A criterion for the existence of a plane model with two inner Galois points for algebraic curves

山形大学 理学部
東根一樹 (Kazuki HIGASHINE)

概要

本稿では論文 [14] の内容を基にして "内 Galois 点を 2 つもつ平面曲線の存在に関する判定法" とそれを用いた例の構成について述べる.

1 導入

k を標数 $p \geq 0$ の代数閉体とし, $C \subset \mathbb{P}^2$ を k 上定義された次数 $d = \deg(C) \geq 2$ の平面 (代数) 曲線とする. C の特異点集合を $\mathrm{Sing}(C)$, 関数体を $k(C)$ で表す. また, 相異なる 2 点 $P, Q \in \mathbb{P}^2$ に対して, P と Q を結ぶ $\mathbb{P}^2$ 内の直線を $\overline{PQ}$ で表す.

1 点 $P \in \mathbb{P}^2$ をとり, P からの射影 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1; Q \mapsto \overline{PQ}$ を考える. π_P は支配的な有理写像であるから, 関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ をひきおこす. この状況で吉原久夫氏 (新潟大学) は次の定義を与えた.

定義 (吉原久夫, 1996, [3, 16, 19])**.** $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ が Galois 拡大であるとき, P を C の Galois 点という.

Galois 点について, あとで用いる用語と記号を定義する.

定義. P を Galois 点とする.

(1) $P \in C$ (resp. $P \notin C$) であるとき, P を内 Galois 点 (resp. 外 Galois 点) という.
(2) $P \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ (resp. $P \in \mathrm{Sing}(C)$) であるとき, P を smooth Galois 点 (resp. non-smooth Galois 点) という.
(3) $G_P := \mathrm{Gal}(k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1))$ を P における Galois 群という.

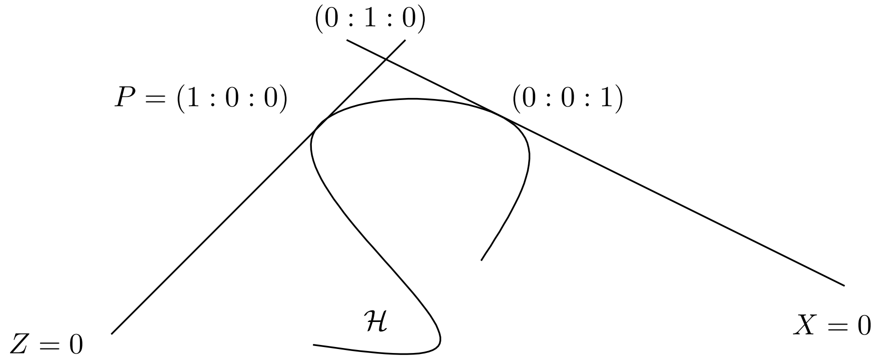
まず, Galois 点の例を観察しよう.

例. $q = p^n \geq 2$ とする. Hermitian 曲線とよばれる非特異平面曲線

$$\mathcal{H} : X^q Z + Z^q X - Y^{q+1} = 0$$

を考える. このとき, $P = (1 : 0 : 0)$ は内 Galois 点であり, P における $\mathcal{H}$ の接線 $Z = 0$ は $\mathcal{H}$ と P において $q+1$ 重に交わっている (このような点を total flex という). 一方で, $(0 : 0 : 1)$ も内 Galois

点であり, $X=0$ を接線とする total flex となっている. さらに, 直線 $X=0$ と直線 $Z=0$ の交点 $(0:1:0)$ は外 Galois 点である (下図参照).



上の例における外 Galois 点のように “Galois 点は変曲点における接線や, 多重接線たちの交点になる” ということができる. (しかしながら, 逆にそのような直線たちの交点だからといって Galois 点になるとは限らない.)

本稿では「2 つ以上の Galois 点をもつような (平面曲線) C」について考えていきたい. (Galois 点に関する問題については [20] 参照). まず, 非特異な C に対しては, 吉原氏, 三浦敬氏 (宇部高専), 本間正明氏 (神奈川大学), 深澤知氏 (山形大学) によって C の完全な分類が与えられている ([4]). それに続いて「C が特異点をもつことも許したうえで, 2 つ以上の Galois 点をもつような C にはどんなものがあるか？そのような C を見つけるにはどうしたらよいか？」ということが問題となる. 2018 年, 深澤氏は代数曲線の自己同型群の観点から前述のような C が存在するための判定法を与えた.

判定法 (深澤知, 2018, [6])**.** X を非特異既約射影曲線, G_1, $G_2 \subset \mathrm{Aut}(X)$ を有限部分群, P_1, P_2 を X 上の相異なる 2 点とする. このとき, 以下の (I), (II) は同値である.

(I) 双有理埋めこみ $\varphi: X \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(X)$ は相異なる smooth Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, かつ $G_{\varphi(P_i)} = G_i$ $(i=1,2)$ となるようなものが存在する.

(II) 以下の 3 条件が成立する.
- (a) $X/G_1 \simeq \mathbb{P}^1$, $X/G_2 \simeq \mathbb{P}^1$,
- (b) $G_1 \cap G_2 = \{1\}$,
- (c) $P_1 + \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2) = P_1 + \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1)$ (as divisors).

ここで, 双有理埋め込み $X \to \mathbb{P}^2$ とは, 射であって像への双有理写像をひきおこすようなものである. $i=1,2$ に対して, X/G_i は, $k(X)$ の G_i による固定体 $k(X)^{G_i}$ を関数体にもつ k 上の非特異既約射影曲線を表す. また, $\mathrm{Aut}(X)$ は X の k 上の自己同型群を表す.

上記の判定法を用いることで, 2 つ以上の Galois 点をもつような C の新たな例がたくさん構成されている ([6, 7, 9, 11, 12]).

上記深澤氏の判定法は, 2 つ以上の smooth Galois 点をもつような全ての C に適用することが可能である. 一方, Galois 点の研究においては 2 つ以上の non-smooth Galois 点をもつような例も知られている. そのような例には (他に smooth Galois 点が 2 つあるような状況でなければ) 上記深澤

氏の判定法を適用することはできない．その 1 例として, Artin-Schreier-Mumford (略して ASM) 曲線とよばれる例を観察してみよう ([8, Theorem 1 参照]).

例. $q := p^n \geq 3$ $(p = \mathrm{char}(k))$, $c \in k \setminus \{0\}$ とするとき,

$$\mathbb{P}^2 \supset C : (X^q + XZ^{q-1})(Y^q + YZ^{q-1}) - cZ^{2q} = 0$$

を ASM 曲線という．この ASM 曲線 C について

$$\mathrm{Sing}(C) = C \cap \{Z = 0\} = \{P_1 := (1:0:0), P_2 := (0:1:0)\}$$

であり, P_1, P_2 いずれも重複度 q の特異点であるが, P_1, P_2 いずれも non-smooth Galois 点である．実際, P_1 からの射影は有理写像として $\pi_{P_1} = (y:1)$ のように計算できる．誘導される関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ は $k(x,y)/k(y)$ で, x の $k(y)$ 上の最小多項式は $T^q + T - \frac{c}{y^q+y} \in k(y)[T]$ である．ここで, アフィン開集合 $\{Z \neq 0\}$ 上の正則関数 $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$ が定める $C \cap \{Z \neq 0\}$ 上の正則関数をそれぞれ x, y で表した．体拡大 $k(x,y)/k(y)$ は $\{(x,y) \mapsto (x+\alpha, y) \mid \alpha^q + \alpha = 0\}$ を Galois 群にもつ Galois 拡大であり, P_1 は non-smooth Galois 点である．P_2 が non-smooth Galois 点であることも同様である．

その他, 2 つ以上の non-smooth Galois 点を持つような例として, Ballico-Hefez 曲線 ([5] 参照), いくつかの自己双対曲線 ([13] 参照), Giulietti-Korchmáros 曲線のある平面モデル ([10] 参照), (q^3, q^2)-Frobenius nonclassical 曲線 ([1] 参照) が知られている．また, 高橋剛氏 (新潟大学) は, 平面 5 次曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ で 2 重点 P をもつようなものについて, P が Galois 点のときの C の定義方程式の形を決定している ([18] 参照)．しかし, 上記以外に non-smooth Galois 点の例が明示的に与えられているものや, non-smooth Galois 点を体系的に研究したものは, 筆者の知る限り見当たらないように思う．

このような事情から, 深澤氏の判定法を non-smooth Galois 点の場合を含んだすべての場合に適用可能な形に拡張することは, non-smooth Galois 点研究を進めるために有用であると考えられる．本稿ではこの深澤氏の判定法の拡張について述べる．また, Galois 点における群と軌道の情報を用いて, Galois 点における order sequence (後述) がわかることについても述べる．さらに, 拡張された判定法を用いることで, non-smooth Galois 点を 2 つもつ平面曲線の例を構成する．

2 準備

ここでは, いくつかの基本的な事実を確認する．X を非特異既約射影曲線, $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ を双有理埋め込みとする．すなわち, φ は射であって, 像との双有理写像をひきおこすようなものである．$\varphi(X)$ は直線ではないとする．はじめに, order sequence の概念を思い出そう ([15, Chapter 7] 参照)．直線 $L \subset \mathbb{P}^2$ に対して, $\varphi(X)$ と L の交わりがひきおこす X 上の (Weil) 因子を $\varphi^* L$ で表す．φ に対応する X 上の線形系は

$$\Lambda = \{\varphi^* L \mid L \text{ is a line contained in } \mathbb{P}^2\}$$

である．因子 $\varphi^* L$ のサポートを $\mathrm{Supp}(\varphi^* L)$ で表す．X 上の点 P に対して, P における $\varphi^* L$ の重複度を $\mathrm{ord}_P(\varphi^* L)$ で表す．いま

$$\alpha_P = \min\{\mathrm{ord}_P(\varphi^* L) \mid \varphi^* L \in \Lambda, P \in \mathrm{supp}(\varphi^* L)\}$$

とおくと, 直線 $\widetilde{L}$ であって, $\beta_P := \mathrm{ord}_P(\varphi^*\widetilde{L}) > \alpha_P$ をみたすものがただ 1 つ存在する. この直線 $\widetilde{L}$ を P における osculating line とよぶことにする. また, $(0, \alpha_P, \beta_P)$ を (Λ, P)-order sequence という. 点 $\varphi(P)$ を通る直線 $\widetilde{L}$ が $\varphi(P)$ での接線であることを, $\widetilde{L}$ が $\varphi^{-1}(\varphi(P))$ に含まれるある点での osculating line であることとして定義する. 直線 $\widetilde{L}$ が $\varphi(P)$ における接線であるための必要十分条件は, $m_{\varphi(P)} < I_{\varphi(P)}(\varphi(X), \widetilde{L})$ となることである. ここで, $I_{\varphi(P)}(\varphi(X), \widetilde{L})$ は $\varphi(X)$ と $\widetilde{L}$ の $\varphi(P)$ における交差重複度, $m_{\varphi(P)}$ は $\varphi(X)$ の $\varphi(P)$ における重複度を表す.

次に, $\varphi(P)$ からの射影 $\pi_{\varphi(P)}$ を考え, $\hat{\pi}_{\varphi(P)} := \pi_{\varphi(P)} \circ \varphi : X \to \mathbb{P}^1$ とおく. 射影と分岐指数の関係を思い出そう. $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = \{P_1, \ldots, P_n\}$ とし, $(0, \alpha_{P_i}, \beta_{P_i})$ を (Λ, P_i)-order sequence とする. $Q \in X$ における $\hat{\pi}_{\varphi(P)}$ の分岐指数を $e_Q(\hat{\pi}_{\varphi(P)})$ で表す. 次の事実はよく知られている.

命題 2.1. $Q \in X \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ とするとき, 次が成り立つ.

(1) $e_Q(\hat{\pi}_{\varphi(P)}) = \mathrm{ord}_Q(\varphi^*\overline{\varphi(P)\varphi(Q)})$.
(2) $i = 1, \ldots, n$ に対して, $e_{P_i}(\hat{\pi}_{\varphi(P)}) = \beta_{P_i} - \alpha_{P_i}$.

最後に, Galois 被覆に関する次の事実を思い出す ([17, III. 7.1, 7.2, 8.2] 参照).

命題 2.2. $\theta : X \to Y$ を非特異既約射影曲線間の全射な射とし, θ が誘導する関数体の拡大 $k(X)/\theta^*k(Y)$ が Galois 群 G をもつ Galois 拡大であるとする. このとき, 次が成立.

(1) $P, Q \in X$ で $\theta(P) = \theta(Q)$ ならば, $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(P) = Q$ となる.
(2) $P, Q \in X$ で $\theta(P) = \theta(Q)$ ならば, $e_P(\theta) = e_Q(\theta)$.
(3) 各点 $P \in X$ に対して, $|G(P)| = e_P(\theta)$.

ここで, $G(P)$ は P の G における固定部分群を表す.

3 主定理

X を k 上の非特異既約射影曲線とし, $k(X)$ を X の関数体とする. X の k 上の自己同型群を $\mathrm{Aut}(X)$ で表す. 有限部分群 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ と $P \in X$ に対して, P の G における固定部分群 (resp. G による P の軌道) を $G(P)$ (resp. $G \cdot P$) で表す. また, X の G による商曲線, すなわち, $k(X)$ の G による固定体 $k(X)^G$ に対応する非特異既約射影曲線を X/G で表す. ここで, 自然に $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}_k(k(X))$ と考えていて, 以下もこのように同一視する. 次が導入の部分で述べた, 深澤氏の判定法 [6] を拡張したもの (の一部) である.

定理 3.1. G_1, G_2 を $\mathrm{Aut}(X)$ の有限部分群, P_1, P_2 を X 上の相異なる 2 点とする. このとき, 以下の (I), (II) は同値である.

(I) 双有理埋め込み $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(X)$ は相異なる内 Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, $i = 1, 2$ に対して $G_{\varphi(P_i)} = G_i$ で, $L := \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, かつ L は $\varphi(P_2)$ における接線であるようなものが存在する.
(II) 以下の 3 条件が成立する.

(a) $X/G_1 \cong \mathbb{P}^1, X/G_2 \cong \mathbb{P}^1$,

(b) $G_1 \cap G_2 = \{1\}$,

(c) $P_1 \notin G_1 \cdot P_2$, $G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 \neq \emptyset$ かつ $|G_1(P_2)| > |G_2(P_1)|$.

定理 3.1(I) にあるような φ に対して, 次が成り立つ.

定理 3.2. φ を定理 3.1(I) にあるような双有理埋め込みとし, Λ を φ に対応する X 上の線形系, $(0, \alpha_P, \beta_P)$ を (Λ, P)-order sequence とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 因子 $\sum_{P \in \varphi^{-1}(\varphi(P_1))} \alpha_P P$ は次に等しい.

$$\sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q.$$

(2) 因子 $\sum_{P \in \varphi^{-1}(\varphi(P_2))} \alpha_P P$ は次に等しい.

$$\sum_{R \in G_1 \cdot P_2 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_1(P_2)| R + \sum_{S \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1} (|G_1(P_2)| - |G_2(P_1)|) S.$$

(3) 因子 $\varphi^* L$ は次に等しい.

$$\sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q + \sum_{R \in G_1 \cdot P_2} |G_1(P_2)| R.$$

(4) 各点 $P \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1$ に対して, 等式 $\beta_P = |G_1(P_2)|$ が成り立つ.

したがって, 定理 3.1(II) の条件をみたすものが与えられたとき, それらの情報を用いてガロア点における重複度や order sequence が計算できる. 実際, 定理 3.1, 3.2 を射影直線 $\mathbb{P}^1$ に適用し, 次のように例が構成できる.

定理 3.3. 次のような双有理埋め込み $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ が存在する: $p \neq 2, 5$, $\deg(\varphi(\mathbb{P}^1)) = 16$ であり, non-smooth Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2) \in \varphi(\mathbb{P}^1)$ があり, $m_{\varphi(P_1)} = 4$, $m_{\varphi(P_2)} = 11$, $G_{\varphi(P_1)} \cong \mathbf{A}_4$, $G_{\varphi(P_2)} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ で, $L = \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, L は $\varphi(P_2)$ における接線である. 各 $Q \in G_{\varphi(P_1)} \cdot P_2 \setminus \{P_2\}$ (resp. 各 $Q \in G_{\varphi(P_2)} \cdot P_1$) において, second order は 2 (resp. 1) に等しく, P_2 において, third order は 2 に等しい.

4 定理 3.1, 3.2 の証明

定理 3.1 の証明については, 例の構成に必要な (II) $\Rightarrow$ (I) における φ の作り方のみ与える.

定理 3.1 の証明. 定理 3.1 の条件 (a), (b), (c) が成り立つとする. 条件 (a) により, $f, g \in k(X)$ であって, f, g はそれぞれ $k(X)^{G_1}$, $k(X)^{G_2}$ の k 上の生成元であり,

$$(f)_\infty = \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2), \ (g)_\infty = \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1)$$

となるものがとれる. ここで, $(f)_\infty$ (resp. $(g)_\infty$) は f (resp. g) の極因子である. この f, g を用いて, 射 $\varphi = (f : g : 1) : X \to \mathbb{P}^2$ を考える. 条件 (b), (c) により, これが条件をみたすものである. $\square$

続いて, 定理 3.2 を示す. ガロア点における重複度や order sequence がどうなっているのかを理解するためにも詳しく証明を述べる.

定理 3.2 の証明. φ を定理 3.1 にあるような双有理埋め込みとし, Λ を φ に対応する X 上の線形系とする. いま

$$\varphi^{-1}(\varphi(P_1)) = \{P_{11} = P_1, P_{12}, \dots, P_{1n_1}\},$$
$$\varphi^{-1}(\varphi(P_2)) = \{P_{21} = P_2, P_{22}, \dots, P_{2n_2}\}$$

とおき, 各 i, j に対して, $(0, \alpha_{P_{ij}}, \beta_{P_{ij}})$ を (Λ, P_{ij})-order sequence とする.

はじめに, 定理 3.2 (1) を示そう. 射 $\hat{\pi}_{\varphi(P_1)}$ に対応する X 上の線形系は

$$\left\{ E - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} \;\middle|\; E \in \Lambda, E \geq \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} \right\}$$

であり, $\hat{\pi}_{\varphi(P_1)}$ は Galois 被覆より, 次の因子の等式が成り立つ.

$$\varphi^* L - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} = (\hat{\pi}_{\varphi(P_1)})^*([L]) = \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2).$$

ここで, $[L]$ は直線 L に対応する点 $[L] \in \mathbb{P}^1$ の因子を表す. 命題 2.1 (1), 命題 2.2 より, 等式 $|G_2(P_1)| = \mathrm{ord}_{P_{1i}}(\varphi^* L)$ がすべての i について成り立つ. L は $\varphi(P_1)$ における接線ではないので, 等式 $\alpha_{P_{1i}} = |G_2(P_1)|$ がすべての i で成り立つ. 容易にわかるように, 等式

$$(\varphi^{-1}(\varphi(P_1))) \cup (G_1 \cdot P_2) = \mathrm{supp}(\varphi^* L) = (G_2 \cdot P_1) \cup (G_1 \cdot P_2)$$

が成り立つ. $\varphi^{-1}(\varphi(P_1))$ と $G_1 \cdot P_2$ の交わりは空だから,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\varphi(P_1)) &= ((\varphi^{-1}(\varphi(P_1))) \cup (G_1 \cdot P_2)) \setminus (G_1 \cdot P_2) \\ &= G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1) \end{aligned}$$

を得る. ゆえに, 等式

$$\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} = \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q$$

が成り立ち, 定理 3.2 (1) を得る.

次に, 定理 3.2 (3) を示そう. 上の計算より, 等式

$$\varphi^* L = \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q + \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2)$$

が成り立つ. ここで,

$$\sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2) = \sum_{R \in G_1 \cdot P_2} |G_1(P_2)| R$$

であるから, 定理 3.2 (3) を得る.

最後に, 定理 3.2 (2), (4) を示そう. 等式

$$\sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1) = \sum_{S \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1} |G_2(P_1)| S + \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q$$

が成り立つから, 以下の因子の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\sum_{R\in G_1\cdot P_2\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_1(P_2)|R \\
&\quad + \sum_{S\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1} (|G_1(P_2)|-|G_2(P_1)|)S + \sum_{\tau\in G_2}\tau(P_1) \\
=& \left(\sum_{R\in G_1\cdot P_2\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_1(P_2)|R + \sum_{S\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1} |G_1(P_2)|S\right) \\
&\quad + \sum_{Q\in G_2\cdot P_1\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_2(P_1)|Q \\
=& \sum_{Q\in G_2\cdot P_1\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_2(P_1)|Q + \sum_{R\in G_1\cdot P_2} |G_1(P_2)|R \\
=& \varphi^* L.
\end{aligned}$$

ここで, 最後の等式は定理 3.2 (3) より従う. ゆえに, 因子の等式

$$\begin{aligned}
\varphi^*L - \sum_{\tau\in G_2}\tau(P_1) = & \sum_{R\in G_1\cdot P_2\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_1(P_2)|R \\
& + \sum_{S\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1} (|G_1(P_2)|-|G_2(P_1)|)S
\end{aligned}$$

が成り立つ. 一方で, 射 $\hat{\pi}_{\varphi(P_2)}$ に対応する X 上の線形系は

$$\left\{ E - \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{P_{2j}} P_{2j} \,\middle|\, E\in\Lambda, E \geq \sum_{j=1}^{n_2}\alpha_{P_{2j}} P_{2j} \right\}$$

であり, $\hat{\pi}_{\varphi(P_2)}$ は Galois 被覆であるから, 以下の因子の等式が成り立つ.

$$\varphi^*L - \sum_{j=1}^{n_2}\alpha_{P_{2j}}P_{2j} = (\hat{\pi}_{\varphi(P_2)})^*([L]) = \sum_{\tau\in G_2}\tau(P_1).$$

ゆえに, 因子の等式

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n_2}\alpha_{P_{2j}}P_{2j} &= \varphi^*L - \sum_{\tau\in G_2}\tau(P_1) \\
&= \sum_{R\in G_1\cdot P_2\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_1(P_2)|R \\
&\quad + \sum_{S\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1} (|G_1(P_2)|-|G_2(P_1)|)S
\end{aligned}$$

が成り立ち, 定理 3.2 (2) を得る. また,

$$0 < |G_1(P_2)| - |G_2(P_1)| < |G_1(P_2)|$$

である. 定理 3.2 (3) より, 等式 $|G_1(P_2)| = \mathrm{ord}_P(\varphi^*L)$ が各点 $P\in G_1\cdot P_2$ について成り立つ. 定理 3.2 (2) より, 各 $P\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1$ において, second (Λ, P)-order は $|G_1(P_2)|-|G_2(P_1)|$ と一致する. ゆえに, 各点 $P\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1$ において, third (Λ, P)-order は $|G_1(P_2)|$ と一致する. よって, 定理 3.2 (4) が成り立つ. □

5　定理 3.3 の証明

定理 3.1 と 3.2 を射影直線 $\mathbb{P}^1$ に適用することを考える．この場合, 定理 3.1 の条件 (a) は Lüroth の定理よりいつも成り立つ．以下, $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ を射影変換群 $\mathrm{PGL}(2,k)$ と同一視する．また, $Q_\infty := (1:0)$, $a \in k$ に対して, $Q_a := (a:1) \in \mathbb{P}^1$ とおく．

定理 3.3 の証明. $p \neq 2, 5$ とし, $i \in k$ を多項式 $T^2+1 \in k[T]$ の根, ξ を 1 の原始 5 乗根とする．$P_1 = Q_\xi$, $P_2 = Q_1$ とする．G_1, G_2 として

$$G_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \right\rangle, \ G_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

を考える．$G_2 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ である．また,

$$G_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \right\rangle \cong \mathbf{A}_4$$

である．([2, Theorem C] 参照.) ここで, $\mathbf{A}_4$ は交代群である．5 と 12 は互いに素であるから, 定理 3.1 の条件 (b) が成り立つ．直接計算により, 次が成り立つことがわかる．

$$G_1 \cdot P_2 = \{Q_{-i}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_i, Q_\infty\},$$
$$G_2 \cdot P_1 = \{Q_1, Q_\xi, Q_{\xi^2}, Q_{\xi^3}, Q_{\xi^4}\},$$
$$G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 = \{Q_1 = P_2\},$$
$$G_1(P_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$
$$G_2(P_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

したがって, 定理 3.1 の条件 (c-iii) が成り立つ．よって, 双有理埋め込み $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(\mathbb{P}^1)$ は相異なる内 Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, $G_{\varphi(P_1)} \cong \mathbf{A}_4$, $G_{\varphi(P_2)} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ で, $L = \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, L は $\varphi(P_2)$ における接線であるようなものが存在する．定理 3.2 (1), (2), (3) より, $m_{\varphi(P_1)} = 4$, $m_{\varphi(P_2)} = 11$, $\deg(\varphi(\mathbb{P}^1)) = 16$ である．定理 3.2 (1), (2), (4) により, 各 $Q \in G_1 \cdot P_2 \setminus \{P_2\}$ (resp. 各 $Q \in G_2 \cdot P_1$) において, second order は 2 (resp. 1) に等しく, P_2 において, third order は 2 に等しい． □

参考文献

[1] H. Borges and S. Fukasawa, Galois points for double-Frobenius nonclassical curves, Finite Fields Appl. **61** (2020), 101579, 8 pages.

[2] X. Faber, Finite p-irregular subgroups of $\mathrm{PGL}_2(k)$, preprint, arXiv:1112.1999.

[3] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, Geom. Dedicata **139** (2009), 211–218.

[4] S. Fukasawa, Complete determination of the number of Galois points for a smooth plane curve, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **129** (2013), 93–113.

[5] S. Fukasawa, Galois points for a non-reflexive plane curve of low degree, Finite Fields Appl. **23** (2013), 69–79.

[6] S. Fukasawa, A birational embedding of an algebraic curve into a projective plane with two Galois points, J. Algebra **511** (2018), 95–101.

[7] S. Fukasawa, Birational embeddings of the Hermitian, Suzuki and Ree curves with two Galois points, Finite Fields Appl. **57** (2019), 60–67.

[8] S. Fukasawa, Galois lines for the Artin-Schreier-Mumford curve, Finite Fields Appl., **75**(2021), 101894, 10 pages.

[9] S. Fukasawa and K. Higashine, A birational embedding with two Galois points for certain Artin–Schreier curves, Finite Fields Appl. **52** (2018), 281–288.

[10] S. Fukasawa and K. Higashine, Galois lines for the Giulietti-Korchmáros curve, Finite Fields Appl. **57** (2019), 268–275.

[11] S. Fukasawa and K. Waki, Examples of plane rational curves with two Galois points in positive characteristic, Finite Fields and their Applications: Proceedings of the 14th International Conference on Finite fields and their Applications, Vancouver, June 3–7, 2019, pp.181–188, De Gruyter, 2020.

[12] S. Fukasawa and K. Waki, Examples of plane rational curves with two Galois points in positive characteristic, II, preprint, arXiv:2103.022118.

[13] H. Hayashi and H. Yoshihara, Galois group at each point for some self-dual curves, Geometry **2013** (2013), Article ID 369420, 6 pages.

[14] K. Higashine, A criterion for the existence of a plane model with two inner Galois points for algebraic curves, Hiroshima Math. J., **51** (2021), 163–176.

[15] J. W. P. Hirschfeld, G. Korchmáros and F. Torres, Algebraic curves over a finite field, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[16] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, J. Algebra **226** (2000), 283–294.

[17] H. Stichtenoth, Algebraic function fields and codes, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[18] T. Takahashi, Non-smooth Galois points on a quintic curve with one singular point, Nihonkai Math. J. **16** (2005), 57–66.

[19] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239** (2001), 340–355.

[20] H. Yoshihara and S. Fukasawa, List of problems, available at:
https://sites.google.com/sci.kj.yamagata-u.ac.jp/fukasawa-lab/open-questions-english