

# 三次の非線形項を持つ ある散逸・分散型方程式の解の高次漸近形

入野耀太 (Yota IRINO)\*

北陸先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科

福田一貴 (Ikki FUKUDA)†

信州大学 工学部 工学基礎部門

## 1 導入

本研究では、三次の非線形項を伴う、次の散逸・分散型方程式の初期値問題について考える：

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} - D_x^\alpha \partial_x u + \beta u^2 u_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

ここで、 $u = u(x, t)$  は実数値の未知関数を表し、 $u_0(x)$  は与えられた初期データとする。また、 $1 < \alpha < 3$ 、 $\beta \in \mathbb{R}$  とする。添字の  $t$  と  $x$  は、それぞれ変数  $t$  と  $x$  での偏微分を表すとする。一方、 $D_x^\alpha$  は非整数階の微分を表すものであり、Fourier 変換を用いて次のように定義される。

$$D_x^\alpha f(x) := \mathcal{F}^{-1} \left[ |\xi|^\alpha \hat{f}(\xi) \right] (x).$$

本研究の目的は、(1.1) の時間大域解の漸近挙動を解析することである。特に、解の高次漸近展開に関する考察を行う。はじめに、この問題を研究する意義について、方程式の持つ物理的背景を説明するとともに、関連する問題に対する既知の結果等を詳しく紹介する。

まず、この方程式 (1.1) は次の KdV–Burgers 方程式の一般化の一つである (詳しくは次節を参照)。

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} + u_{xxx} + (u^2)_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

この方程式 (1.2) は、移流  $(u^2)_x$ 、散逸  $u_{xx}$ 、分散  $u_{xxx}$  の三つの効果を考慮した、一般の非線形波動を記述する方程式の 1 つとして知られており、応用先としては、プラズマ中のイオン音波などの研究が存在する (cf. [10])。

次に、(1.1) 及び (1.2) に現れる各項の物理的な意味について説明する。まず、移流項  $(u^3)_x$ 、 $(u^2)_x$  の意味について考える。ここでは、単純な場合として、次の線形移流方程式の解説から議論を始める。

$$\begin{aligned}u_t + au_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

ここで、 $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ 、 $a \in \mathbb{R}$  とする。この問題の解は簡単な計算により、 $u(x, t) = u_0(x - at)$  と書けることがわかる。よって、波は初期波形を保ったまま一定速度  $a$  で進行していく様子が見取れる。次に、(1.3) の線形の移流項  $u_x$  を非線形な移流項  $uu_x$  に置き換えた以下の方程式を考える。

$$\begin{aligned}u_t + buu_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

\* E-mail: s2210019@jaist.ac.jp

† E-mail: i.fukuda@shinshu-u.ac.jp

本研究は JSPS 科研費、若手研究 (課題番号：22K13939) の助成を受けたものである。

ここで,  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}$  とする. このとき, この方程式 (1.4) の解は, 特性曲線法を用いて解くことで,  $u(x, t) = u_0(x - but)$  と表現出来ることが知られている (cf. [8]). よって, 波は速度  $bu$  で進行するが, 線形の場合 (1.3) とは異なり, 波が進行する速度は解  $u(x, t)$  自身に依存することがわかる. 従って, この方程式の解で記述される波は, 振幅の大きいところ程速く進行し, 小さいところ程遅く進行することになる. 故に, 波は時間と共に急峻化しながら進行する様子がわかる. 一般の移流項についても同様に考えることが出来て, 今回対象とする方程式 (1.1) 内の移流項  $(u^3)_x$  についても同様の考察が与えられる.

次に, 散逸項  $u_{xx}$  の効果を説明するために, 以下の単純な偏微分方程式について考える.

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1.5)$$

この方程式は熱方程式または拡散方程式と呼ばれるものである. 特に, (1.5) は (2.7) で定義された熱核と呼ばれる関数を基本解として持つことが知られている. この関数の形状からもわかるように, 熱核は減衰しながら広がっていく. 実際, 熱核に対しては次の減衰評価が成り立つことが知られている (cf. [3]).

$$\|G(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}, \quad \|\partial_x G(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-1}, \quad t > 0.$$

最後に, 分散項について説明するために, 例として, 次の単純な分散型方程式について考える.

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1.6)$$

この方程式 (1.6) は,  $u(x, t) = \sin k(x - \frac{\omega}{k}t)$  を解に持つことが簡単な計算でわかる. ここで,  $k > 0$  が波数,  $\omega > 0$  が各周波数に対応しており,  $\omega/k = -k^2$  の関係がある. このとき, 波の速度  $\omega/k$  は波数  $k$  に依存する. このような性質を波の分散性という (cf. [9]). また, この (1.6) は線形方程式なので, 重ね合わせの原理により, これらの波を合わせた次の関数もまた (1.6) の解となる.

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N \sin k \left( x - \frac{\omega}{k}t \right), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (1.7)$$

ここで,  $N \in \mathbb{N}$  である. 波形が (1.7) のように種々の波数の波の重ね合わせで記述されるとき, 各成分波ごとに速度が異なるため, 初めはまとまった波の形をしていても, 時間経過に伴って波は複数の波形に分かれる. 一般の非整数階の分散項  $D_x^\alpha \partial_x u$  についても同様の考察が出来る.

上記で説明した移流項, 散逸項, 分散項を組み合わせることで, より一般の波動を記述することが可能となる. KdV-Burgers 方程式 (1.2) やその一般化である (1.1) はその一部となっており, これらの方程式に対する数学解析を行うことで, 非線形波動理論の更なる学術的発展への貢献が期待できる.

記号. 実数  $1 \leq p \leq \infty$  に対して,  $L^p(\mathbb{R})$  は通常の Lebesgue 空間を表すとする. 関数  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  に対して,  $f$  の Fourier 変換と  $g$  の Fourier 逆変換を以下で定義する.

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad \mathcal{F}^{-1}[g](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} g(\xi) d\xi.$$

整数  $k \geq 0$  に対して, Sobolev 空間を次で定義する.

$$H^k(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \|f\|_{H^k} := \left( \sum_{l=0}^k \|\partial_x^l f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

$I \subseteq [0, \infty)$  を区間,  $X$  を Banach 空間とする. このとき,  $L^\infty(I; X)$  は  $X$  に値を取る  $I$  上の本質的に有界な可測関数の全体を表す. 同様に,  $C(I; X)$  は  $X$  に値を取る  $I$  上の連続関数の全体を表すとする.

関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の畳み込みを  $(f * g)(x)$  と表す. また, 二変数関数  $F(x, t)$  の場合には,  $g(x)$  との  $x$  変数についての畳み込みを  $(F(t) * g)(x)$  などと表記する.

本稿を通して,  $C$  は様々な正の定数を表すこととし, 互いに異なるものであっても同じ  $C$  で表すことに注意する. この定数  $C$  は各種パラメータに依存することはあるが, 変数  $x$  と  $t$  には依存しないことに注意する.

## 2 既知の結果

まず、今回の問題に関する既知の結果を紹介するために、(1.1) を更に一般化した次の問題を考える：

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} - D_x^\alpha \partial_x u + (u^q)_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 $1 < \alpha < 3$ ,  $q \geq 2$  とする. なお、非線形項  $u^q$  は  $u$  が負または  $q$  が非整数の場合には、 $|u|^q$  または  $|u|^{q-1}u$  と解釈することとする. また、 $q = 3$  のとき (2.1) は (1.1) で  $\beta = 3$  とした場合となることに注意する. 本研究の主題は (1.1) の解の漸近挙動の解析であるが、そのために、まず一般化された方程式 (2.1) に関して、時間大域解の存在と減衰評価に関する基本的な結果を紹介する. はじめに、次の関数  $S_\alpha(x, t)$  を導入する.

$$S_\alpha(x, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left[ e^{-t\xi^2 + it|\xi|^\alpha} \right] (x). \quad (2.2)$$

このとき、Duhamel の原理を用いることで、(2.1) を次の積分方程式に書き換えることが出来る.

$$u(x, t) = (S_\alpha(t) * u_0)(x) - \int_0^t (\partial_x S_\alpha(t - \tau) * u^q(\tau))(x) d\tau. \quad (2.3)$$

更に、縮小写像の原理を積分方程式 (2.3) に適用することで、(2.1) の時間大域解の存在と減衰評価が示される. 実際、Karch [6] によって、以下の結果が得られている.

**命題 2.1** ([6]).  $1 < \alpha < 3$ ,  $q \geq 2$  とし、 $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$  とする. このとき、 $T > 0$  と初期値問題 (2.1) の時間局所解  $u \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$  が唯一存在する. 更に、 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  かつ  $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$  が十分小さいとすると、次を満たす初期値問題 (2.1) の時間大域解が唯一存在する.

$$u \in L^\infty([0, \infty); L^\infty(\mathbb{R})), \quad t^{\frac{1}{4}}u \in L^\infty((0, \infty); L^2(\mathbb{R})).$$

また、 $2 \leq p \leq \infty$  に対して、解  $u(x, t)$  は次の評価を満たす.

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}, \quad t \geq 0, \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^1} \leq C \left(1 + t^{-\frac{\alpha-1}{4}}\right), \quad t > 0. \quad (2.4)$$

更に加えて、次の評価が成り立つ.

$$\|\partial_x u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq Ct^{-\frac{3}{4}}, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

以下、(2.1) に対する上記の解について考えることとし、その長時間漸近挙動に関する既知の結果を紹介する. 解の漸近形は非線形項の指数  $q$  に強く依存し、それに依って挙動が変化することが知られている. 特に、 $q = 2$  と  $q = 3$  は漸近形の形状が本質的に変化する臨界指数になっており、この意味で特殊な場合である. はじめに、 $q = 2$  の場合に関する結果を紹介しよう. この状況に関しては、著者の知る限り  $\alpha = 2$  の場合についてのみが研究されており、このとき (2.1) は KdV–Burgers 方程式 (1.2) となる. この解の長時間挙動に関する研究は、はじめに Amick–Bona–Schonbek [1] によって行われた. 彼らは (1.2) をはじめとする散逸・分散型の方程式に対して、解の時間減衰評価を示した. 特に、初期値が  $u_0 \in H^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  の場合には、(2.4) の第一式と同様の  $L^p$ -減衰評価が与えられた. 更に、Karch [7] では (1.2) がより詳しく解析され、[1] での結果が一般化された. 実際、この方程式の解は、 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  のとき、 $1 \leq p \leq \infty$  に対して次の漸近公式を満たす.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u(\cdot, t) - \chi(\cdot, t)\|_{L^p} = 0. \quad (2.6)$$

ここで、 $\chi(x, t)$  は次の Burgers 方程式の自己相似解であり、陽に与えられることが知られている (cf. [8]).

$$\chi_t - \chi_{xx} + (\chi^2)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

また, Hayashi–Naumkin [4] では  $p = \infty$  の場合に関して, (2.6) で与えられた漸近レートが改善された. 更に, Kaikina–Ruiz-Paredes [5] によって,  $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$  という付加条件の下で,  $p = \infty$  の場合の  $\chi(x, t)$  への最適な漸近レートが  $t^{-1} \log t$  となることが, 解の第二次漸近形を構成することで証明されている.

次に, より一般の  $q > 2$ ,  $\alpha > 1$  の場合について, (2.1) の解の漸近挙動に関する先行研究を紹介しよう. (2.1) で  $q > 2$  のときには,  $q = 2$  の場合と比べて  $(u^q)_x$  が早く減衰するため, 非線形性が弱いと言える. このため, 解の漸近形は (1.2) とは本質的に異なるものが与えられる. 実際, Karch [6] によって (2.1) の解  $u(x, t)$  の主要部は線形熱方程式の解で与えられることが示されている. 更に, (2.1) の線形部分 (i.e. (2.3) の  $(S_\alpha(t) * u_0)(x)$ ) に対する高次漸近展開が得られている. 特に, その高次漸近展開は, 分散項の効果, すなわち指数  $\alpha$  に強く依存するということがポイントである. この結果を説明するために, 次の記号を導入する.

$$G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad M := \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx, \quad m := \int_{\mathbb{R}} xu_0(x) dx. \quad (2.7)$$

この記号の下,  $(S_\alpha(t) * u_0)(x)$  に関して次の漸近公式が成立する.

**定理 2.2** ([6]).  $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$  かつ  $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$  を仮定する. このとき, 以下の漸近公式が成立する.

(i)  $2 < \alpha < 3$  のとき, 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}} \|S_\alpha(t) * u_0 - MG(t) + m\partial_x G(t)\|_{L^p} = 0. \quad (2.8)$$

(ii)  $\alpha = \frac{N+1}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  のとき, 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}} \left\| S_\alpha(t) * u_0 - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!} (D_x^\alpha \partial_x)^k \{MG(t) - m\partial_x G(t)\} - \frac{M}{N!} (tD_x^\alpha \partial_x)^N G(t) \right\|_{L^p} = 0. \quad (2.9)$$

(iii)  $\frac{N+2}{N+1} < \alpha < \frac{N+1}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  のとき, 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}} \left\| S_\alpha(t) * u_0 - \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} (D_x^\alpha \partial_x)^k \{MG(t) - m\partial_x G(t)\} \right\|_{L^p} = 0. \quad (2.10)$$

ここで,  $S_\alpha(x, t)$  は (2.2) で定義されたものであり,  $G(x, t)$ ,  $M$ ,  $m$  は (2.7) で定義されたものである.

ここで, 上記の漸近公式 (2.8), (2.9), (2.10) では全ての場合において, 展開の第一項が  $G(x, t)$  で与えられることに注意する. 更に, 強調すべき点としては, (2.9) と (2.10) では展開の第二項以降から分散の効果が強くと現れることに注意する. 一方, (2.8) では分散の影響が弱く, 解の挙動は熱方程式の解のそれと同じになる.

上では線形解の漸近展開が与えられたため, 残りは (2.3) の Duhamel 項の漸近展開が得られれば, (2.1) の解  $u(x, t)$  に対する漸近公式を得ることが出来る. 実際, Karch [6] は,  $q > 2$  で  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  かつ  $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$  の場合, (2.3) の Duhamel 項の漸近形を構成することに成功しており, 漸近形が  $2 < q < 3$ ;  $q = 3$ ;  $q > 3$  の場合で異なることが示されている. 今回の研究では, 臨界の場合である  $q = 3$  に着目する. この場合は, Duhamel 項の漸近形が線形であるが,  $\log t$  が乗算されているという意味で, 特殊な状況となる. より正確には, 以下の漸近公式が証明されている.

**定理 2.3** ([6]).  $1 < \alpha < 3$ ,  $q = 3$  とする. また,  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  かつ  $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$  が十分小さいと仮定する. このとき,  $u(x, t)$  を命題 2.1 で述べた初期値問題 (2.1) の時間大域解とすると, 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次の漸近公式が成立する.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}}}{\log t} \left\| u(\cdot, t) - (S_\alpha(t) * u_0)(\cdot) + \frac{M^3}{4\sqrt{3}\pi} (\log t) \partial_x G(\cdot, t) \right\|_{L^p} = 0. \quad (2.11)$$

ここで,  $S_\alpha(x, t)$  は (2.2) で定義されたものであり,  $G(x, t)$  と  $M$  は (2.7) で定義されたものである.

上述の定理 2.2, 2.3 を合わせることで,  $q = 3$  の場合の (2.1) の解に対する高次漸近展開を得ることが出来る. しかし, (2.11) で得られた漸近形への漸近レート  $o(t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} \log t)$  は (2.8), (2.9), (2.10) よりも  $o(\log t)$  分だけ遅いものであることに注意する. 従って, 解  $u(x, t)$  の高次漸近展開に関する漸近レートもまた (2.8), (2.9), (2.10) より遅くなってしまふ. このため, より良いオーダーで展開を行うには, (2.11) で与えられた漸近レートを改善することが望ましい. これを議論するには, (2.3) の Duhamel 項の第二次漸近形を構築することが有効だと考えられる. 本研究では, (2.1) において  $q = 3$  として, パラメーター  $\beta \in \mathbb{R}$  を付与した方程式 (1.1) について解析を行い, Karch [6] の結果を改良することに成功した.

### 3 主結果

この節では本研究の主結果を紹介する. 今回我々は, 以下で述べる積分方程式 (3.1) の Duhamel 項の第二次漸近形を新規に構成することで, Karch [6] によって与えられた (2.11) における漸近レートを改良した. 主結果を述べるため, はじめに, Duhamel の原理を適用することで (1.1) を積分方程式に書き換える.

$$u(x, t) = (S_\alpha(t) * u_0)(x) + I_{\alpha, \beta}[u](x, t). \quad (3.1)$$

ここで,  $S_\alpha(x, t)$  は (2.2) で定義されたものであり,  $I_{\alpha, \beta}[u](x, t)$  は次で定義されたものとする.

$$I_{\alpha, \beta}[u](x, t) := -\frac{\beta}{3} \int_0^t (\partial_x S_\alpha(t - \tau) * u^3(\tau))(x) d\tau. \quad (3.2)$$

更に, 主結果を述べるために, 次の関数  $\Psi(x, t)$  を導入する.

$$\Psi(x, t) := t^{-1} \Psi_* \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad \Psi_*(x) := \frac{d}{dx} \left( \int_0^1 (G(1-s) * F(s))(x) ds \right), \quad (3.3)$$

$$F(y, s) := s^{-\frac{3}{2}} F_* \left( \frac{y}{\sqrt{s}} \right), \quad F_*(y) := \frac{1}{8\sqrt{\pi^3}} e^{-\frac{3y^2}{4}} - \frac{1}{8\sqrt{3\pi^3}} e^{-\frac{y^2}{4}}. \quad (3.4)$$

加えて, 定数  $\mathcal{M}$  を次で定義する.

$$\mathcal{M} := \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} u^3(y, \tau) dy d\tau + \int_1^\infty \int_{\mathbb{R}} (u^3 - (MG)^3)(y, \tau) dy d\tau. \quad (3.5)$$

上記の記号の下, (3.1) の Duhamel 項  $I_{\alpha, \beta}[u](x, t)$  の第二次漸近形が得られる.

**定理 3.1** ([2]).  $1 < \alpha < 3, \beta \in \mathbb{R}$  とする.  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  かつ  $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$  とし,  $\|u_0\|_{H^1} + \|xu_0\|_{L^1}$  が十分小さいと仮定する. このとき, 命題 2.1 で述べた性質を全て満たす初期値問題 (1.1) の時間大域解  $u(x, t)$  が唯一存在する. 更に,  $u(x, t)$  について, 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次の漸近公式が成立する.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}} \left\| I_{\alpha, \beta}[u](\cdot, t) + \frac{\beta M^3}{12\sqrt{3\pi}} (\log t) \partial_x G(\cdot, t) + \frac{\beta \mathcal{M}}{3} \partial_x G(\cdot, t) + \frac{\beta M^3}{3} \Psi(\cdot, t) \right\|_{L^p} = 0. \quad (3.6)$$

ここで,  $I_{\alpha, \beta}[u](x, t)$  は (3.2) で定義されたものであり,  $G(x, t)$  と  $M$  は (2.7) で定義されたものである. また,  $\Psi(x, t)$  と  $\mathcal{M}$  は, それぞれ (3.3) および (3.5) で定義されたものである.

これは, 導入で述べた Karch [6] による定理 2.3 の改良となっている. 実際,  $t \rightarrow \infty$  で次が成り立つ.

$$\left\| I_{\alpha, \beta}[u](\cdot, t) + \frac{\beta M^3}{12\sqrt{3\pi}} (\log t) \partial_x G(\cdot, t) \right\|_{L^p} = (C_* + o(1)) t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}.$$

ここで,  $C_* := \|(\beta \mathcal{M}/3) \partial_x G(\cdot, 1) + (\beta M^3/3) \Psi_*(\cdot)\|_{L^p}$  である. また, 上に示した主結果である定理 3.1 と, Karch [6] による定理 2.2, および (3.1) を組み合わせることで, (1.1) の解に対する次の高次漸近展開を得る.

系 3.2 ([2]). 定理 3.1 と同様の仮定の下で, (1.1) の解  $u(x, t)$  に対して, 以下の漸近公式が成立する.

(i)  $2 < \alpha < 3$  のとき, 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}} \left\| u(\cdot, t) - MG(\cdot, t) + \frac{\beta M^3}{12\sqrt{3}\pi} (\log t) \partial_x G(\cdot, t) + \left(m + \frac{\beta \mathcal{M}}{3}\right) \partial_x G(\cdot, t) + \frac{\beta M^3}{3} \Psi(\cdot, t) \right\|_{L^p} = 0.$$

(ii)  $\alpha = \frac{N+1}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  のとき, 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}} \left\| u(\cdot, t) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!} (D_x^\alpha \partial_x)^k \{MG(\cdot, t) - m \partial_x G(\cdot, t)\} - \frac{M}{N!} (t D_x^\alpha \partial_x)^N G(\cdot, t) + \frac{\beta M^3}{12\sqrt{3}\pi} (\log t) \partial_x G(\cdot, t) + \frac{\beta \mathcal{M}}{3} \partial_x G(\cdot, t) + \frac{\beta M^3}{3} \Psi(\cdot, t) \right\|_{L^p} = 0.$$

(iii)  $\frac{N+2}{N+1} < \alpha < \frac{N+1}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  のとき, 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}} \left\| u(\cdot, t) - \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} (D_x^\alpha \partial_x)^k \{MG(\cdot, t) - m \partial_x G(\cdot, t)\} + \frac{\beta M^3}{12\sqrt{3}\pi} (\log t) \partial_x G(\cdot, t) + \frac{\beta \mathcal{M}}{3} \partial_x G(\cdot, t) + \frac{\beta M^3}{3} \Psi(\cdot, t) \right\|_{L^p} = 0.$$

ここで,  $G(x, t)$ ,  $M$ ,  $m$  は (2.7) で定義されたものである. また,  $\Psi(x, t)$  と  $\mathcal{M}$  は, それぞれ (3.3) および (3.5) で定義されたものである.

## 4 準備

この節では, 主結果を証明するために必要な補題と命題を紹介する. まず, 関数  $S_\alpha(x, t)$  の幾つかの性質を述べよう. この関数は (2.7) で定義された熱核  $G(x, t)$  と同様の減衰評価を持つことが知られている. 加えて,  $\alpha > 1$  のとき,  $S_\alpha(x, t)$  は  $t \rightarrow \infty$  では  $G(x, t)$  により近似することが出来る. より正確には, 以下の評価 (4.2) が成立する. 証明については [6] の補題 3.1 と補題 3.2 を参照せよ.

補題 4.1 ([6]).  $\alpha > 1$ ,  $l$  を非負整数とする. このとき,  $2 \leq p \leq \infty$  に対して, 以下の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned} \|\partial_x^l S_\alpha(\cdot, t)\|_{L^p} &\leq C t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}, \quad t > 0, \\ \|\partial_x^l S_\alpha(\cdot, t)\|_{L^1} &\leq C t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + t^{-\frac{\alpha-1}{4}}\right), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

補題 4.2 ([6]).  $\alpha > 1$ ,  $l$  を非負整数とする. このとき,  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次が成り立つ.

$$\|\partial_x^l (S_\alpha(\cdot, t) - G(\cdot, t))\|_{L^p} \leq C t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}}, \quad t > 0. \quad (4.2)$$

熱核  $G(x, t)$  に対しては, 次の  $L^p$ -減衰評価が成立する. 証明については [2] の補題 3.3 を参照せよ.

補題 4.3 ([2]).  $\alpha > 1$ ,  $k \geq 0$ ,  $l$  を非負整数とする. このとき,  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次が成り立つ.

$$\|(D_x^\alpha \partial_x)^k \partial_x^l G(\cdot, t)\|_{L^p} \leq C t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{k(\alpha+1)}{2}-\frac{1}{2}}, \quad t > 0.$$

更に, 熱核  $G(x, t)$  については, 次の漸近公式が成り立つことが知られている (cf. [3, 6]).

**補題 4.4** ([3, 6]).  $l$  を非負整数,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$  かつ  $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$  とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\left\| \partial_x^l ((G(t) * u_0)(\cdot) - MG(\cdot, t)) \right\|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}-\frac{l}{2}}, \quad t > 0.$$

ここで,  $G(x, t)$  と  $M$  は (2.7) で定義されたものである.

最後に, 定理 3.1 を証明する上で重要な命題を紹介する. 証明については [2] の命題 3.5 を参照せよ.

**命題 4.5** ([2]).  $1 < \alpha < 3$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  とする.  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  かつ  $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$  とし,  $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$  が十分小さいとする. このとき, (1.1) の解  $u(x, t)$  について, 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次が成り立つ.

$$\|u^3(\cdot, t) - (MG)^3(\cdot, t)\|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-1} \left\{ t^{-\frac{\min\{\alpha-1, 1\}}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \log(2+t) \right\}, \quad t \geq 1. \quad (4.3)$$

ここで,  $G(x, t)$  と  $M$  は (2.7) で定義されたものである.

## 5 主結果の証明の概略

本節では, 主結果である定理 3.1 の証明の概略を述べる. はじめに, 次の関数を導入する.

$$v(x, t) := \int_1^t (\partial_x G(t-\tau) * G^3(\tau))(x) d\tau, \quad V(x, t) := \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} (\log t) \partial_x G(x, t), \quad (5.1)$$

$$W(x, t) := \int_0^1 (\partial_x G(t-\tau) * u^3(\tau))(x) d\tau + \int_1^t (\partial_x G(t-\tau) * (u^3 - (MG)^3)(\tau))(x) d\tau. \quad (5.2)$$

この記号の下, (3.1), (3.2), (3.5), (5.1), (5.2) により, 次の関係が成立することがわかる.

$$\begin{aligned} & I_{\alpha, \beta}[u](x, t) + \frac{\beta M^3}{12\sqrt{3}\pi} (\log t) \partial_x G(x, t) + \frac{\beta \mathcal{M}}{3} \partial_x G(x, t) + \frac{\beta M^3}{3} \Psi(x, t) \\ &= -\frac{\beta}{3} \left\{ \int_0^t (\partial_x (S_\alpha - G)(t-\tau) * u^3(\tau))(x) d\tau \right\} - \frac{\beta}{3} \{W(x, t) - \mathcal{M} \partial_x G(x, t)\} \\ & \quad - \frac{\beta M^3}{3} \{v(x, t) - V(x, t) - \Psi(x, t)\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

従って, 定理 3.1 の証明を行うためには, (5.3) の右辺の各項を全て評価すればよい. そのために, 以下では右辺の評価を後述の三つの命題に分けて行う. まず, 第一項に関しては, 次の評価が成立する.

**命題 5.1** ([2]).  $1 < \alpha < 3$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  とする.  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  かつ  $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$  とし,  $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$  が十分小さいとする. このとき, (1.1) の解  $u(x, t)$  について, 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して, 次が成り立つ.

$$\left\| \int_0^t \partial_x (S_\alpha - G)(t-\tau) * u^3(\tau) d\tau \right\|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{\alpha}{2}} \log(2+t), \quad t \geq 2.$$

ここで,  $S_\alpha(x, t)$  と  $G(x, t)$  は, それぞれ (2.2) と (2.7) で定義されたものである.

**証明の概略.** ここでは,  $p = \infty$  の場合について, 証明の概略を述べる. まず, (2.4), (2.5), (4.1) などを用いて, 非線形項の評価を用意する. 特に,  $u^3(x, t)$  と  $\partial_x(u^3(x, t))$  に対する以下の減衰評価を示す.

$$\|u^3(\cdot, t)\|_{L^1} \leq C(1+t)^{-1}, \quad t \geq 0, \quad \|\partial_x(u^3(\cdot, t))\|_{L^\infty} \leq Ct^{-2}, \quad t \geq 1. \quad (5.4)$$

これを用いると, Young の不等式と (4.2) および (5.4) により, 次の評価が得られる.

$$\left\| \int_0^t \partial_x (S_\alpha - G)(t-\tau) * u^3(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^{\frac{t}{2}} \|\partial_x(S_\alpha - G)(\cdot, t - \tau)\|_{L^\infty} \|u^3(\cdot, \tau)\|_{L^1} d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t \|(S_\alpha - G)(\cdot, t - \tau)\|_{L^1} \|\partial_x(u^3(\cdot, \tau))\|_{L^\infty} d\tau \\
&\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t - \tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{\alpha-1}{2} - \frac{1}{2}} (1 + \tau)^{-1} d\tau + C \int_{\frac{t}{2}}^t (t - \tau)^{-\frac{\alpha-1}{2}} \tau^{-2} d\tau \\
&\leq Ct^{-1 - \frac{\alpha-1}{2}} \log(2 + t) + Ct^{-1 - \frac{\alpha-1}{2}} \leq Ct^{-1 - \frac{\alpha-1}{2}} \log(2 + t), \quad t \geq 2, \quad 1 < \alpha < 3.
\end{aligned}$$

同様の方針で  $p = 1$  の場合も評価を行い、あとは補間不等式を利用すればよい。  $\square$

次に、(5.3) の右辺の第二項を評価する。実際、 $W(x, t)$  が  $\mathcal{M}\partial_x G(x, t)$  で近似出来ることが示せる。

**命題 5.2** ([2]).  $1 < \alpha < 3$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  とする。  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  かつ  $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$  とし、  $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$  が十分小さいとする。このとき、(1.1) の解  $u(x, t)$  について、任意の  $1 \leq p \leq \infty$  対して、次が成り立つ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{2}} \|W(\cdot, t) - \mathcal{M}\partial_x G(\cdot, t)\|_{L^p} = 0. \quad (5.5)$$

ここで、 $W(x, t)$ ,  $G(x, t)$ ,  $\mathcal{M}$  は、それぞれ (5.2), (2.7), (3.5) で定義されたものである。

**証明の概略.** 簡単のため、次の関数  $\rho(x, t)$  を定義する。

$$\rho(x, t) := (u^3 - (MG)^3)(x, t). \quad (5.6)$$

ここで、この関数に対しては、(4.3) と (5.6) から、次の評価が成立することに注意する。

$$\|\rho(\cdot, t)\|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p}) - 1} \left\{ t^{-\frac{\min\{\alpha-1, 1\}}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \log(2 + t) \right\}, \quad t \geq 1. \quad (5.7)$$

さらに、以下で定義される定数  $\mathcal{M}_0$  と  $\mathcal{M}_1$  を導入する。

$$\mathcal{M}_0 := \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} u^3(y, \tau) dy d\tau, \quad \mathcal{M}_1 := \int_1^\infty \int_{\mathbb{R}} \rho(y, \tau) dy d\tau.$$

この記号の下、 $W(x, t)$  の定義 (5.2) および  $\mathcal{M}$  の定義 (3.5) から、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned}
W(x, t) - \mathcal{M}\partial_x G(x, t) &= \int_1^t (\partial_x G(t - \tau) * \rho(\tau))(x) d\tau - \mathcal{M}_1 \partial_x G(x, t) \\
&\quad + \int_0^1 (\partial_x G(t - \tau) * u^3(\tau))(x) d\tau - \mathcal{M}_0 \partial_x G(x, t).
\end{aligned}$$

従って、(5.5) の証明を行うためには、任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して、次が成立することを示せばよい。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{2}} \left\| \int_1^t \partial_x G(t - \tau) * \rho(\tau) d\tau - \mathcal{M}_1 \partial_x G(\cdot, t) \right\|_{L^p} = 0, \quad (5.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{2}} \left\| \int_0^1 \partial_x G(t - \tau) * u^3(\tau) d\tau - \mathcal{M}_0 \partial_x G(\cdot, t) \right\|_{L^p} = 0. \quad (5.9)$$

上記の漸近公式 (5.8) と (5.9) を示すには、(5.7) の評価に注意して、放物型方程式の解の漸近解析の手法をそのまま適用すればよい。詳しい証明は、オリジナルの論文 [2] の命題 4.2 を参照せよ。  $\square$

最後に、(5.3) の右辺の第三項を評価する。即ち、 $v(x, t) - V(x, t)$  の主要部が  $\Psi(x, t)$  であることを示す。

**命題 5.3** ([2]).  $l$  を非負整数とする。このとき、任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対して、次の評価が成り立つ。

$$\|\partial_x^l (v(\cdot, t) - V(\cdot, t) - \Psi(\cdot, t))\|_{L^p} \leq C \|yF_*\|_{L^1} t^{-\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p}) - 1 - \frac{l}{2}}, \quad t > 1. \quad (5.10)$$

ここで、 $v(x, t)$  と  $V(x, t)$  は (5.1) で定義されたものであり、 $\Psi(x, t)$  と  $F_*(y)$  は、それぞれ (3.3) および (3.4) で定義されたものである。



証明. はじめに,  $V(x, t)$  の定義 (5.1) から, 以下の初期値問題が得られる:

$$\begin{aligned} V_t - V_{xx} &= \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} t^{-1} \partial_x G(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 1, \\ V(x, 1) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

従って,  $V(x, t)$  は次の形に書き換えることが出来る.

$$V(x, t) = \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_1^t (G(t-\tau) * (\tau^{-1} \partial_x G(\tau))) (x) d\tau. \quad (5.11)$$

上記の (5.11) と  $v(x, t)$  の定義 (5.1), および  $F_*(y)$  の定義 (3.4) により, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} v(x, t) - V(x, t) &= \int_1^t \left( \partial_x G(t-\tau) * \left( G^3(\tau) - \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \tau^{-1} G(\tau) \right) \right) (x) d\tau \\ &= \int_1^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x G(x-y, t-\tau) \left( \frac{1}{8\sqrt{\pi^3}} \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3y^2}{4\tau}} - \frac{1}{8\sqrt{3\pi^3}} \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{y^2}{4\tau}} \right) dy d\tau \\ &= \partial_x \left( \int_1^t \tau^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} G(x-y, t-\tau) F_* \left( \frac{y}{\sqrt{\tau}} \right) dy d\tau \right) =: \partial_x K(x, t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

ここで, (5.12) の右辺の  $K(x, t)$  に対して, 変数変換を複数回行うことで, (2.7) と (3.4) により, 次が得られる.

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \int_1^t \tau^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} G(x-y, t-\tau) F_* \left( \frac{y}{\sqrt{\tau}} \right) dy d\tau \\ &= \int_1^t \tau^{-1} \int_{\mathbb{R}} G(x - \sqrt{\tau}z, t-\tau) F_*(z) dz d\tau \quad \left( z = \frac{y}{\sqrt{\tau}} \right) \\ &= \int_{\frac{1}{t}}^1 s^{-1} \int_{\mathbb{R}} G(x - \sqrt{ts}z, t(1-s)) F_*(z) dz ds \quad (\tau = ts) \\ &= t^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{t}}^1 s^{-1} \int_{\mathbb{R}} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}} - \sqrt{s}z, 1-s\right) F_*(z) dz ds \\ &= t^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{t}}^1 s^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}} - y, 1-s\right) F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right) dy ds \quad (y = \sqrt{s}z) \\ &= t^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{t}}^1 (G(1-s) * F(s)) \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) ds. \end{aligned}$$

故に, 上式と (5.12) を組み合わせれば, 次が成り立つ.

$$v(x, t) - V(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} \partial_x \left( \int_{\frac{1}{t}}^1 (G(1-s) * F(s)) \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) ds \right). \quad (5.13)$$

一方,  $\Psi(x, t)$  の定義 (3.3) から,  $\Psi(x, t)$  は次の形で書き換えることが出来る.

$$\Psi(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} \partial_x \left( \int_0^1 (G(1-s) * F(s)) \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) ds \right). \quad (5.14)$$

これより, (5.13) と (5.14) を用いれば,

$$\begin{aligned} &\left\| \partial_x^l (v(\cdot, t) - V(\cdot, t) - \Psi(\cdot, t)) \right\|_{L^p} \\ &= t^{-\frac{1}{2}} \left\| \partial_x^{l+1} \left( \int_0^{\frac{1}{t}} (G(1-s) * F(s)) \left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) ds \right) \right\|_{L^p} \\ &= t^{-1+\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}} \left\| \partial_x^{l+1} \left( \int_0^{\frac{1}{t}} (G(1-s) * F(s)) (\cdot) ds \right) \right\|_{L^p} \end{aligned} \quad (5.15)$$

が得られる. 次に,  $\int_{\mathbb{R}} F_*(y) dy = 0$  に注意して変数変換を行い, Young の不等式と補題 4.3 を用いれば,

$$\begin{aligned}
& \left\| \partial_x^{l+1} \left( \int_0^{\frac{1}{t}} (G(1-s) * F(s))(\cdot) ds \right) \right\|_{L^p} \\
&= \left\| \partial_x^{l+1} \int_0^{\frac{1}{t}} \int_{\mathbb{R}} G(\cdot - y, 1-s) s^{-\frac{3}{2}} F_* \left( \frac{y}{\sqrt{s}} \right) dy ds \right\|_{L^p} \\
&= \left\| \int_0^{\frac{1}{t}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 \partial_x^{l+2} G(\cdot - \eta y, 1-s) d\eta \right) y s^{-\frac{3}{2}} F_* \left( \frac{y}{\sqrt{s}} \right) dy ds \right\|_{L^p} \\
&= \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-1} \int_0^1 \left\| \int_{\mathbb{R}} \partial_x^{l+2} \left( \frac{1}{\eta} G \left( \frac{\cdot}{\eta} - y, \frac{1-s}{\eta^2} \right) \right) \frac{y}{\sqrt{s}} F_* \left( \frac{y}{\sqrt{s}} \right) dy \right\|_{L^p} d\eta ds \\
&\leq C \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-1} \left( \int_0^1 \eta^{-1} \eta^{-(l+2)} \eta^{\frac{1}{p}} \eta^{1-\frac{1}{p}+(l+2)} d\eta \right) (1-s)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{l+2}{2}} s^{\frac{1}{2}} \|yF_*\|_{L^1} ds \\
&\leq C \|yF_*\|_{L^1} \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{l+2}{2}} ds \leq C \|yF_*\|_{L^1} \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{1}{2}} ds \\
&\leq C \|yF_*\|_{L^1} t^{-\frac{1}{2}}, \quad t > 1
\end{aligned} \tag{5.16}$$

が得られる. 最後に, (5.15) と (5.16) を組み合わせることで, 所望の評価 (5.10) が成立する.  $\square$

定理 3.1 の証明. (5.3) に命題 5.1, 5.2, 5.3 を適用すれば, (3.6) が直ちに従い, 定理 3.1 が示される.  $\square$

## 参考文献

- [1] C.J. Amick, J.L. Bona and J.L. Schonbek: *Decay of solutions of some nonlinear wave equations*, J. Differ. Equ. **81** (1989) 1–49.
- [2] I. Fukuda and Y. Irino: *Higher-order asymptotic profiles for solutions to the Cauchy problem for a dispersive-dissipative equation with a cubic nonlinearity*, arXiv.2211.04667v1.
- [3] M.-H. Giga, Y. Giga and J. Saal: *Nonlinear partial differential equations—Asymptotic behavior of solutions and self-similar solutions—*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2010.
- [4] N. Hayashi and P.I. Naumkin: *Asymptotics for the Korteweg-de Vries–Burgers equation*, Acta Math. Sin. Engl. Ser. **22** (2006) 1441–1456.
- [5] E.I. Kaikina and H.F. Ruiz-Paredes: *Second term of asymptotics for KdVB equation with large initial data*, Osaka J. Math. **42** (2005) 407–420.
- [6] G. Karch: *Large-time behavior of solutions to non-linear wave equations: higher-order asymptotics*, Math. Meth. Appl. Sci. **22** (1999) 1671–1697.
- [7] G. Karch: *Self-similar large time behavior of solutions to Korteweg-de Vries–Burgers equation*, Non-linear Anal. **35** (1999) 199–219.
- [8] 松村昭孝, 西原健二: 非線形微分方程式の大域解—圧縮性粘性流の数学解析—, 日本評論社, 2004.
- [9] 戸田盛和: 波動と非線形問題 30 講, 朝倉書店, 1995.
- [10] M. Tribeche and A. Berbri: *Weakly nonlinear dust ion-acoustic waves in a charge varying dusty plasma with non-thermal electrons*, J. Plasma Physics **74** (2008) 245–259.