

力学的手法に基づく Hamilton-Jacobi 方程式の粘性解に対する下からの勾配評価*

北海道大学大学院 理学院 数学専攻 博士前期課程 2 年
廣瀬 和也 (Kazuya HIROSE)[†]

概要

本講演では, Hamilton-Jacobi 方程式の粘性解に対する, 下からの勾配評価の新たな証明を与える. 粘性解に対する下からの勾配評価は, Barron-Jensen 解の概念を利用する方法により Ley [21] で既に得られているが, 本講演では Albano, Cannarsa, Sinestrari [2] で与えられたハミルトン系の解の性質を利用する方法で, よりよい勾配評価を導く. さらに, 勾配評価が成り立つ領域についてもよりよい結果を得たので, それを紹介する.

1 導入

本講演では, 時間発展型の Hamilton-Jacobi 方程式に対する次の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + H(x, t, D_x u(x, t)) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (\text{HJ})$$

ここで $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数, $u_t = \partial_t u$, $D_x u = (\partial_{x_i} u)_{i=1}^n$ はその微分を表す. さらに, 本稿を通してハミルトニアン $H : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は連続, 初期値 $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ はリプシッツ連続とする.

本講演の目的は, ハミルトニアン $H = H(x, t, p)$ が p について凸であるときに, (HJ) の粘性解 u に対する下からの勾配評価を導くことである. より具体的には, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ を固定したときに, 任意の空間劣微分 $p \in D_x^- u(x, t)$ に対して次の不等式が成り立つことを示す:

$$|p| \geq C.$$

ここで, C は初期値の劣微分に依存する値である (正確な主張は定理 3.2 を参照せよ). (HJ) の解に対する下からの勾配評価は, 異なる手法により既に [21] で研究されている. [21] の結果と比較し, 本結果の方が適当な意味でよりよい評価を与えていることも示す (定理 4.1, 4.2).

(HJ) の解に対する下からの勾配評価は, 非局所方程式の解の一意性を示すのに有効であることが知られている ([8]). また, 下からの勾配評価を用いることで, 界面の肥大化が起きないことや, 界面の局所リプシッツ性などの正則性が分かる ([21]). これらの重要性にも関わらず, 下からの勾配評価

* 本研究は, 浜向直氏 (北海道大学) との共同研究に基づく.

[†] 著者は公益財団法人ウシオ財団様の支援を受けています. e-mail: hirose.kazuya.w2@elms.hokudai.ac.jp

に関する研究はほとんど行われていない。上からの勾配評価と違って、下からの勾配評価を導くために粘性解に対する弱いベルンシュタイン法 ([4]) は適用できない。また、ハミルトニアン H が凸でない場合には下からの勾配評価が成り立つとは限らない。そのため、ハミルトニアンの凸構造を、下からの勾配評価を導くためにどのように利用するかが非常に大切である。

本稿では、ハミルトン系の解を利用して下からの勾配評価を導出する。具体的には、近年明らかにされた凸ハミルトニアンに対する結果 ([2]) を利用し、初期勾配が近似ハミルトン系の解に沿ってどのように伝搬するかを調べる (定理 2.6 を参照せよ)。

既に言及した通り、(HJ) の解に対する下からの勾配評価は、異なる手法により既に [21] で研究されている。[21] では、Barron-Jensen 解 ([9]) の概念と解の上限近似・下限近似を用いて勾配評価を導いていた。その証明において重要となる性質は、解の下限近似が適切な誤差項をもつ (HJ) の劣解となることである。また [8] では、2 階の幾何学的方程式の解に対して下からの勾配評価が得られている。その証明では、解の連続依存性が重要な形で用いられている。これらの勾配評価は、非局所な幾何学的方程式に対する時間局所的な解の一意性を示すために応用されている。1 階の非局所方程式に対する関連した結果については、[7, 5, 6] などを参照せよ。

さらに、他の形の下からの勾配評価についても言及する。空間リプシッツ定数 $\|D_x u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ に対する下限は [15, 17] で調べられている。[15] では、線形の放物型方程式と Hamilton-Jacobi 方程式に対して、 t に関して最適な次数をもつ下限が導かれている。より一般の完全非線形放物型方程式は [17] で調べられている。

■ H への仮定 ハミルトニアン H に対する仮定は次の通りである：

(H1) ある $C_1 \geq 0, \beta \in \{0, 1\}$ が存在して、

$$|H(x, t, p) - H(y, t, p)| \leq C_1(\beta + |p|)|x - y| \quad (\forall (x, t, p), (y, t, p) \in \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^n).$$

(H2) ある $A_2, B_2 \geq 0$ が存在して、

$$|H(x, t, p) - H(x, t, q)| \leq (A_2|x| + B_2)|p - q| \quad (\forall (x, t, p), (x, t, q) \in \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^n).$$

(H3) 任意の $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ に対して、 $p \mapsto H(x, t, p)$ は \mathbb{R}^n 上凸。

(H4) 任意の $R > 0$ に対して、 H は $\mathbb{R}^n \times [0, T] \times \overline{B_R(0)}$ 上有界かつ一様連続。

ここで $|\cdot|$ は通常のユークリッドノルム、 $B_r(x)$ は中心 x 、半径 r の開球を表し、 $\overline{B_r(x)}$ はその閉包とする。(H1)–(H3) は [21] と同じ仮定であり、(H4) は (HJ) の粘性解の存在と一意性を保証するために課している (粘性解については 2.1 節を参照せよ)。これらの仮定の下で、(HJ) の一意解 u は $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ 上リプシッツ連続になることが知られている ([21, 定理 4.1], [19, 付録 A], [1, 2 章, 5, 8 節])。

2 準備

2.1 粘性解

(HJ) の解として、粘性解と呼ばれる弱解を考える。粘性解の概念は、1983 年に Crandall, Lions ([11]) により導入された解の概念である ([12] も参照せよ)。これ以降、粘性解は Hamilton-Jacobi 方程式を始めとする一階偏微分方程式や完全非線形楕円・放物型方程式の一般的な弱解として広く受け入れられている。粘性解の基本的な理論については [1, 3, 10, 13, 14, 20, 22] など参照せよ。

まずはじめに、広義の勾配についていくつかの記号を導入する ([13, 3 章])。以下では、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は通常のユークリッド内積を表す。

定義 2.1 (広義の勾配). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を空でない開集合とし、 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ とする。

(1) f の x における劣微分 $D^-f(x)$ を次で定義する。

$$D^-f(x) := \{D\phi(x) \mid \phi \in C^1(\Omega), f - \phi \text{ は } x \text{ で極小値をとる}\}.$$

f の x における優微分 $D^+f(x)$ を、上の「極小値」を「極大値」に置き換えたもので定義する。さらに、関数 $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ と $(z, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ に対して、

$$D_x^\pm u(z, t) := \{p \mid (p, \tau) \in D^\pm u(z, t)\}$$

と定める。

(2) f の x における近接劣微分 $D_{pr}^-f(x)$ を次で定義する。

$$D_{pr}^-f(x) := \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \text{ある } K, r > 0 \text{ が存在して,} \\ f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle - \frac{K}{2}|y - x|^2 \quad (\forall y \in B_r(x) \subset \Omega) \end{array} \right\}.$$

次に、劣微分と優微分を用いて粘性解を定義する。

定義 2.2 (粘性解). $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ が (HJ) の粘性劣解 (resp. 粘性優解) であるとは、次の 2 条件を満たすことをいう：

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $u(x, 0) \leq u_0(x)$ (resp. $u(x, 0) \geq u_0(x)$).

(2) 任意の $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ と $(p, \tau) \in D^+u(x, t)$ (resp. $(p, \tau) \in D^-u(x, t)$) に対して、

$$\tau + H(x, t, p) \leq 0 \quad (\text{resp. } \geq 0).$$

u が粘性劣解かつ粘性優解であるとき、粘性解という。

我々は下からの勾配評価に興味があるが、上からの勾配評価については次のことが知られている。

定理 2.3 (上からの勾配評価, [1, 2 章, 定理 8.1]). H は (H1), (H4) を満たすとする。 u は (HJ) の粘性解, $t \in (0, T)$ とする。このとき、次の不等式が成り立つ。

$$\|D_x u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq e^{C_1 t} \|Du_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \beta(e^{C_1 t} - 1).$$

ここで, $\|Du_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $\|D_x u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ は, それぞれ \mathbb{R}^n 上での u_0 , $u(\cdot, t)$ のリプシッツ定数である.

上からの勾配評価については, 他にも [21, 定理 4.1], [19, 付録 A], [1, 2 章, 5, 8 節]などを参照せよ. [1, 2 章, 定理 8.1] では u_0 が有界であることを仮定しているが, その証明を見ると, 有界性を仮定しなくてもよいことが分かる. したがって, 定理 2.3 では u_0 の有界性を仮定しなかった.

2.2 ラグランジアンとハミルトン系

この節では, ハミルトン系に関するいくつかの事実について述べる. 特に, 主結果の証明の際に用いる [2] の結果を述べる. 詳細は, [13, 6 節, 付録 A.2] や [18] を参照せよ.

以下の結果を適用するためには, 通常 (H1)–(H4) の他に, ハミルトニアン $H = H(x, t, p)$ に p に関する一様凸性と優線形性 ([2, page 1417, (H1)–(H3)]), 加えて次の滑らかさと狭義凸性を仮定する:

(H5) $H \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^n)$.

(H3)_{st} 任意の $(x, t, p) \in \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$ に対して, $D_{pp}H(x, t, p)$ は正定値.

しかし, (H1)–(H4) を満たす H_ε で H を適切に近似することで, (H5) と (H3)_{st} を満たすように出来る (2.3 節を参照). また, 局所化の議論 ([16, 注意 2.4]) により, 以下の結果では p に関する一様凸性と優線形性の仮定を取り除くことができる. そのため, 以下では簡単のため H を考えることにする.

H に付随するラグランジアン (**Lagrangian**) $L: \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める:

$$L(x, t, q) := \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, q \rangle - H(x, t, p) \}.$$

このとき, (HJ) の解 u は次のように表される.

$$u(x, t) = \inf_{\xi \in \mathcal{C}(x, t)} \left\{ u_0(\xi(0)) + \int_0^t L(\xi(s), s, \xi'(s)) ds \right\}. \quad (2.1)$$

ここで,

$$\mathcal{C}(x, t) := \{ \xi: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \xi \text{ は } [0, t] \text{ 上絶対連続, } \xi(t) = x \}.$$

また $\mathcal{C}_{\min}(x, t)$ は (2.1) の下限を実現するような $\xi \in \mathcal{C}(x, t)$ 全体の集合とし, $\mathcal{R}(u)$ は (HJ) の解 u の微分可能な点全体の集合とする. つまり,

$$\mathcal{R}(u) := \{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T) \mid u \text{ は } (x, t) \text{ で微分可能} \}.$$

定理 2.4 ([13, page 153, 定理 6.4.7]). H は (H1)–(H5), (H3)_{st} を満たすとする. u は (HJ) の粘性解, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ とする. このとき, $\mathcal{C}_{\min}(x, t) \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{C}_{\min}(x, t) \subset C^1([0, t])$ となる. さらに任意の $\xi \in \mathcal{C}_{\min}(x, t)$ に対して, $(\xi(s), s) \in \mathcal{R}(u)$ ($\forall s \in (0, t)$) が成り立つ.

$\xi \in \mathcal{C}_{\min}(x, t)$ に対して, $\eta: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ を次のように定める.

$$\eta(s) := D_q L(\xi(s), s, \xi'(s)) \quad (s \in [0, t]).$$

すると $\eta \in C^1([0, t])$ となる. この曲線 η を, ξ に付随した双対曲線という.

次に、以下のハミルトン系を考える:

$$\begin{cases} \text{(a)} \ \xi'(s) = D_p H(\xi(s), s, \eta(s)), \\ \text{(b)} \ \eta'(s) = -D_x H(\xi(s), s, \eta(s)). \end{cases} \quad (2.2)$$

定理 2.5 ([13, 定理 6.3.3, 6.4.8]). H は (H1)–(H5), (H3)_{st} を満たすとする. u は (HJ) の粘性解, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ とする. $\xi \in \mathcal{C}_{\min}(x, t)$ とし, $\eta \in C^1([0, t])$ を ξ に付随した双対曲線とする. このとき, (ξ, η) は (2.2) の解であり,

$$\eta(s) = D_x u(\xi(s), s) \quad (s \in (0, t)).$$

我々の勾配評価を導くために重要な役割を担っているのは、次で述べる [2] で得られた結果である.

定理 2.6 ([13, 定理 6.4.9], [2, 命題 2.2, 定理 3.2]). H は (H1)–(H5), (H3)_{st} を満たすとする. u は (HJ) の粘性解, $(x, t) \in \mathcal{R}(u)$ とする. $(\xi, \eta) \in C^1([0, 1])^2$ は以下の終端条件を課した (2.2) の解とする.

$$\xi(t) = x, \quad \eta(t) = D_x u(x, t). \quad (2.3)$$

このとき, $\xi \in \mathcal{C}_{\min}(x, t)$ であり $\eta(0) \in D_{pr}^- u_0(\xi(0))$ となる. ここで, $D_{pr}^- u_0(y)$ は定義 2.1 の近接劣微分である.

$K \subset \mathbb{R}^n$ を空でない凸集合とする. 関数 $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ が K 上半凹 (**semiconcave**) であるとは, $C \geq 0$ に対して $f - \frac{C}{2} |\cdot|^2$ が K 上凹であることをいう.

定理 2.7 ([13, 定理 6.4.1, 系 6.4.4]). H は (H1)–(H5), (H3)_{st} を満たすとする. このとき, (HJ) の粘性解 u は $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ 上局所半凹となる.

2.3 ハミルトニアン近似

(H1)–(H4) を満たすハミルトニアン H に対して, 滑らかさ (H5) と狭義凸性 (H3)_{st} を満たす H_ε で H を近似する. まず, H の定義域を

$$H(x, t, p) = \begin{cases} H(x, 0, p) & (t < 0), \\ H(x, T, p) & (t > T) \end{cases}$$

と拡張する. $\varepsilon \in (0, 1]$ とし, 近似ハミルトニアン $H_\varepsilon : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する:

$$H_\varepsilon(x, t, p) = (H * \rho_\varepsilon)(x, t, p) + h_\varepsilon(p) \quad ((x, t, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n). \quad (2.4)$$

ここで $h_\varepsilon(p) := \varepsilon \sqrt{|p|^2 + 1}$ ($p \in \mathbb{R}^n$) であり,

$$(H * \rho_\varepsilon)(x, t, p) = (H * \rho_\varepsilon)(z) := \int_{B_\varepsilon(0)} H(z - w) \rho_\varepsilon(w) dw.$$

ただし, $\rho_\varepsilon : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ は以下を満たす通常の軟化子とする.

$$\text{supp } \rho_\varepsilon := \overline{\{z \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \rho_\varepsilon(z) \neq 0\}} = \overline{B_\varepsilon(0)}, \quad \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z) dz = 1.$$

注意 2.8. ρ_ε と h_ε の性質から, H_ε は (H5), (H3)_{st} を満たすことがわかる. さらに, H_ε は H と同じ定数 C_1 で (H1) を満たす. H_ε は (H2) も満たすが, $|Dh_\varepsilon(p)| \leq \varepsilon$ となることを考慮すると, リプシッツ定数は $A_2|x| + B_2$ ではなく $A_2|x| + B_2 + \varepsilon$ となる.

H_ε の定義から, H_ε は H に \mathbb{R}^{2n+1} 上局所一様収束することがわかる. したがって, 粘性解に対する安定性の結果 ([10, 6 節]) から, 解の局所一様収束が従う.

命題 2.9. H は (H1)–(H4) を満たすとし, H_ε は (2.4) で定義される近似ハミルトニアンとする. u は (HJ) の粘性解とし, u_ε は近似方程式

$$(u_\varepsilon)_t(x, t) + H_\varepsilon(x, t, D_x u_\varepsilon(x, t)) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T)$$

の粘性解とする. このとき, $\varepsilon \rightarrow +0$ としたときに u_ε は u に $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ 上局所一様収束する.

3 主結果

結果を述べるために, 以下の記号を準備する.

定義 3.1. $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ に対して,

$$\begin{aligned} \bar{S}(x, t; u_0) &:= \lim_{\delta \rightarrow +0} \sup \left\{ |p| \mid p \in D_{pr}^- u_0(y), y \in \overline{B_{R(x, t) + \delta}(x)} \right\}, \\ \underline{I}(x, t; u_0) &:= \lim_{\delta \rightarrow +0} \inf \left\{ |p| \mid p \in D_{pr}^- u_0(y), y \in \overline{B_{R(x, t) + \delta}(x)} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

と定める. ただし,

$$R(x, t) := \begin{cases} \left(\frac{B_2}{A_2} + |x| \right) (e^{A_2 t} - 1) & (A_2 > 0), \\ B_2 t & (A_2 = 0). \end{cases}$$

であり, A_2, B_2 は (H2) に現れる定数である.

以上の準備の下で, 我々の主結果を述べる.

定理 3.2 ([16, 定理 4.3]). H は (H1)–(H4) を満たすとする. u は (HJ) の粘性解とし, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ とする. このとき, 任意の劣微分 $p \in D_x^- u(x, t)$ に対して以下の評価が成り立つ.

$$\underline{I}(x, t; u_0) e^{-C_1 t} - \beta(1 - e^{-C_1 t}) \leq |p| \leq \bar{S}(x, t; u_0) e^{C_1 t} + \beta(e^{C_1 t} - 1). \quad (3.2)$$

ここで, β, C_1 は (H1) に現れる定数である.

証明の概略. u が (x, t) で微分可能でない場合には, 定理 2.7 の性質から $D_x^- u(x, t) = \emptyset$ となるので, u が (x, t) で微分可能である場合を考えれば十分である. (ξ, η) を, $(\xi(t), \eta(t)) = (x, D_x u(x, t))$ を終端条件とする (2.2) の解とすると, 定理 2.4 から, u は任意の $(\xi(s), s)$ ($s \in (0, t)$) で微分可能である. また, 定理 2.6 から次の関係式が成り立つ.

$$\eta(0) \in D_{pr}^- u_0(\xi(0)). \quad (3.3)$$

次に、 Gronwall の補題を用いて $|\eta(t) - \eta(0)|$ と $|\xi(t) - \xi(0)|$ を評価する. $|\eta(t) - \eta(0)|$ の評価から, $|\eta(0)|$ を用いて $|\eta(t)| = |D_x u(x, t)|$ に対する次の不等式が得られる.

$$|\eta(0)|e^{-C_1 t} - \beta(1 - e^{-C_1 t}) \leq |D_x u(x, t)| \leq |\eta(0)|e^{C_1 t} + \beta(e^{C_1 t} - 1). \quad (3.4)$$

一方で $|\xi(t) - \xi(0)| = |x - \xi(0)|$ の評価から, $\xi(0)$ の存在可能な位置に対する次の不等式が得られる.

$$|x - \xi(0)| \leq R(x, t). \quad (3.5)$$

上で得られた 2 つの評価と (3.3) から, (3.2) の勾配評価が得られる. \square

注意 3.3. 等高面方程式の場合, つまり H が p について正斉次 1 次の場合は, 定理 3.2 の評価はよりよいもののできる ([16, 定理 5.4]). 実際, (3.1) の y の条件に $|u_0(y) - u(x, t)| < \delta$ を加えて定めた \bar{S}, \underline{I} に対して評価 (3.2) が成り立つ. これは, $u(x, t)$ と同じ等高面 (付近) における初期値 u_0 の勾配だけを見れば十分であることを意味する.

4 先行結果との比較

$x_0 \in \mathbf{R}^n, r, \theta > 0$ とし, 初期値の勾配について次を仮定する.

$$|p| \geq \theta \quad (\forall x \in B_r(x_0), \forall p \in D^- u_0(x)).$$

このとき [21, 定理 4.2] では, 適当な領域 $\mathcal{D}(x_0, r) \subset \mathbf{R}^n \times (0, T)$ (ある種の影響領域を表す) と, θ を含む関数 $l(t)$ を用いた,

$$|p| \geq l(t) \quad (\forall (x, t) \in \mathcal{D}(x_0, r), \forall p \in D_x^- u(x, t)) \quad (4.1)$$

という形の評価が得られている. 我々の場合は, 定理 3.2 により,

$$\begin{aligned} L(t) &= \theta e^{-C_1 t} - \beta(1 - e^{-C_1 t}), \\ \mathcal{E}(x_0, r) &= \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, T) \mid R(x, t) + |x - x_0| < r\} \end{aligned}$$

とおけば, (4.1) の $l(t), \mathcal{D}(x_0, r)$ を, それぞれ $L(t), \mathcal{E}(x_0, r)$ で置き換えた評価が成り立つ.

次の定理 4.1, 4.2 は, 我々の勾配評価はよりよく, かつより広い領域で得られていることを主張している. また図 1 では, ある A_2, B_2 に対する $\mathcal{D}(x_0, r), \mathcal{E}(x_0, r)$ を示している (詳細は [16, 注意 6.9] を参照せよ).

定理 4.1 ([16, 定理 6.3]). (1) $\beta = 0$ ならば, $l(t) < L(t)$ ($t \in (0, \infty)$) が成り立つ.

(2) $\beta = 1$ とする. $t_l, t_L > 0$ を, それぞれ $l(t_l) = 0, L(t_L) = 0$ を満たす時刻とする. このとき, $t_l < t_L$ かつ $l(t) < L(t)$ ($t \in (0, t_l]$) が成り立つ.

定理 4.2 ([16, 定理 6.5]). $x_0 \in \mathbf{R}^n, r > 0$ に対して,

$$(A_2, B_2) = (0, 0) \text{ ならば, } \mathcal{D}(x_0, r) = \mathcal{E}(x_0, r), \quad (A_2, B_2) \neq (0, 0) \text{ ならば, } \mathcal{D}(x_0, r) \subsetneq \mathcal{E}(x_0, r).$$

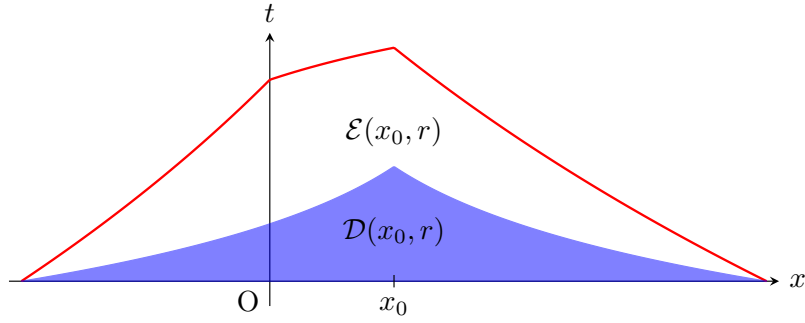


図 1: $A_2(r - |x_0|) < B_2$.

5 定理 3.2 の証明の補足

この節では、定理 3.2 で現れた不等式 (3.4), (3.5) の導出について詳しく説明する. ここで, (ξ, η) は $(\xi(t), \eta(t)) = (x, D_x u(x, t))$ を終端条件とする (2.2) の解であることを思い出そう.

$\tau \in [0, t)$ とする. (2.2)(b) の両辺を $[\tau, t]$ で積分すると,

$$\eta(t) - \eta(\tau) = - \int_{\tau}^t D_x H(\xi(s), s, \eta(s)) ds.$$

ここで (H1) を用いると,

$$\begin{aligned} |\eta(t) - \eta(\tau)| &\leq \int_{\tau}^t |D_x H(\xi(s), s, \eta(s))| ds \leq \int_{\tau}^t C_1(\beta + |\eta(s)|) ds \\ &\leq \int_{\tau}^t C_1(\beta + |\eta(t)| + |\eta(t) - \eta(s)|) ds \\ &= C_1(\beta + |\eta(t)|)(t - \tau) + C_1 \int_{\tau}^t |\eta(t) - \eta(s)| ds \end{aligned} \quad (5.1)$$

となる. 上式にグロンウォールの不等式を用いると, 次の不等式が得られる.

$$|\eta(t) - \eta(\tau)| \leq C_1(\beta + |\eta(t)|)(t - \tau) + e^{C_1(t-\tau)} \int_{\tau}^t e^{-C_1(t-s)} C_1^2(\beta + |\eta(t)|)(t - s) ds.$$

特に $\tau = 0$ とすれば,

$$\begin{aligned} |\eta(t) - \eta(0)| &\leq C_1(\beta + |\eta(t)|)t + e^{C_1 t} \int_0^t e^{-C_1(t-s)} C_1^2(\beta + |\eta(t)|)(t - s) ds \\ &= C_1(\beta + |\eta(t)|) \left\{ t + C_1 \int_0^t (t - s) e^{C_1 s} ds \right\}. \end{aligned}$$

ここで上式の括弧内の第 2 項は, $C_1 \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} C_1 \int_0^t (t - s) e^{C_1 s} ds &= \int_0^t (t - s) (e^{C_1 s})' ds = [(t - s) e^{C_1 s}]_0^t + \int_0^t e^{C_1 s} ds \\ &= -t + \left[\frac{e^{C_1 s}}{C_1} \right]_0^t = -t + \frac{e^{C_1 t} - 1}{C_1}. \end{aligned}$$

したがって、次の不等式が得られる。

$$|\eta(t) - \eta(0)| \leq (\beta + |\eta(t)|)(e^{C_1 t} - 1). \quad (5.2)$$

この不等式は、 $C_1 = 0$ のときも成り立つ。 $\eta(t) = D_x u(x, t)$ であるので、

$$|D_x u(x, t) - \eta(0)| \leq (\beta + |D_x u(x, t)|)(e^{C_1 t} - 1)$$

を得る。この不等式に三角不等式 $|\eta(0)| - |D_x u(x, t)| \leq |D_x u(x, t) - \eta(0)|$ を適用すれば、(3.4) の下からの評価が導かれる。また $\tau \in (0, t]$ とし (2.2)(b) の両辺を $[0, \tau]$ で積分すれば、上と同様にして (3.4) の上からの評価が導かれる。

(3.5) は、(3.4) の下からの評価と同様に導出できる。実際、 $\tau \in [0, t)$ とし、(2.2)(a) の両辺を $[\tau, t]$ で積分すれば、

$$\begin{aligned} |\xi(t) - \xi(\tau)| &= \left| \int_{\tau}^t D_p H(\xi(s), s, \eta(s)) ds \right| \leq \int_{\tau}^t |D_p H(\xi(s), s, \eta(s))| ds \\ &\leq \int_{\tau}^t (A_2 |\xi(s)| + B_2) ds \end{aligned}$$

となる。 $A_2 = 0$ ならば、右辺の積分を計算して $\tau = 0$ とすれば、 $|\xi(t) - \xi(0)| \leq B_2 t$ となる。 $\xi(t) = x$ であるので、(3.5) の第 2 式が得られる。 $A_2 > 0$ ならば、(5.1) と上の不等式を比較する。すると、(5.2) の C_1, β を、それぞれ $A_2, \frac{B_2}{A_2}$ に置き換えた次の不等式を得ることができる。

$$|\xi(t) - \xi(0)| \leq \left(\frac{B_2}{A_2} + |\xi(t)| \right) (e^{A_2 t} - 1).$$

$\xi(t) = x$ であるので、(3.5) の第 1 式が得られる。

参考文献

- [1] Y. Achdou, G. Barles, H. Ishii, G. L. Litvinov, *Hamilton–Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications*, Lecture Notes in Mathematics **2074**, Springer, Heidelberg; Fondazione C.I.M.E., Florence, 2011.
- [2] P. Albano, P. Cannarsa, C. Sinestrari, *Generation of singularities from the initial datum for Hamilton–Jacobi equations*, Journal of Differential Equations **268** (2020), 1412–1426.
- [3] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations*, With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.
- [4] G. Barles, *A weak Bernstein method for fully nonlinear elliptic equations*, Differential Integral Equations **4** (1991), 241–262.
- [5] G. Barles, P. Cardaliaguet, O. Ley, R. Monneau, *Global existence results and uniqueness for dislocation equations*, SIAM J. Math. Anal. **40** (2008), 44–69.
- [6] G. Barles, P. Cardaliaguet, O. Ley, A. Monteillet, *Uniqueness results for nonlocal Hamilton–Jacobi equations*, J. Funct. Anal. **257** (2009), 1261–1287.

- [7] G. Barles, O. Ley, *Nonlocal first-order Hamilton-Jacobi equations modelling dislocations dynamics*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 1191–1208.
- [8] G. Barles, O. Ley, H. Mitake, *Short time uniqueness results for solutions of nonlocal and non-monotone geometric equations*, Math. Ann. **352** (2012), 409–451.
- [9] E. N. Barron, R. Jensen, *Semicontinuous viscosity solutions for Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians*, Comm. Partial Differential Equations **15** (1990), 1713–1742.
- [10] M. G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions, *User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), 1–67.
- [11] M. G. Crandall, P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 1–42.
- [12] M. G. Crandall, L. C. Evans, P.-L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **282**(2) (1984), 487502.
- [13] P. Cannarsa, C. Sinestrari, *Semiconcave functions, Hamilton–Jacobi equations, and optimal control*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **58**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.
- [14] L. C. Evans, *Partial differential equations. The second edition*, Graduate Studies in Mathematics **19**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [15] Y. Fujita, *Lower estimates of L^∞ -norm of gradients for Cauchy problems*, J. Math. Anal. Appl. **458** (2018), 910–924.
- [16] N. Hamamuki, K. Hirose, *A dynamical approach to lower gradient estimates for viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations*, to appear in SIAM J. Math. Anal.
- [17] N. Hamamuki, S. Kikkawa, *A lower spatially Lipschitz bound for solutions to fully nonlinear parabolic equations and its optimality*, to appear in Indiana Univ. Math. J.
- [18] H. Ishii, *Lecture notes on the weak KAM theorem*,
<http://www.f.waseda.jp/hitoshi.ishii/>
- [19] N. Ichihara, H. Ishii, *Asymptotic solutions of Hamilton–Jacobi equations with semi-periodic Hamiltonians*, Comm. Partial Differential Equations **33** (2008), 784–807.
- [20] S. Koike, *A beginner’s guide to the theory of viscosity solutions*, MSJ Memoirs **13**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.
- [21] O. Ley, *Lower-bound gradient estimates for first-order Hamilton–Jacobi equations and applications to the regularity of propagating fronts*, Adv. Differential Equations **6** (2001), 547–576.
- [22] H. V. Tran, *Hamilton–Jacobi equations—theory and applications*, Graduate Studies in Mathematics **213**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2021.