\|u(t)\|_{H^1}^2 - \gamma |u(t, 0)|^2) + \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &= \frac{p+3}{2} \|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{p-1}{2} (\|u(t)\|_{H^1}^2 - \gamma |u(t, 0)|^2) - (p+1)E(t) \\ V'(t) &= -2\alpha \|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \int f(u(t)) \partial_t u(t) dx \end{aligned}$$

が成立する. これらの式を [2] と同様の議論で解析すると導ける.

□

## 4.2 コンパクト性の議論

次にコンパクト性の議論でソリトン分解に関する命題を示す.

**命題 4.3.**  $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset H^1(\mathbb{R})$  が  $H^1(\mathbb{R})$  で有界で

$$-\partial_x^2 u_n + u_n - \gamma \delta_0(x) u_n - f(u_n) \rightarrow 0 \text{ in } H^{-1}(\mathbb{R}) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3)$$

が成立すると仮定する. このとき  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  の部分列  $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset \{u_n\}_{n=1}^\infty$  と  $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$  とある非負整数  $K, \{\sigma_k\}_{1 \leq k \leq K} \subset \{-1, 1\}^K, \{x_{k,n}\}_{1 \leq k \leq K, n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  が存在して以下が成立する.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - \sigma Q_\gamma - \sum_{k=1}^K \sigma_k Q(\cdot - x_{k,n})\|_{H^1} = 0$
- $1 \leq k \leq K$  で  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{k,n}| = \infty$  が成立. さらに  $1 \leq k \leq K-1$  で  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_{k+1,n} - x_{k,n}\} = \infty$  が成立する.

証明に入る前に,  $\psi \in H^{-1}(\mathbb{R})$  に  $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  を代入した値を  $\langle \psi, \varphi \rangle$  と記すことに注意する.

**証明.**  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  が  $H^1$  で有界なので  $\{J_\gamma(u_n)\}_{n=1}^\infty$  も有界である. それゆえ  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  をうまく取り替えるとある  $\kappa \in [0, \infty)$  が存在して  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_\gamma(u_n) = \kappa$  が成立する. また, (3) より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_\gamma(u_n) = 0$  なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \frac{p+1}{p-1} \{2J_\gamma(u_n) - K_\gamma(u_n)\} = \frac{2(p+1)}{p-1} \kappa$$

が成立する. この式より  $\kappa \geq 0$  となり, さらにこのとき  $\kappa = 0$  なら  $K = 0, \sigma = 0$  の場合として題意を満たすので, 以後  $\kappa > 0$  を考える. このとき Lieb のコンパクト性定理より  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  をうまく取り替えると, ある  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  と  $u \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  が存在して  $n \rightarrow \infty$  で

$$\begin{aligned} u_n(\cdot - x_n) &\rightharpoonup u \text{ in } H^1(\mathbb{R}) \\ x_n &\rightarrow x \in [-\infty, \infty] \end{aligned}$$

が成立. ここで

- $x \in (-\infty, \infty)$  のときは  $u_n \rightharpoonup u(\cdot + x)$  in  $H^1(\mathbb{R})$  が成立するのでこの式から  $u$  は

$$-\partial_x^2 u + u - \gamma \delta_0(\cdot - x) u - |u|^{p-1} u = 0$$

が成立する. この常微分方程式の解は  $|\gamma| \geq 2$  なら存在しなくて,  $|\gamma| < 2$  なら  $u = \pm Q_\gamma(\cdot - x)$  となるが, このとき

$$u_n \rightharpoonup u(\cdot + x) = \pm Q_\gamma \text{ in } H^1(\mathbb{R})$$

が成立する. ここで  $u_n \rightharpoonup Q_\gamma$  の場合を考える.  $w_n = u_n - Q_\gamma$  とおくと, Brezis-Lieb の補題より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1}) = \|Q_\gamma\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

が成立するのでこれから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \frac{2(p+1)}{p-1} \kappa - \|Q_\gamma\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

となる. さらに任意の  $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  に対して

$$\begin{aligned} \langle -\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma \delta_0 w_n - f(w_n), \varphi \rangle &= \langle -\partial_x^2 u_n + u_n - \gamma \delta_0 u_n - f(u_n), \varphi \rangle \\ &\quad - \langle -\partial_x^2 Q_\gamma + Q_\gamma - \gamma \delta_0 Q_\gamma - f(Q_\gamma), \varphi \rangle \\ &\quad - \langle f(w_n) - f(u_n) + f(Q_\gamma), \varphi \rangle \end{aligned}$$

で, 一番上の項は (3) から  $n \rightarrow \infty$  で 0 に収束し, 真ん中の項は 0 となる. そして一番下の項について, 「任意の実数  $R > 0$  に対して  $f(w_n) - f(u_n) + f(Q_\gamma) \rightarrow 0$  in  $H^1([-R, R])$ 」に気を付けると,  $G_n = f(w_n) - f(u_n) + f(Q_\gamma)$  としたら

$$\langle G_n, \varphi \rangle = \int_{|x| > R} (G_n \varphi) + \int_{-R}^R (G_n \varphi)$$

は  $R$  を十分大きくとり,  $R$  に比べて  $n$  を十分大きくとれば  $|\langle G_n, \varphi \rangle|$  は小さくとれるので 0 に収束する. 以上の議論より任意の  $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle -\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma \delta_0 w_n - f(w_n), \varphi \rangle = 0$$

となるから

$$-\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma \delta_0 w_n - f(w_n) \rightarrow 0 \text{ in } H^{-1}(\mathbb{R})$$

が成立する.  $u_n \rightarrow -Q_\gamma$  のときも同様に  $w_n = u_n + Q_\gamma$  とおくと

$-\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma \delta_0 w_n - f(w_n) \rightarrow 0$  in  $H^{-1}(\mathbb{R})$  が成立する.

- $x = \pm\infty$  の場合を考える.  $x = \infty$  のとき,  $v_n = u_n(\cdot - x_n)$  とおくと  $v_n \rightarrow u$  だが, ここで  $R > 0$  を固定する.  $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  が  $|x| > R$  で  $\varphi(x) = 0$  となる関数のとき, 仮定から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle -\partial_x^2 u_n + u_n - \gamma \delta_0 u_n - f(u_n), \varphi(\cdot + x_n) \rangle = 0$$

だが, 十分大きい  $n$  で

$$\langle -\partial_x^2 u_n + u_n - \gamma \delta_0 u_n - f(u_n), \varphi(\cdot + x_n) \rangle = \langle -\partial_x^2 v_n + v_n - f(v_n), \varphi \rangle$$

が成立するのでこれと  $v_n \rightarrow u$  から

$$-\partial_x^2 u + u - f(u) = 0$$

が言える. この解はある  $z \in \mathbb{R}$  を用いて  $\pm Q(\cdot - z)$  と表せるが, このとき  $x_n \rightarrow x_n - z$  と取り直すと  $u_n(\cdot - x_n) \rightarrow \pm Q$  となる. ここで  $u_n(\cdot - x_n) \rightarrow Q$  となるとき,  $w_n = u_n - Q(\cdot + x_n)$  とおくと先と同様の議論から Brezis-Lieb の補題から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \frac{2(p+1)}{p-1} \kappa - \|Q\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

で, 任意の  $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  に対して

$$\begin{aligned} \langle -\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma \delta_0 w_n - f(w_n), \varphi \rangle &= \langle -\partial_x^2 u_n + u_n - \gamma \delta_0 u_n - f(u_n), \varphi \rangle \\ &\quad - \langle -\partial_x^2 Q + Q - f(Q), \varphi(\cdot - x_n) \rangle + \gamma Q(x_n) \varphi(0) \\ &\quad - \langle f(w_n) - f(u_n) + f(Q(\cdot + x_n)), \varphi \rangle \end{aligned}$$

は一番上の項と真ん中の項は明らかに0に収束して、一番下の項については、  
 $G_n := f(w_n) - f(u_n) + f(Q(\cdot + x_n))$  としたらテイラー展開からある  $C > 0$  が存在して

$$|G_n(x)| \leq C(|Q(x + x_n)||u_n(x)|^{p-1} + |Q(x + x_n)|^{p-1}|u_n(x)|)$$

が成立する。ここで  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  は有界で  $H^1 \hookrightarrow L^\infty$  より  $L := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^\infty} < \infty$  としたら

$$|G_n(x)| \leq C'(1 + L^p)(Q(x + x_n) + |Q(x + x_n)|^{p-1})$$

が成立する。これより任意の  $R > 0$  に対して、 $n$  を十分大きくとると  $R$  と  $L$  に依存した定数  $C_{R,L} > 0$  が存在して、任意の  $-R \leq x \leq R$  で

$$|G_n(x)| \leq C_{R,L} e^{-x_n}$$

が成立する。これゆえ

$$\langle G_n, \varphi \rangle = \int_{|x| > R} (G_n \varphi) + \int_{-R}^R (G_n \varphi)$$

を考えると  $R$  を十分大きくとり、 $n$  もそれに依りて十分大きくとると  $|\langle G_n, \varphi \rangle|$  は十分小さくとれるので0に収束する。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle -\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma \delta_0 w_n - f(w_n), \varphi \rangle = 0$$

が成立する。 $u_n(\cdot - x_n) \rightarrow -Q$  のときや  $x = -\infty$  のときも  $w_n$  をうまくとると同様の操作を  
 考えることができる。

これらの議論より、 $u_n$  に対してある  $\zeta \in \{\pm Q_\gamma, \pm Q\}$  とある点列  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  が存在して、

$$w_n = u_n - \zeta(\cdot - x_n)$$

とするとある  $c > 0$  が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} - c$$

が成立して、さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle -\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma \delta_0 w_n - f(w_n), \varphi \rangle = 0$$

が成立する。この操作を繰り返して行くと  $w_n \rightarrow 0$  となるので、 $u_n$  はある整数  $m$  と正の整数  $K$ 、  
 $\{\sigma_k\}_{1 \leq k \leq K} \subset \{-1, 1\}^K$ 、 $\{x_{k,n}\}_{1 \leq k \leq K, n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  が存在して  $|x_{k,n}| \rightarrow \infty$  が成立し、さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - mQ_\gamma - \sum_{k=1}^K \sigma_k Q(\cdot - x_{k,n})\|_{H^1} = 0$$

が成立する。さらに (3) に気を付けると  $|m| \leq 1$  かつ  $i \neq j$  なら  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{i,n} - x_{j,n}| = \infty$  が成立す  
 る。よって最後に  $\{x_{k,n}\}_{1 \leq k \leq K, n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  を  $1 \leq k \leq K-1$  で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{k+1,n} - x_{k,n}) = \infty$$

が成立するように並び替えることで題意は示された。 □

## 5 主定理の証明

これを用いて定理 1.1 を示す. そのためまず最初に以下の命題を示す.

**命題 5.1.**  $\bar{u}$  が (1) の大域解となるとする. このとき  $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$  とある非負整数  $K$ ,  $\{\sigma_k\}_{1 \leq k \leq K} \subset \{-1, 1\}^K$ ,  $\{x_{k,n}\}_{1 \leq k \leq K, n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ , そして  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  が存在して以下が成立する.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(t_n) - \sigma Q_\gamma - \sum_{k=1}^K \sigma_k Q(\cdot - x_{k,n})\|_{H^1} + \|\partial_t u(t_n)\|_{L^2} = 0$
- $1 \leq k \leq K$  で  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{k,n}| = \infty$  が成立. さらに  $i \neq j$  なら  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{i,n} - x_{j,n}| = \infty$  が成立する.

このような「点列でのソリトン分解予想」は古くから研究されている. 実際,  $\gamma = 0$  の場合でのソリトン分解予想はよく知られている. 今回は  $\gamma \neq 0$  の場合も考えているが, このときはデルタポテンシャルの遠方のソリトンへの影響力の弱さから, 定常解以外にも無限遠方に逃げる  $Q$  が複数個ある可能性が示唆されている.

**証明.**  $\bar{u}$  が (1) の解とするとき, 命題 4.2 より  $\mathcal{H}$  で一様に有界になる. また, (1) の線形解は時間が経つと指数減衰するので, Duhamel 形式を考えることで

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\|\partial_t u(t)\|_{L^2} + \|\partial_t^2 u(t)\|_{H^{-1}}\} = 0$$

が成立するので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\partial_x^2 u(t) + u(t) - \gamma \delta_0 u(t) - f(u(t))\|_{H^{-1}} = 0$$

が成立する. これより  $t_n = n$  として,  $u_n = u(t_n)$  とおくと, 命題 4.3 から  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  をうまく取り替えるとそのような点列の存在がわかる. □

これをふまえて定理 1.1 を示す. まず用語として  $K \in \mathbb{N}$ ,  $R > 0$  に対して

$$E_R = \{z \in \mathbb{R}^K : 1 \leq k \leq K \text{ で } |z_k| > R, \quad 1 \leq k \leq K-1 \text{ で } z_{k+1} - z_k > R\}$$

と定義し,  $* \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $\sigma \in \{-1, 1\}^K$ ,  $R > 0$ ,  $\epsilon > 0$  に対して

$$A_{K,*,\sigma,R,\epsilon} = \{u \in H^1(\mathbb{R}) : \inf_{z \in E_R} \|u - *Q_\gamma - \sum_{k=1}^K \sigma_k Q(\cdot - z_k)\|_{H^1} < \epsilon\}$$

と定義する. さらに  $u \in H^1(\mathbb{R})$  に対して

$$d_{u,K,*,\sigma,R} = \inf_{z \in E_R} \|u - *Q_\gamma - \sum_{k=1}^K \sigma_k Q(\cdot - z_k)\|_{H^1}$$

と定義する.



主定理の証明

まず大域解  $\bar{u}$  に対して命題 5.1 より  $\tilde{*} \in \{-1, 0, 1\}$  とある非負整数  $K$ ,  $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_k\}_{1 \leq k \leq K} \subset \{-1, 1\}^K$ ,  $\{x_{k,n}\}_{1 \leq k \leq K, n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ , そして  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  が存在し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(t_n) - \tilde{*}Q_\gamma - \sum_{k=1}^K \tilde{\sigma}_k Q(\cdot - x_{k,n})\|_{H^1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{k,n}| = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{k+1,n} - x_{k,n}) = \infty$$

が成立する. ここでまず  $K \in \mathbb{N}$  の場合を考える. このときエネルギー減衰 (2) と上の点列での収束に気を付けると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_\gamma(t) = |\tilde{*}| + Kd \quad (4)$$

が成立する. また, 十分大きい  $n$  において  $u(t_n) \in A_{\tilde{*}, \tilde{\sigma}, R, \epsilon}$  である. ここで  $R > 0$  が十分大きいときに

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} d_{u(t), K, \tilde{*}, \tilde{\sigma}, R} > 0$$

と仮定する. このときある  $\delta > 0$  とある点列  $\{t'_n\}_{n=1}^\infty$  が存在して任意の正の整数  $n$  で

$$d_{u(t'_n), K, \tilde{*}, \tilde{\sigma}, R} > \delta$$

が成立する. ここで  $\epsilon > 0$  を  $\delta$  より十分小さい正の数としたとき, 命題 5.1 の手法を用いると, (4) からある  $\{\hat{t}_n\}_{n=1}^\infty$  と  $\hat{*} \in \{-1, 0, 1\}$  とある  $\hat{\sigma} \in \{-1, 1\}^K$  と  $\{y_{k,n}\}_{1 \leq k \leq K, n \in \mathbb{N}}$  が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(\hat{t}_n) - \hat{*}Q_\gamma - \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}_k Q(\cdot - y_{k,n})\|_{H^1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{k,n}| = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (y_{k+1,n} - y_{k,n}) = \infty$$

が成立する. ここで  $R > 0$  が十分大きく  $\epsilon > 0$  が十分小さいとき,

$$(*^\circ, \sigma^\circ) \neq (*^\bullet, \sigma^\bullet) \text{ ならば } A_{*^\circ, \sigma^\circ, R, \epsilon} \cap A_{*^\bullet, \sigma^\bullet, R, \epsilon} = \emptyset \quad (5)$$

が成立するので,  $(\hat{*}, \hat{\sigma}) \neq (\tilde{*}, \tilde{\sigma})$  が成立する. ここで

$$A_{R, \epsilon} = \cup_{* \in \{-1, 0, 1\}, \sigma \in \{-1, 1\}^K} A_{*, \sigma, R, \epsilon}$$

と定義すると, (5) と  $\{t_n\}_{n=1}^\infty, \{\hat{t}_n\}_{n=1}^\infty$  の取り方からある点列  $\{s_n\}_{n=1}^\infty$  が存在して任意の正の整数  $n$  に対して  $u(s_n) \notin A_{R, \epsilon}$ . 一方,  $\{r_n\}_{n=1}^\infty$  に対して命題 5.1 の考え方からある整数  $N$  で  $u(r_N) \in A_{R, \epsilon}$  となり矛盾. よって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{u(t), K, \tilde{*}, \tilde{\sigma}, R} = 0$$

となる. よって各  $t$  に対して  $z(t) \in \mathbb{R}^K$  をうまくとると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - \sigma Q_\gamma - \sum_{k=1}^K \sigma_k Q(\cdot - z_k(t))\|_{H^1} = 0$$

が成立する. また,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\partial_t u(t)\|_{L^2} = 0$  なのでこれらから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - \sigma Q_\gamma - \sum_{k=1}^K \sigma_k Q(\cdot - z_k(t))\|_{H^1} + \|\partial_t u(t)\|_{L^2} = 0$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z_k(t)| = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{z_{k+1}(t) - z_k(t)\} = \infty$$

がわかる.  $K = 0$  も同様の議論で容易にわかる.  $1 \leq k \leq K$  での  $z_k(t)$  の連続性に関しては  $u \in C([0, \infty), H^1)$  から従うので題意は示された.

## 参考文献

- [1] E. Csobo, F. Genoud, M. Ohta, and J. Royer, *Stability of standing waves for a nonlinear Klein-Gordon equation with delta potentials*. J. Differential Equations. **268** (2019) no. 1, 358–388.
- [2] R. Côte, Y. Martel, and X. Yuan, *Long-time asymptotics of the one-dimensional damped nonlinear Klein-Gordon equation*. Arch. Ration. Mech. Anal. **239** (2021), no. 3, 1837–1874.
- [3] R. Fukuizumi, and L. Jeanjean, *Stability of standing waves for a nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential*. Discrete Contin. Dyn. Syst. **21** (2008), no. 1, 121–136
- [4] J. Krieger, K. Nakanishi, and W. Schlag, *Global dynamics above the ground state energy for the one-dimensional NLKG equation*. Math Z. **272** (2012), no. 1-2, 297–316