量子等質空間上の同変有限被覆の分類

東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻
星野 真生 (Mao HOSHINO)

概要

Gelfand-Naimark 双対性によると，可換 C*環とコンパクト Hausdorff 空間は完全に等価な概念である．したがって原理的には被覆写像も C*環の言葉で言い表すことができ，実際に対応する条件が一般の C*環の間の単射に対して定義できる．本講演ではそのような「非可換な被覆空間」に対する作用素環的・テンソル圏論的なアプローチを概説し，最後に量子群同変な場合における結果を紹介する．

作用素環論と呼ばれる関数解析の一分野がある．これは Murray と von Neumann による 1930 年代の研究に端を発する分野であり，雑に言ってしまえば Hilbert 空間上の有界作用素のなす環であって，然るべき位相について閉集合になっており，また随伴をとる操作で閉じているものを研究する分野である．ここでいう「然るべき位相」は作用素ノルムによる位相と強位相と呼ばれる位相の 2 種類があり，そのどちらを考えるかでそれぞれ **C*環**と **von Neumann 環**と呼ばれる．一見限定的な対象を考えているように思えるこの分野は，幾何学や数理物理学など様々な他分野と交流を持ちながら発展を遂げてきた．その大きな原動力となったのが次の定理である．

定理 1 (Gelfand-Naimark 双対性)**.** コンパクト Hausdorff 空間とその間の連続写像のなす圏と可換 C*環のなす圏は反変的に圏同値である．また，この圏同値はコンパクト Hausdorff 空間 X に対して X 上の複素数値連続関数全体 $C(X)$（に構造を付与したもの）を対応させることで得られる．

この定理はコンパクト Hausdorff 空間に対してできることは必ず可換 C*環に対してもできると主張しており，例えばコンパクト Hausdorff 空間の間の連続写像が被覆写像であるための必要十分条件をその上の関数環を用いて記述することができる．

定理 2 (c.f. [Wa90, Proposition 2.8.9.])**.** $\pi\colon Y \longrightarrow X$ をコンパクト Hausdorff 空間の間の連続写像とする．また $\pi^*\colon C(X) \longrightarrow C(Y)$ を $\pi^*(f) = f \circ \pi$ で定める．このとき π が被覆写像であるための必要十分条件は，次の条件を満たす $E\colon C(Y) \longrightarrow C(X)$ が存在することである：

(i) $C(Y)$ を π^* により両側 $C(X)$ 加群とみなしたとき，E は両側 $C(X)$ 加群準同型.
(ii) $E(1_Y) = 1_X$.
(iii) $f \geq 0 \Rightarrow E(f) \geq 0$.

(iv) $(\phi_i)_{i=1}^n \subset C(Y)$ で任意の $f \in C(Y)$ に対して次の等式を満たすものが存在する：

$$f = \sum_{i=1}^n \phi_i \pi^* \big(E(\overline{\phi_i} f)\big).$$

ここで重要なのはこれらの条件がいずれも一般の C*環に対しても意味をもつことである．一般に（単位的）C*環 B とその部分 C*環 A が与えられたとき，両側 A 加群準同型 $E\colon B \longrightarrow A$ で $E(1) = 1$ かつ $b \geq 0 \Rightarrow E(b) \geq 0$ を満たすものを B から A への**条件付期待値**という．また E が**指数有限**であるとは，$(v_i)_{i=1}^n \subset B$ で任意の $b \in B$ に対して次の等式を満たすものが存在することをいう ([Wa90, Definition 1.2.2.])：

$$b = \sum_{i=1}^n v_i E(v_i^* b).$$

これらの語彙を用いることにすれば，先程の定理 2 は全空間及び底空間がコンパクト Hausdorff 空間であるような被覆空間は可換 C*環の包含で指数有限な条件付期待値を持つようなものと等価であると主張していると理解できる．

さて，Gelfand-Naimark 双対性の重要な側面の 1 つに「**可換でない作用素環は空間の非可換化とみなせる**」という指導原理を与えていることが挙げられる．このことを踏まえると，C*環の包含であって指数有限な条件付期待値を持つものは或る種非可換な被覆空間と捉えることができる．被覆空間は良い条件下で基本群作用を用いた分類ができることが知られているため，この「非可換な被覆空間」についても何らかの分類結果を期待するのは自然である．そこで重要になるのが **C*（多重）テンソル圏** ([NT13, Definition 2.2.1.]) である．これは半単純な $\mathbb{C}$ 線型圏に射の随伴やノルム，また対象のテンソル積などを付与したものであり，例えば Hilbert 空間のなす圏 Hilb やコンパクト Hausdorff 空間 X 上のエルミート計量付き複素ベクトルバンドルのなす圏が典型例である．今回の「非可換な被覆空間」で重要な役割を果たすのは後者の非可換版とも言える A 上の **correspondence** のなす圏 Corr_A である．A 上の correspondence とは，両側 A 加群 M に写像 $\langle -,- \rangle_A : E \times E \longrightarrow A$ で以下の条件を満たすものを付与したものの中で，然るべきノルムについて完備なもののことである：

$$\langle \xi, \xi \rangle_A \geq 0, \quad \langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \eta, \xi \rangle_A^*, \quad \langle \xi, \eta a \rangle_A = \langle \xi, \eta \rangle_A a, \quad \langle \xi, a\eta \rangle_A = \langle a^* \xi, \eta \rangle_A.$$

例えば指数有限な条件付期待値 $E\colon B \longrightarrow A$ が与えられると，そこから A 上の correspondence B_E が得られる．これは B（の適切な完備化）に $\langle b, b' \rangle_A = E(b^* b')$ により右 A 値内積を入れたものである．ここで重要なのは E が指数有限であるおかげで積写像が有界両側 A 準同型 $m\colon B_E \otimes_A B_E \longrightarrow B_E$ を与えることである（ここでのテンソル積の意味は省略する）．したがって組 $(B_E, m, A \subset B_E)$ は Corr_A 内の代数対象のようなものを与える．より正確には **Q-system** ([LR97, Section 6]) と呼ばれる代数対象の C*環版と呼ぶべきものが構成されており，逆に Corr_A 内の Q-system が与えられると，そこから指数有限な条件付期待値をもつ包含 $A \subset B$ を作ることができる．

以上のことから A を底空間とする非可換な被覆空間を分類することは，Corr_A 内の Q-system を分類することに帰着される．もちろん多くの場合に Corr_A は非常に巨大な圏であるためこのような分類を完全に遂行することはできないが，それでも分類をする際には非常に大きな指針となるものである．

今回の私の研究では以上の話をコンパクト量子群作用が入った状況で取り扱い，単連結コンパクト Lie 群の神保-Drinfeld q 変形という広く興味を持たれているコンパクト量子群の作用について，分類問題をその極大トーラスの作用に関する分類問題に帰着できることを示した．

定理 3 (H.)**.** $\mathbb{G}$ をコンパクト量子群，$\mathbb{K}$ をその最大 Kac 型部分量子群とする．もし $\mathbb{K}$ がコンパクト群であれば，任意の $\mathbb{K}$ の量子等質空間 A について，誘導関手 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}\colon \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Corr}_A^{\mathrm{rf}} \longrightarrow \mathbb{G}\text{-}\mathrm{Corr}_{\mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}A}^{\mathrm{rf}}$ は C*テンソル圏の圏同値を与える．

もし $\mathbb{G}$ が単連結コンパクト Lie 群 G の神保-Drinfeld q 変形 G_q である場合，その最大 Kac 型部分量子群は極大トーラス T に一致する ([To07, Lemma 4.10.])．また A を自明な T 作用付き C*環 $\mathbb{C}$ とすれば，その誘導作用 $\mathrm{Ind}_T^{G_q}\mathbb{C}$ は $C(T\backslash G_q)$ に一致する．$T\text{-}\mathrm{Corr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{rf}} \cong \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}T$ が容易に観察できるため，以上のことから次のような系を得ることができる．

系 4 (H.)**.** $C(T\backslash G_q)$ 上の G_q 同変有限被覆は，T 作用付き有限次元 C*環により分類される．

参考文献

[DY13] K. De Commer, M. Yamashita, *Tannaka-Krein duality for compact quantum homogeneous spaces. I. General theory*, Theory Appl. Categ. **28** (2013), No. 31, 1099-1138.

[HKLS] R. Høegh-Krohn, M. Landstad, E. Størmer, *Compact ergodic groups of automorphisms*, Ann. of Math., **114** (1981), 75-86.

[LR97] R. Longo, J. E. Roberts, *A theory of dimension*, K-Theory **11** (1997), 103-159.

[Ne14] S. Neshveyev, *Duality theory for nonergodic actions*, Münster J. Math. **7** (2014), no. 2, 413-437.

[NT13] S. Neshveyev, R. Tuset, *Compact quantum groups and their representation categories*, Specialized Courses, vol. 20. SMF, 2013.

[NY14] S. Neshveyev, M. Yamashita, *Categorical duality for Yetter-Drinfeld algebras*, Doc. Math. **19** (2014), 1105-1139.

[NY17] S. Neshveyev, M. Yamashita, *Poisson boudaries of monoidal categories*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **50** (2017), no. 4, 927-972.

[Sc13] G. Schaumann, *Traces on module categories over fusion categories*, J. Algebra **379** (2013), 382-425.

[To07] R. Tomatsu, *A characterization of right coideals of quotient type and its application to classification of Poisson boudaries*, Comm. Math. Phys. **275** (2007), no. 1, 271-296.

[To15] R. Tomatsu, *On product type actions of* G_q, Adv. Math. **269** (2015), no. 10, 162-196.

[Wa90] Y. Watatani, *Index for C*-subalgebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **83** (1990), no. 424, vi+117 pp.