対数的正則局所環の正準加群について

日本大学大学院　総合基礎科学研究科　地球情報数理科学専攻
伊城　慎之介 (Shinnosuke Ishiro)

1　導入

対数的正則性とはベースを持たないトーリック多様体の理論を構築するために加藤和也氏によって導入された概念である ([Kat94])。これは環やスキームに対して定義される概念で、可換環論的にも興味深い性質を数多く持っている。さらに任意の標数で定義されるため、近年急速に発展を遂げている混標数の特異点論の重要な具体例になることが期待できる。このような動機から講演者は対数的正則局所環の環論的な性質の解析に着手し、その第一歩目の研究として対数的正則局所環の正準加群の構造と Gorenstein 性の判定法を与えた。本稿ではこれらについて紹介する。

以下、環やモノイドは常に可換であるとする。

2　正準加群

まずは正準加群の定義を紹介する。

定義 2.1.
1. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を Cohen-Macaulay 局所環とする。R-加群 ω_R が型 (type) が 1 の極大 Cohen-Macaulay 加群かつ入射次元が有限のとき、これを**正準加群**という。
2. R が (局所でない)Cohen-Macaulay 環とする。任意の R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する局所化 $(\omega_R)_{\mathfrak{m}}$ が局所環 $R_{\mathfrak{m}}$ の正準加群であるとき ω_R を**正準加群**という。

注意 2.2. 局所環の正準加群は同型を除いて一意的であるが、局所環でない場合は一意的とは限らない。

正準加群の定義は抽象的であるが、明示的に書き下すことができるクラスも存在する。よく知られている例の 1 つが 4 節で説明する半群環である。

3　対数的構造と対数的正則性

対数的正則性を定義するために必要な性質を紹介する。モノイドや対数的構造に関する用語は [Ogus] に基づく。

定義 3.1. $\mathcal{Q}$ をモノイドとする。

1. 任意の $q, q', p \in \mathcal{Q}$ に対して $q + p = q' + p$ ならば $q = q'$ が成り立つとき、$\mathcal{Q}$ は **integral** であるという。
2. $\mathcal{Q}$ が有限生成かつ integral であるとき、$\mathcal{Q}$ は **fine** であるという。
3. $\mathcal{Q}^* = 0$ であるとき、$\mathcal{Q}$ は **sharp** であるという。
4. $\mathcal{Q}$ が次の 2 条件を満たすとき $\mathcal{Q}$ は **saturated** であるという。
   (a) $\mathcal{Q}$ は integral である。
   (b) $q \in \mathcal{Q}^{gp}$ が $nq \in \mathcal{Q}$ ならば $q \in \mathcal{Q}$ である。

例 3.2. (1) $\mathbb{N}^r$ は fine, sharp, saturated である。

(2) $\mathcal{Q}_1$ を $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$ で生成される $\mathbb{N}^2$ の部分モノイドとする。このとき $\mathcal{Q}_1$ は fine, sharp, saturated である。

(3) $\mathcal{Q}_2$ を $(1,0)$, $(1,2)$, $(1,3)$ で生成される $\mathbb{N}^2$ の部分モノイドとする。このとき $\mathcal{Q}_2$ は fine, sharp だが saturated でない。

定義 3.3. R を環、$\mathcal{Q}$ をモノイド、$\alpha : \mathcal{Q} \to R$ をモノイド準同型とする。このとき、三つ組 $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を**対数的環（log ring）**という。また R が局所環で、$\alpha^{-1}(R^\times) = \mathcal{Q}^*$ を満たすとき、対数的環 $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を**対数的局所環（local log ring）**という。

例 3.4. R を環、$\mathcal{Q}$ をモノイドとする。また R 上のモノイド代数 $R[\mathcal{Q}]$ とするとき $(R[\mathcal{Q}], \mathcal{Q}, \iota)$ は対数的環であるが対数的局所環ではない。ただし $\iota : \mathcal{Q} \hookrightarrow R[\mathcal{Q}]$ は包含写像とする。

次に対数的正則局所環の定義を紹介する。

定義 3.5. $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を対数的局所環とする。また R はネーター環、$\overline{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}/\mathcal{Q}^*$ が fine, saturated と仮定する。また I_α を Q^+ の α による像で生成される R のイデアル（つまり $I_\alpha = \langle \alpha(x) \mid x \in \mathcal{Q} \backslash \mathcal{Q}^* \rangle$）とする。このとき以下の条件を満たすとき $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を**対数的正則局所環**という。

(1) R/I_α は正則局所環である。
(2) $\dim R = \dim R/I_\alpha + \dim \mathcal{Q}$ が成り立つ。

条件 (1) は対数的正則局所環の特異点の情報はモノイドから来ることを表しており、条件 (2) は環とモノイドの間のある種の互換性を表している。

注意 3.6. $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{Q}}$ は split な全射なので、R の性質を調べる際はモノイドの取り替えによって $\mathcal{Q}$ を fine, sharp, saturated であると仮定して良い。

対数的正則局所環は半群環と類似の性質を持つが、その多くは次の構造定理より従う。

定理 3.7. $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を対数的局所環とする。ただし R はネーター環、$\mathcal{Q}$ は fine, sharp, saturated であるとする。このとき以下が成り立つ。

1. R は等標数であると仮定する。このとき R が対数的正則局所環であることと次の図式が可換

であることは同値である。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d] & k[\![\mathcal{Q} \oplus \mathbb{N}^r]\!] \arrow[d, "\phi", "\cong"'] \\ R \arrow[r] & \widehat{R}. \end{tikzcd}$$

ただし k は R の剰余体である。

2. R は混標数であると仮定する。このとき R が対数的正則局所環であることと次の図式が可換であることは同値である。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d] & C(k)[[\mathcal{Q} \oplus \mathbb{N}^r]\!] \arrow[d, two heads, "\phi"] \\ R \arrow[r] & \widehat{R} \end{tikzcd}$$

ただし $C(k)$ は剰余体 k の Cohen 環（剰余体が k であるような完備離散付値環）、$\mathrm{Ker}\,\phi$ は単項生成であり、生成元の定数項は p である。

つまり完備対数的正則局所環は、等標数の場合は完備なモノイド代数（完備半群環）、混標数の場合は完備なモノイド代数を単項イデアルで割った剰余環と同型である。また定義 3.5 の条件 1 や定理 3.7 より対数的正則局所環はモノイド部分と正則部分を持つことがわかる。

半群環との類似性で代表的なものとして以下の定理が成り立つ。

定理 3.8. $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を対数的正則局所環とする。このとき R は Cohen-Macaulay かつ normal である。

4 対数的正則局所環の正準加群

本稿の主結果を述べる前に半群環（$k[\mathcal{Q}]$）の正準加群について紹介する。半群環は可換環論において非常によく研究されているクラスの一つであり、Hochster によって Cohen-Macaialy 環であることが示されている。またその正準加群は以下のような形をしている。

定理 4.1 ([BH, Theorem 6.3.5 (1)])**.** k を体、$\mathcal{Q}$ を $\mathbb{N}^l$ の部分モノイドとする。このときイデアル

$$\langle q \in k[\mathcal{Q}] \mid q \in \mathrm{relint}\,\mathcal{Q} \rangle$$

は $k[\mathcal{Q}]$ の正準加群である。ただし $\mathrm{relint}\,\mathcal{Q}$ は $\mathcal{Q}$ の相対内部である。

例 4.2. 例 3.2 の $\mathcal{Q}_1$ を考える。このとき $\mathrm{relint}\,\mathcal{Q}_1$ は $\langle (1,1), (1,2) \rangle$ で生成される。このとき $k[\mathcal{Q}_1]$ は $k[x, xy, xy^2, xy^3]$ と同型であり、$\omega_{k[\mathcal{Q}_1]}$ は xy, xy^2 で生成される $k[x, xy, xy^2, xy^3]$ のイデアルと同型である。

次に対数的正則局所環の正準加群について述べる。対数的正則局所環の正準加群は次のような形をしている。

定理 4.3 ([Ish22])**.** $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を対数的正則局所環とする。また $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{N}^l$ と仮定する。このとき

$$\omega_R := \langle (x_1 \cdots x_d)\alpha(q) \mid q \in \mathrm{relint}\, Q \rangle$$

は R の正準加群である。

注意 4.4. 注意 2.2 でも述べた通り局所環の正準加群は同型の違いを除いて一意的である。したがって ω_R は $(x_1 \cdots x_d)$ 倍写像を用いることで $\langle \alpha(q) \mid q \in \operatorname{relint} \mathcal{Q} \rangle$ と同型なので半群環の場合と同じ表記を持つこともわかる。

定理 4.3 を用いることで対数的正則局所環に対してトーリック環と Gorenstein 性の判定法 ([BH, Theorem 6.3.5 (2)]) と同様のものを与えることができる。したがって以下のようにまとめることができる。

系 4.5 ([Ish22])**.** 定理 4.3 と同様の設定のもとで以下は同値である。

1. R は Gorenstein 環である。
2. $k[\mathcal{Q}]$ は Gorenstein 環である。
3. ある $c \in \operatorname{relint} \mathcal{Q}$ が存在して $c + \mathcal{Q} = \operatorname{relint} \mathcal{Q}$ が成り立つ。

最後に 2 次元の場合を考察する。系 4.5 を用いてトーリック環の場合に帰着させることで、次の定理を得ることができる。

命題 4.6 ([Ish22])**.** $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を対数的正則局所環とする。さらに $\mathcal{Q} \subset \mathbb{N}^2$ の次元が 2 であると仮定する。このとき R が Gorenstein 環であることと $\mathcal{Q} \cong \langle (n+1, 0), (1,1), (0, n+1) \rangle$ であることは同値である (ただし、$n \geq 1$)。

この命題から例 3.2 に現れるモノイド $\mathcal{Q}_1$ を対数的構造に持つ対数的正則局所環 $(R, \mathcal{Q}_1, \alpha)$ は Gorenstein ではないことがわかる。

参考文献

[BH] W. Bruns and H. J. Herzog, *Cohen-macaulay rings*, Cambridge studies in advanced mathematics **39** Cambridge university press.

[GR22] O. Gabber and L. Ramero, *almost rings and perfectoid rings*, `math.univ-lille1.fr/~ramero/hodge.pdf`.

[Ish22] S. Ishiro, *The canonical module of a local log-regular ring*, arXiv:2209.04828.

[Kat94] K. Kato, *Toric singularities*, American Journal of Mathematics, 116 (5) 1073–1099 (1994).

[Ogus] A. Ogus, *Lectures on logarithmic geometry*, Cambridge studies in advanced mathematics **178**, Cambridge University Press.