Ding-Iohara 代数のダイナミカル類似

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科
服部真宗 (Masamune HATTORI)

概要

複素パラメータ q, 形式的パラメータ p, 有限ルート系 X_l およびいわゆる Ding-Iohara 条件を満たす関数の組 g によって決まるダイナミカル Hopf 亜代数の族を構成した．この亜代数の構造関数をある種のテータ関数にとることで，今野氏の楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ が復元される．また $p \to 0$ の極限を考えることで Ding-Iohara 代数 $U_q(g, A_l)$ が復元される．この意味で今回導入した Hopf 亜代数は，Ding-Iohara 代数のダイナミカル類似と考えられる．また副産物として，Ding-Iohara 代数の non-simply-laced なルート系の場合への拡張を得た．

1 導入

量子代数とは Kac-Moody 代数 [Ka90] の関係式を q 変形して得られる結合代数である．特に有限型，アフィン型の Cartan 行列に付随する量子代数を，それぞれ量子群，量子アフィン環という．量子代数は Hopf 代数構造，すなわち余積，余単位射，対合射という付加的な (反) 代数射を備え，この構造を通して統計力学における Yang-Baxter 方程式や，結び目理論の不変量などと関係することが知られている ([Kas95]).

一般に量子代数は Chevalley 型の生成元を用いて記述される．Drinfeld[D89] は (非捩型) 量子アフィン環を Chevalley 型とは異なる無数の生成元と関係式で記述し，さらに従来のものとは異なる余積も構成した．この構成を Drinfeld 実現という．Drinfeld 実現の存在は，アフィン Lie 代数が Kac-Moody 代数の他に，ループ代数の中心拡大という描像をもつことに対応する．

Drinfeld 実現は，生成元の母関数 (カレントという) を用いて簡潔に表される [J+99, Appendex.A]．この場合の関係式には $z - q^{\pm b_{ij}w}, q^{\pm b_{ij}z-w}$ という 2 つの関数が現れる．その比 $g_{ij}(z) = \frac{q^{-b_{ij}}(1-q^{b_{ij}}z)}{1-q^{-b_{ij}}z}$ は $g_{ij}(z^{-1}) = g_{ji}(z)^{-1}$ なる性質を満たす点で非常に特徴的である．

Drinfeld 実現の直接の一般化として，Ding-Iohara 代数 [DI97] が挙げられる．これは A, D, E 型のルート系に関して，Drinfeld 実現の関係式に現れる関数 $g_{ij}(z)$ を，同様の性質を満たす解析的関数の組に置き換えて得られる位相的代数である．Ding-Iohara 代数は Drinfeld 型の余積によって (位相的)Hopf 代数となる．このクラスの重要な例としては，量子アフィン環の他に Ding-Iohara-Miki 代数がある．これは A_1 型の Ding-Iohara 代数であるが，変形 W 代数 [M07] や Macdonald 理論 [F+09] などとの関連が指摘されている．

少し話題を変えて，楕円量子群 [Ko20] について簡単に説明する．楕円量子群は，量子アフィン環のダイナミカルかつ楕円的な類似物として今野氏によって導入された位相的代数である．大雑

把には, Drinfeld 実現の関係式を楕円テータ関数で書き換えることで楕円量子群が得られる. 楕円量子群は, H-Hopf 亜代数と呼ばれる Hopf 代数の類似構造を備え, この構造を通してダイナミカル Yang-Baxter 方程式や Macdonald 理論との関係が調べられている. また楕円 stable-envelope という幾何学的対象を用いた表現論が提唱されるなど, その研究は非常に盛んである.

上記の文脈では, 楕円量子群の余積は RLL 関係式という関係式との整合性に基づくものが用いられる [Ko20]. 一方で楕円量子群は Drinfeld 型の余積も持つことが知られており, この意味では Drinfeld 実現の別の一般化になっていると考えられる. 私はこの観点に着目し, 柳田氏との共同研究 [HY22] において, Ding-Iohara 代数と楕円量子群を包括するような位相的 H-Hopf 亜代数のクラス (ダイナミカル Ding-Iohara 代数) を任意の有限ルート系に対して与えた. この研究の副産物として, A, D, E 型以外のルート系に付随する Ding-Iohara 代数が定義される.

本紙では, Ding-Iohara 代数, H-Hopf 亜代数, 楕円量子群の基本事項を説明したのち, simply-laced な場合のダイナミカル Ding-Iohara 代数の構成を紹介する. 議論の詳細および non-simply-laced な場合の構成については [HY22] に記述がある.

最後に本紙で用いる記号をまとめておく.

- 可換環 k と不定元 x に関して, Laurent 多項式環を $k[x^{\pm 1}]$, 形式的冪級数環を $k[\![x]\!]$, Laurent 級数環を $k(\!(x)\!)$, そして形式的 Laurent 級数の成す k 上の加群を $k[\![x^{\pm 1}]\!]$ で表す.
- q-shifted factorials を次のように表す.

$$(x;q)_\infty \coloneqq \prod_{n=0}^{\infty}(1-xq^n), \quad (x_1,\dots,x_n;q)_\infty \coloneqq \prod_{i=1}^{n}(x_i;q)_\infty.$$

- q を $0<|q|<1$ を満たす複素数とする. $i \in I$ と $m \le n$ を満たす $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, 次のように定義する.

$$q_i \coloneqq q^{d_i}, \quad [n]_i \coloneqq \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad (n)_i \coloneqq \frac{q^n - q^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, \tag{1.1}$$

$$[n]_i! \coloneqq [n]_i[n-1]_i \cdots [1]_i, \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_i \coloneqq \frac{[m]_i!}{[n]_i!\,[m-n]_i!}. \tag{1.2}$$

2 Ding-Iohara 代数

2.1 Ding-Iohara 代数の代数構造

$A=(a_{ij})$ を ADE 型の有限ルート系 X_l の Cartan 行列とし, $I \coloneqq \{1,\dots,l\}$ とおく. 更に

$$\mathcal{A} \coloneqq \{\, z=0,\infty \text{ 以外に極を持たない解析的関数} \,\}$$

とする. 構造関数 $g \coloneqq \{\, g_{ij}(z) \mid i,j \in I \,\}$ を以下の条件 (DI 条件) を満たす関数の集合とする.

(1) 任意の $(i,j) \in I^2$ に対して $G_{ij}^{\pm}(z) \in \mathcal{A}$ が存在して $g_{ij}(z) = G_{ij}^{+}(z)/G_{ij}^{-}(z)$ が成り立つ.

(2) 任意の $i,j \in I$ に対して $g_{ij}(z^{-1}) = g_{ji}(z)^{-1}$ が成り立つ.

また q を $0<|q|<1$ を満たす複素数とする. 以上のデータを用いて定義される位相的 Hopf 代数 $U_q(g, X_l)$(定義 2.1.1, 定理 2.1.2) を Ding-Iohara 代数と総称する.

定義 2.1.1. $U = U_q(g, X_l)$ は $\mathbb{C}$ 上の単位的かつ結合的な位相的代数で, 以下の生成元を持つ.

$$q^{\pm c/2},\ e_{i,n},\ f_{i,n},\ \psi^+_{i,n},\ \psi^-_{i,n} \quad (i \in I,\, n \in \mathbb{Z}).$$

生成カレントを, 形式的な変数 z を用いて

$$e_i(z) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_{i,n} z^{-l}, \quad f_i(z) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{i,n} z^{-l}, \quad \psi^\pm_i(z) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi^\pm_{i,n} z^{-n}$$

と定める. ただし $q^{\pm c/2}$ はこれ自体を一つの不定元とみなす. さらに $\psi^\pm_i(z)$ は z の級数として可逆と仮定する. 関係式は, Drinfeld 実現の関係式で, $z - q^{\pm b_{ij} w}, q^{\pm b_{ij} z - w}$ をそれぞれ $G^+_{ij}(z)$, $G^-_{ij}(z)$ と置き換え, 更に Serre 関係式に現れる q-整数 [2] を以下の関数で置き換えたものである.

$$h_{ij}(x, y) \coloneqq \frac{(g_{ii}(x/y) + 1)(g_{ij}(x)g_{ij}(y) + 1)}{g_{ij}(y) + g_{ii}(x/y)g_{ij}(x)}.$$

定理 2.1.2. 位相的代数 $U = U_q(g, X_l)$ は, Drinfeld 型の (位相的)Hopf 代数構造 (Δ, ε, S) をもつ. この位相的 Hopf 代数 $U_q(g, X_l)$ を, (X_l 型の)Ding-Iohara 代数という.

注意 2.1.3. Ding-Iohara 代数の関係式には, 次のような無限和が現れる.

$$\psi^+_{i,m} e_{j,n} = \sum_{k=-N^+}^{\infty} g_{ij,k} q^{-kc/2} e_{j,n-k} \psi^+_{i,m+k} \quad (m, n \in \mathbb{Z}). \tag{2.1}$$

この問題を回避するためには, 例えば以下のような仮定をおけばよい.

- $\psi^+_i(z)$ が上に有界かつ $\psi^-_i(z)$ が下に有界と仮定する. このとき (2.1) は有限和となる.
- 構造関数 $g_{ij}(z)$ がパラメータ p を含み, $g_{ij}(z) = g_{ij}(z; p)$ が $g_{ij}(z; p) = \sum_{k=-N}^{\infty} g_{ij,k}(z)p^k \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]((p))$ と展開されると仮定する. このとき無限和 (2.1) は p 進位相により意味を持つ. p 進位相および位相的代数に関する詳細は [Kas95] を参照せよ.

例 2.1.4. [DI97, Example 2.1, Case I]

構造関数 $g = \{g_{ij}(z) \mid i, j \in I\}$ を

$$g_{ij}(z) = \frac{G^+_{ij}(z)}{G^-_{ij}(z)} \coloneqq \frac{q^{-a_{ij}}(1 - q^{a_{ij}} z)}{1 - q^{-a_{ij}} z}.$$

とおく. 更に $\psi^+_{i,n} = 0,\ \psi^-_{i,-n} = 0 \ \ (n > 0),\ \psi^+_{i,0}\psi^-_{i,0} = 1$ と定めると, U は Drinfeld 余積を備えた量子アフィン環 $U_q(A_{l+1})$ に他ならない. 詳細は [DI97] を参照.

例 2.1.5. ルート系を A_1 型にとり, 構造関数を

$$g(z) \coloneqq \frac{(1 - qz)(1 - z/t)(1 - tz/q)}{(1 - z/q)(1 - tz)(1 - qz/t)}$$

としたものを, Ding-Iohara-Miki 代数という. これに関しては [F+09, M07] などの研究がある.

3 H-Hopf 亜代数

3.1 H 代数, H 双亜代数と H-Hopf 亜代数

[Ko20] に基づき, H 代数, H 双亜代数および H-Hopf 亜代数を定義する. H を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間, H^* はその双対空間とする. H^* 上の有理型関数が成す体を $\mathbb{F}$ とおく.

定義 3.1.1. A を $\mathbb{C}$ 上の代数とする. A が H 代数であるとは, A が次の条件を満たすことをいう.

- A は H^* の元を二重次数にもつ. すなわち $\bigoplus_{\alpha,\beta\in H^*} A_{\alpha,\beta}$.
- 左 (右) モーメント写像と呼ばれる代数的単射 $\mu_l, \mu_r : \mathbb{F} \to A_{0,0}$ が存在し, 次を満たす.

$$\mu_l(f)x = x\mu_l(T_\alpha f), \quad \mu_r(f)x = x\mu_r(T_\beta f) \quad (x \in A_{\alpha,\beta}).$$

T_α は $\alpha \in H^*$ に関する差分作用素. 二重次数とモーメント写像を保つ代数射を H 代数射という.

定義 3.1.2. A, B を H 代数とする. A と B のテンソル空間 $A \mathbin{\widetilde{\otimes}} B$ を次で定める.

$$A \mathbin{\widetilde{\otimes}} B \coloneqq \bigoplus_{\alpha,\beta\in H^*} \left(A \mathbin{\widetilde{\otimes}} B\right)_{\alpha,\beta}, \quad (A \mathbin{\widetilde{\otimes}} B)_{\alpha,\beta} \coloneqq \bigoplus_{\gamma\in H^*} \left(A_{\alpha,\gamma} \mathbin{\widetilde{\otimes}} B_{\gamma,\beta}\right).$$

ただし $A_{\alpha,\gamma} \mathbin{\widetilde{\otimes}} B_{\gamma,\beta}$ は $A_{\alpha,\gamma} \otimes_{\mathbb{C}} B_{\gamma,\beta}$ を,

$$\mu_r^A(f)a \otimes b - a \otimes \mu_l^B(f)b \quad (a \in A, b \in B, f \in \mathbb{F})$$

が生成する空間で割って得られる空間. $A \mathbin{\widetilde{\otimes}} B$ は以下の H 代数構造をもつ.

$$(a \mathbin{\widetilde{\otimes}} b)(a' \mathbin{\widetilde{\otimes}} b') \coloneqq aa' \mathbin{\widetilde{\otimes}} bb', \quad \mu_l \coloneqq \mu_l^A \mathbin{\widetilde{\otimes}} 1, \quad \mu_r \coloneqq 1 \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mu_r^B.$$

また $f : A \to B,\ f' : A' \to B'$ が H 代数射であるとき, 以下の代数射が得られる.

$$f \mathbin{\widetilde{\otimes}} f' : A \mathbin{\widetilde{\otimes}} A' \to B \mathbin{\widetilde{\otimes}} B'\ ;\ a \mathbin{\widetilde{\otimes}} a' \mapsto f(a) \mathbin{\widetilde{\otimes}} f'(a').$$

例 3.1.3. $\mathbb{F}$ 上の差分作用素環 $\mathcal{D} \coloneqq \{\sum_i f_i T_{\alpha_i} \mid f \in \mathbb{F}, \alpha_i \in H^*\}$ は以下の H 代数構造をもつ.

$$\mathcal{D}_{\alpha,\alpha} \coloneqq \mathbb{F}T_{-\alpha}\ (\alpha \in H^*),\ \mathcal{D}_{\alpha,\beta} \coloneqq 0\ (\alpha \neq \beta \in H^*),\ \mu_l(f) = \mu_r(f) \coloneqq fT_0.$$

命題 3.1.4. A を任意の H 代数とする. このとき次の同型が成り立つ.

$$A \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathcal{D} \simeq A \simeq \mathcal{D} \mathbin{\widetilde{\otimes}} A.$$

注意. H 代数の圏は $\widetilde{\otimes}$ に関してモノイダル圏を成す. 命題 3.1.4より, $\mathcal{D}$ はその単位対象である.

続いて H 代数の余積と余単位射を導入し, H 双亜代数を定義する.

定義 3.1.5. A を H 代数とする. H 代数射 $\Delta : A \to A \mathbin{\widetilde{\otimes}} A, \quad \varepsilon : A \to \mathcal{D}$ がそれぞれ余積, 余単位射であるとは, 命題 3.1.4の同一視の下で次が成り立つことをいう.

$$(\Delta \mathbin{\widetilde{\otimes}} 1) \circ \Delta = (1 \mathbin{\widetilde{\otimes}} \Delta) \circ \Delta, \quad (\varepsilon \mathbin{\widetilde{\otimes}} 1) \circ \Delta = 1 = (1 \mathbin{\widetilde{\otimes}} \varepsilon) \circ \Delta.$$

余積 Δ と余単位射 ε を備えた H 代数を H 双亜代数という.

例 3.1.6. H^* 上の差分作用素環 $\mathcal{D}$ は以下の (Δ, ε) で H 双亜代数となる.

$$\Delta(fT_\alpha) \coloneqq fT_\alpha \widetilde{\otimes} t_\alpha, \quad \varepsilon \coloneqq 1_{\mathcal{D}}.$$

最後に [Ko20] の定義にもとづいて H-Hopf 亜代数を導入する.

定義 3.1.7. A を H 双亜代数とする. 対合射 $S : A \to A$ とは, $\mathbb{C}$ 線形写像で次を満たすもの.

(1) $S(\mu_r(f)a) = S(a)\mu_l(f), \quad S(a\mu_l(f)) = \mu_r(f)S(a) \quad (a \in A,\ f \in \mathbb{F}),$

(2) $\sum_{(a)} a'S(a'') = \mu_l(\varepsilon((a)1), \quad \sum_{(a)} S(a')a'' = \mu_r(T_\alpha(\varepsilon(a)1)) \quad (a \in A).$

対合射をもつ H 双代数を H-Hopf 亜代数という.

例 3.1.8. H^* 上の差分作用素環 $\mathcal{D}$ は H-Hopf 亜代数である.

4 楕円量子群

4.1 ダイナミカルパラメータ

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を有限ルート系 X_l 型の Cartan 行列とする. A の対称化 $A = DB$ を固定し, 対称行列 B の成分を $B = (b_{ij})_{i,j \in I}$ と書く [Ka90, §2.3]. また A の実現 $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$[Ka90, §1.1] を固定し, 対応する Kac-Moody 代数を $\mathfrak{g}$ と書く. さらに対称化から定まる $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^*$ 上の双線形形式をどちらも $(\cdot|\cdot)$ と書く. ルート格子 $\mathcal{Q}$, 余ルート格子 $\mathcal{Q}^\vee$, ウェイト格子 $\mathcal{P}$ を次で定める.

$$\mathcal{Q} \coloneqq \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*, \quad \mathcal{Q}^\vee \coloneqq \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subset \mathfrak{h}, \quad \mathcal{P} \coloneqq \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall i \in I,\ \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

$\mathbb{C}$ 上の線型空間 $\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}^* = \mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ とみなし, そのコピー $H \coloneqq \{P_\mu \mid \mu \in \mathfrak{h}^*\}$ を考える. H の演算は, $P_{c_1\mu_1 + c_2\mu_2} = c_1 P_{\mu_1} + c_2 P_{\mu_2}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{C},\ \mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{h}^*)$ で定める. H の基底は $(P_{\alpha_1}, \ldots, P_{\alpha_l})$ で与えられる. 次に $\mathbb{C}$ 上の $2l$ 次元線型空間 $\widetilde{H}$ を次で定義する.

$$\widetilde{H} \coloneqq \sum_{i \in I} \mathbb{C}\bigl(P_i + h_i\bigr) + \sum_{i \in I} \mathbb{C}P_i.$$

$h = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$ に対し, $P + h \coloneqq \sum_{i \in I} c_i(P_i + h_i)$ と表す. $(P_i + h_i) - P_i = h_i$ を $\alpha_i^\vee$ と同一視して, 線型同型 $\widetilde{H} \cong H \oplus \mathfrak{h}$ を得る. この同一視の下で, 線型空間 $\widetilde{H}$ は次の基底を持つ.

$$\{P_i, h_i \mid i \in I\}, \quad P_i = P_{\alpha_i}, \quad h_i \cong \alpha_i^\vee. \tag{4.1}$$

元 P_i をダイナミカルパラメータと呼ぶ. また双対空間 H^* および $\widetilde{H}^*$ を次のように導入する.

$$H^* = \{Q_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{h}^*\} = \sum_{i \in I} \mathbb{C}Q_i,\ \widetilde{H}^* = \sum_{i \in I} \mathbb{C}(Q_i + \alpha_i) + \sum_{i \in I} \mathbb{C}Q_i \quad (Q_i \coloneqq Q_{\alpha_i}).$$

ここで H^* は $\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}^* = \mathcal{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ とみなし, そのコピーとして扱う. H^* は次の基底をもつ.

$$\{Q_i, \alpha_i \mid i \in I\}, \quad Q_i \coloneqq Q_{\alpha_i}.$$

Q_i を双対 (ダイナミカル) パラメータと呼ぶ．Q_i と α_i は次のように定める．H^* の基底と H の基底 (4.1) に対して, 自然なペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H^*\times H\to\mathbb{C}$ が次の値をとるようにする．

$$\langle Q_i,P_j\rangle=(\alpha_i\,|\,\alpha_j)=b_{ij},\quad \langle\alpha_i,h_j\rangle=a_{ji},\quad \text{その他はすべて } 0.$$

双対空間 $\widetilde{H}^*$ 上の有理型関数の成す体 $\mathbb{F}:=\mathcal{M}(\widetilde{H}^*)$ を考える．$F\in\mathbb{F}$ の元は, 関数 $F=F(P+h,P)$ として表せる．ただし変数は $P+h=(P_i+h_i)_{i\in I}$ と $P=(P_i)_{i\in I}$ をわたる．F の点 $\mu\in\widetilde{H}^*$ での値は $F(\mu)=F\big(\langle\mu,P+h\rangle,\langle\mu,P\rangle\big)$ と表される．特に $\widetilde{H}$ の元は $\widetilde{H}^*$ 上の有理型関数とみなせる．変数 $P+h$, 或いは P のみを含む関数を $f(P+h)$, $f(P)\in\mathbb{F}$ と略記する．

4.2 楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の定義

§ 4.1の記号を引き続き用いる．形式的変数 p を固定し, p 進位相に関する $\mathbb{C}[\![p]\!]$ 上の位相的代数を考える．

定義 4.2.1. $A=A(X_l)=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を X_l 型の Cartan 行列とする．A に関する楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})=U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}}(X_l))$ とは $\mathbb{C}[\![p]\!]$ 上の位相的代数で, 次の生成元と関係式からなるものをいう．

- 生成元: $\mathcal{M}(\widetilde{H}^*)$, $q^{\pm c/2}$, d, $K_i^{\pm}$, $e_{i,m}$, $f_{i,m}$, $\alpha^\vee_{i,n}$ $\quad(i\in I,\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$.
- 関係式: $\mathcal{M}(\widetilde{H}^*)$ は部分代数． $q^{\pm c/2}$ は中心元で, $q^{c/2}q^{-c/2}=1$． $K_i^{\pm}$ は可逆．
  - 生成カレントを z に関する形式的 Laurent 級数として, 次のように定義する．

$$e_i(z):=\sum_{m\in\mathbb{Z}}e_{i,m}z^{-m},\quad f_i(z):=\sum_{m\in\mathbb{Z}}f_{i,m}z^{-m}\quad(i\in I).$$

  $\mathbb{F}$ の元を含む関係式は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
&F(P+h)\,d=d\,F(P+h),\ \ F(P)\,d=d\,F(P),\\
&F(P+h)\,K_i^{\pm}=K_i^{\pm}\,F\big(P+h\mp\langle Q_i,P+h\rangle\big),F(P)\,K_i^{\pm}=K_i^{\pm}\,F\big(P\mp\langle Q_i,P\rangle\big),\\
&F(P+h)\,e_i(z)=e_i(z)\,F(P+h),\ \ F(P)\,e_i(z)=e_i(z)\,F(P-\langle Q_i,P\rangle),\\
&F(P+h)\,f_i(z)=f_i(z)\,F(P+h-\langle Q_i,P+h\rangle),\ \ F(P)\,f_i(z)=f_i(z)\,F(P),\\
&F(P+h)\,\alpha^\vee_{i,n}=\alpha^\vee_{i,n}\,F(P+h),\ \ F(P)\,\alpha^\vee_{i,n}=\alpha^\vee_{i,n}\,F(P).
\end{aligned}$$

  - $d,K_i^{\pm}$ を含む残りの関係式は次で与えられる．

$$\begin{gathered}
[d,K_i^{\pm}]=0,\quad [d,e_{i,m}]=me_{i,m},\quad [d,f_{i,m}]=mf_{i,m},\quad [d,\alpha^\vee_{j,n}]=n\alpha^\vee_{i,n},\\
K_i^{\pm}e_j(z)=q_i^{\mp a_{ij}}e_j(z)K_i^{\pm},\quad K_i^{\pm}f_j(z)=q_i^{\pm a_{ij}}f_j(z)K_i^{\pm},\quad [K_i^{\pm},\alpha^\vee_{j,n}]=0.
\end{gathered}$$

  - (1.1) を用いて, $\alpha^\vee_{i,n}$ を含む残りの関係式は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
&[\alpha^\vee_{i,m},\alpha^\vee_{j,n}]=\delta_{m+n,0}\frac{[a_{ij}m]_i[cm)_j}{m}\frac{1-p^m}{1-p^{*m}}q^{-cm},\\
&[\alpha^\vee_{i,m},e_j(z)]=\frac{[a_{ij}m]_i}{m}\frac{1-p^m}{1-p^{*m}}q^{-cm}z^me_j(z),\ [\alpha^\vee_{i,m},f_j(z)]=-\frac{[a_{ij}m]_i}{m}z^mf_j(z).
\end{aligned}$$

  以降, $p^*:=pq^{-2c}$ と書く．また $\frac{1}{1-p^{*m}}$ は形式的級数 $\sum_{n\geq0}p^{*mn}$ と理解する．

– 残りの関係式を簡潔に表示するために, 新たな生成カレントを次のように定義する.

$$\psi_i^+(q^{-c/2}z) := K_i^+ \exp\Big(-(q_i - q_i^{-1}) \sum_{n>0} \frac{\alpha_{i,-n}^\vee}{1-p^n} z^n\Big) \exp\Big((q_i - q_i^{-1}) \sum_{n>0} \frac{p^n \alpha_{i,n}^\vee}{1-p^n} z^{-n}\Big),$$
$$\psi_i^-(q^{c/2}z) := K_i^- \exp\Big(-(q_i - q_i^{-1}) \sum_{n>0} \frac{p^n\alpha_{i,-n}^\vee}{1-p^n} z^n\Big) \exp\Big((q_i - q_i^{-1}) \sum_{n>0} \frac{\alpha_{i,n}^\vee}{1-p^n} z^{-n}\Big).$$

ここで $\exp(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}x^n$ とし, $\frac{1}{1-p^n}$ は $\sum_{k\geq 0} p^{kn}$ と理解する. 各生成カレントの右辺の係数は p 進位相で well-defined. このとき残りの関係式は次で与えられる.

∗ 任意の $i, j \in I$ に対して, $e_{i,m}$ と $f_{i,m}$ の間の 2 次関係式が次で与えられる.

$$z\,\gamma(\tfrac{w}{z}; q^{b_{ij}}, p^*) e_i(z) e_j(w) = -w\,\gamma(\tfrac{z}{w}; q^{b_{ij}}, p^*) e_j(w) e_i(z),$$
$$z\,\gamma(\tfrac{w}{z}; q^{-b_{ij}}, p) f_i(z) f_j(w) = -w\,\gamma(\tfrac{z}{w}; q^{-b_{ij}}, p) f_j(w) f_i(z).$$

ここで構造関数 γ は $\gamma(x; q, p) := \frac{(qx;p)_\infty}{(pq^{-1}x;p)_\infty} \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}][\![p]\!]$ で定義される.

∗ $i, j \in I$ は $a := 1 - a_{ij} \geq 2$ を満たすとする. 次の p の形式的冪級数を導入する.

$$\widetilde{\gamma}(x; q, p) := (pqx; p)_\infty / (pq^{-1}x; p)_\infty.$$

このとき (1.2) を用いて, Serre 型関係式が次で定義される.

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_a} \prod_{1\leq m<n\leq a} \widetilde{\gamma}(\tfrac{z_{\sigma(n)}}{z_{\sigma(m)}}; q^2, p^*)$$
$$\cdot \sum_{s=0}^{a} (-1)^s \begin{bmatrix} a \\ s \end{bmatrix}_i \prod_{m=1}^{s} \widetilde{\gamma}(\tfrac{w}{z_{\sigma(m)}}; q^{b_{ij}}, p^*) \prod_{m=s+1}^{a} \widetilde{\gamma}(\tfrac{z_{\sigma(m)}}{w}; q^{b_{ij}}, p^*)$$
$$\cdot\, e_i(z_{\sigma(1)}) \cdots e_i(z_{\sigma(s)}) e_j(w) e_i(z_{\sigma(s+1)}) \cdots e_i(z_{\sigma(a)}) = 0,$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_a} \prod_{1\leq m<n\leq a} \widetilde{\gamma}(\tfrac{z_{\sigma(n)}}{z_{\sigma(m)}}; q^{-2}, p)$$
$$\cdot \sum_{s=0}^{a} (-1)^s \begin{bmatrix} a \\ s \end{bmatrix}_i \prod_{m=1}^{s} \widetilde{\gamma}(\tfrac{w}{z_{\sigma(m)}}; q^{-b_{ij}}, p) \prod_{m=s+1}^{a} \widetilde{\gamma}(\tfrac{z_{\sigma(m)}}{w}; q^{-b_{ij}}, p)$$
$$\cdot\, f_i(z_{\sigma(1)}) \cdots f_i(z_{\sigma(s)}) f_j(w) f_i(z_{\sigma(s+1)}) \cdots f_i(z_{\sigma(a)}) = 0.$$

∗ 最後に, $e_{i,m}$ と $f_{i,m}$ の間の関係式が次で与えらえる.

$$[e_i(z), f_j(w)] = \frac{\delta_{i,j}}{q - q^{-1}} \big(\delta(q^{-c}\tfrac{z}{w}) \psi_i^-(q^{c/2}w) - \delta(q^{c}\tfrac{z}{w}) \psi_i^+(q^{-c/2}z)\big).$$

ここで $\mathfrak{S}_a$ は次数 a の対称群, δ は形式的デルタ関数 $\delta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n$ を表す.

次に楕円量子群 $U := U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ が H-Hopf 亜代数構造をもつことを説明する. $\mathbb{C}[\![p]\!]$ の上で議論を行うため, $\mathbb{F} := \mathcal{M}(H^*)$ を $\mathbb{F}[\![p]\!] := \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{C}} [\![p]\!]$ に延長する. $F \in \mathbb{F}[\![p]\!]$ を

$$F = F(P, p) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p^n F_n(P),$$

のように表す. ここで各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(P)$ は $\mathbb{F}$ の元である.

補題 4.2.2. 楕円量子群 U は, 次の位相的 H 代数構造をもつ.

$$U_{\alpha,\beta} \coloneqq \{a \in U \mid q^P a q^{-P} = q^{\langle \alpha, P\rangle} a,\ q^{P+h} a q^{-P-h} = q^{\langle \beta, P+h\rangle} a \quad (P, P+h \in \widetilde{H})\},$$
$$\mu_l(F) \coloneqq F(P, p^*), \quad \mu_r(F) \coloneqq F(P+h, p) \quad (F = F(P,p) \in \mathbb{F}[\![p]\!]).$$

命題 4.2.3. [HY22] 位相的 H 代数 U は, Drinfeld 型の H-Hopf 亜代数構造 (Δ, ε, S) をもつ.

5 Ding-Iohara 代数のダイナミカル類似

5.1 ADE 型のダイナミカル Ding-Iohara 代数

§4.1の記号を使用する. また本節では X_l は $X_l = A_l, D_l, E_{6,7,8}$ 型の有限ルート系とする.

定義 5.1.1. p を形式的変数, $\{G^{\pm}_{ij}(z;p) \mid i,j \in I\}$ を次の DI 条件を満たす関数の集合とする.

(i) $G^{\pm}_{ij}(z;p) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}][\![p]\!]$ であり, $\mathbb{C}(\!(z)\!)[\![p]\!]$ において可逆.

(ii) 級数 $g_{ij}(z;p) \coloneqq \frac{G^{+}_{ij}(z;p)}{G^{-}_{ij}(z;p)} \in \mathbb{C}(\!(z)\!)[\![p]\!]$ が関係式 $g_{ij}(z^{-1};p) = g_{ji}(z;p)^{-1}$ を満たす.

このような $g \coloneqq \{g_{ij}(z;p) \mid i,j \in I\}$ を構造関数と呼ぶ.

注意 5.1.2. $\overline{G}^{\pm}_{ij}(z) \coloneqq \lim_{p\to 0} G^{\pm}_{ij}(z;p) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ が定義できることに注意する. これらは $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ で可逆なので, $\overline{g}_{ij}(z) \coloneqq \frac{\overline{G}^{+}_{ij}(z)}{\overline{G}^{-}_{ij}(z)} \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$, が定義できて, $\overline{g}_{ij}(z^{-1}) = \overline{g}_{ji}(z)^{-1}$ を満たす.

定義 5.1.3. $A = A(X_l)$ を, X_l 型の Cartan 行列とする. q を $0 < |q| < 1$ を満たす複素数, p を形式的パラメータとする. 構造関数 $g = \{g_{i,j} \mid i,j \in I\}$(定義 5.1.1) を固定する. $U_{q,p}(g, X_l)$ を以下の生成元と関係式で位相的に定義される $\mathbb{C}[\![p]\!]$ 上の位相的代数とする.

- 生成元: $\mathcal{M}(\widetilde{H}^*),\ q^{\pm c/2},\ d,\ K^{\pm}_i,\ e_{i,m},\ f_{i,m},\ \psi^{\pm}_{i,m} \quad (i \in I,\ m \in \mathbb{Z})$.
- 関係式: 以下の生成カレントを用いる. 生成元の関係式は p で展開して得られる.

$$e_i(z) \coloneqq \sum_{m\in\mathbb{Z}} e_{i,m} z^{-m}, \quad f_i(z) \coloneqq \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{i,m} z^{-m}, \quad \psi^{\pm}_i(z) \coloneqq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \psi^{\pm}_{i,m} z^{-m},$$

  - $\mathcal{M}(\widetilde{H}^*)$ は部分代数, $q^{\pm c/2}$ は中心元かつ $q^{c/2}q^{-c/2} = 1$, $\psi^{\pm}_i(z)$, $K^{\pm}_i$ は可逆.
  - $F(P), F(P+h) \in \mathcal{M}(\widetilde{H}^*)$ は次を満たす.

$$\begin{aligned}
&F(P+h)d = dF(P+h),\ F(P)d = dF(P),\\
&F(P+h)K^{\pm}_i = K^{\pm}_i F(P+h \mp \langle Q_i, P+h\rangle),\ F(P)K^{\pm}_i = K^{\pm}_i F(P \mp \langle Q_i, P\rangle),\\
&F(P+h)e_i(z) = e_j(z)F(P+h),\ F(P)e_i(z) = e_i(z)F(P - \langle Q_i, P\rangle),\\
&F(P+h)f_i(z) = f_i(z)F(P+h - \langle Q_i, P+h\rangle),\ F(P)f_i(z) = f_i(z)F(P),\\
&F(P+h)\psi^{\pm}_i(z) = \psi^{\pm}_i(z)F(P+h - \langle Q_i, P+h\rangle),\ F(P)\psi^{\pm}_i(z) = \psi^{\pm}_i(z)F(P - \langle Q_i, P\rangle).
\end{aligned}$$

  - $d,\ K^{\pm}_i$ に関する残りの関係式は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
&[d, K^{\pm}_i] = 0, \quad [d, e_{i,m}] = m e_{i,m}, \quad [d, f_{i,m}] = m f_{i,m}, \quad [d, \psi^{\pm}_i] = m\psi^{\pm}_{i,m},\\
&K^{\pm}_i e_j(z) = q_i^{\mp a_{ij}} e_j(z) K^{\pm}_i, \quad K^{\pm}_i f_j(z) = q_i^{\pm a_{ij}} f_j(z) K^{\pm}_i, \quad [K^{\pm}_i, \psi^{\pm}_{i,m}] = 0.
\end{aligned}$$

– これ以降, 次の記号を用いる.

$$g_{ij}(z) := g_{ij}(z;p), \quad g^*_{ij}(z) := g_{ij}(z;p^*), G^{\pm}_{ij}(z) := G^{\pm}_{ij}(z;p), \quad G^{\pm *}_{ij}(z) := G^{\pm}_{ij}(z;p^*).$$

このとき $\psi^{\pm}_i$ を含む残りの関係式は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
&\psi^{\pm}_i(z)\psi^{\pm}_j(w) = \frac{g^*_{ij}(\frac{z}{w})}{g_{ij}(\frac{z}{w})}\psi^{\pm}_j(w)\psi^{\pm}_i(z),\ \psi^{+}_i(z)\psi^{-}_j(w) = \frac{g^*_{ij}(q^{-c}\frac{z}{w})}{g_{ij}(q^{c}\frac{z}{w})}\psi^{-}_j(w)\psi^{+}_i(z),\\
&\psi^{+}_i(z)e_j(w) = g^*_{ij}(q^{-c/2}\tfrac{z}{w})e_j(w)\psi^{+}_i(z),\ \psi^{+}_i(z)f_j(w) = g_{ij}(q^{c/2}\tfrac{z}{w})^{-1}f_j(w)\psi^{+}_i(z),\\
&\psi^{-}_i(z)e_j(w) = g^*_{ij}(q^{c/2}\tfrac{z}{w})e_j(w)\psi^{-}_i(z),\ \psi^{-}_i(z)f_j(w) = g_{ij}(q^{-c/2}\tfrac{z}{w})^{-1}f_j(w)\psi^{-}_i(z).
\end{aligned}$$

– 残りの関係式のうち 2 次式から成るものは, $i,j \in I$ に対して.

$$\begin{aligned}
&G^{-*}_{ij}(\tfrac{z}{w})e_i(z)e_j(w) = G^{+*}_{ij}(\tfrac{z}{w})e_j(w)e_i(z), \quad G^{+}_{ij}(\tfrac{z}{w})f_i(z)f_j(w) = G^{-}_{ij}(\tfrac{z}{w})f_j(w)f_i(z),\\
&[e_i(z), f_j(w)] = \frac{\delta_{i,j}}{q-q^{-1}}\big(\delta(q^{-c}\tfrac{z}{w})\psi^{-}_i(q^{c/2}w) - \delta(q^{c}\tfrac{z}{w})\psi^{+}_i(q^{c/2}z)\big).
\end{aligned}$$

また $a_{ij}=-1$ なる $i,j \in I$ に関して, $\widetilde{g}^*_{ij}(z) := \overline{g}_{ij}(z)/g^*_{ij}(z)$, $\widetilde{g}_{ij}(z) := g_{ij}(z)/\overline{g}_{ij}(z)$,

$$h_{ij} := \frac{(\overline{g}_{ii}(\frac{z_1}{z_2})+1)(\overline{g}_{ij}(\frac{z_1}{z})\overline{g}_{ij}(\frac{z_2}{z})+1)}{\overline{g}_{ij}(\frac{z_2}{z})+\overline{g}_{ii}(\frac{z_1}{z_2})\overline{g}_{ij}(\frac{z_1}{z})},$$

と定める. このとき e_i, e_j に関する Serre 型関係式は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{g}^*_{ii}(\tfrac{z_1}{z_2})\widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_1}{z})\widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_2}{z})e_i(z_1)e_i(z_2)e_j(z) - h_{ij}\widetilde{g}^*_{ii}(\tfrac{z_1}{z_2})\widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_1}{z})e_i(z_1)e_j(z)e_i(z_2)\\
&+\widetilde{g}^*_{ii}(\tfrac{z_1}{z_2})e_j(z)e_i(z_1)e_i(z_2) + \widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_1}{z})\widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_2}{z})e_i(z_2)e_i(z_1)e_j(z)\\
&- h_{ij}\widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_2}{z})e_i(z_2)e_j(z)e_i(z_1) + e_j(z)e_i(z_2)e_i(z_1) = 0.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

(5.1) で e_i を f_i, $\widetilde{g}^*$ を $\widetilde{g}$ に置き換えて f_i, f_j の間の Serre 関係式を定める.

次に $H = \sum_{i\in I}\mathbb{C}P_i$ に関して, $U := U_{q,p}(g, X_l)$ が H-Hopf 亜代数構造を持つことを説明する.

補題 5.1.4. $U = U_{q,p}(g, X_l)$ は以下の位相的 H 代数構造をもつ.

$$\begin{aligned}
&U_{\alpha,\beta} := \{a \in U \mid q^P a q^{-P} = q^{\langle \alpha, P\rangle}a,\ q^{P+h}aq^{-P-h} = q^{\langle \beta, P+h\rangle}a \quad (P, P+h \in \widetilde{H})\},\\
&\mu_l(F) := F(P, p^*), \quad \mu_r(F) := F(P+h, p) \quad (F = F(P,p) \in \mathbb{F}[\![p]\!]).
\end{aligned}$$

定理 5.1.5. H 代数 U は, Drinfeld 型の (位相的)H-Hopf 亜代数構造 (Δ, ε, S) をもつ.

定義 5.1.6. H-Hopf 亜代数 $U_{q,p}(g, X_l)$ を, (X_l 型) ダイナミカル Ding-Iohara 亜代数という.

5.2 Ding-Iohara 代数および楕円量子群との関係

ダイナミカル Ding-Iohara 代数 $U_{q,p}(g, X_l)$ から Ding-Iohara 代数 $U_q(g, X_l)$ および楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}}(X_l))$ が復元されることを説明する. 初めに $U_{q,p}(g, X_l)$ と $U_q(\overline{g}, X_l)$ の関係を述べる.

命題 5.2.1. $U''_{q,p}(g, X_l)$ を, 以下の元から生成される $U_{q,p}(g, X_l)$ の H-Hopf 部分亜代数とする.

$$q^{\pm c/2},\ e_{i,m},\ f_{i,m},\ \psi^{\pm}_{i,m} \quad (i \in I,\, m \in \mathbb{Z}).$$

このとき $U''_{q,p}(g, X_l)$ の極限 $p \to 0$ を考えると, 次の Hopf 代数の同型を得る.

$$\lim_{p\to 0} U''_{q,p}(g, X_l) \cong U_q(\overline{g}, X_l).$$

ここで $\overline{g} \coloneqq \{\overline{g}_{ij}(z) \mid i, j \in I\}$ は構造関数の極限から成る集合. また $U_q(\overline{g}, X_l)$ は simply-laced なルート系 X_l と構造関数 $\overline{g}$ に付随する Ding-Iohara 代数を表す.

$U_{q,p}(g, X_l)$ と $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}}(X_l))$ の関係は次のように述べられる.

系 5.2.2. $A = A(X_l)$ を X_l 型 Cartan 行列とし, $g = \{g_{ij}(z; p) \mid i, j \in I\}$ を次で定める.

$$g_{ij}(x; p) = \frac{G^+_{ij}(x; p)}{G^-_{ij}(x; p)} \coloneqq \frac{q^{-b_{ij}}\theta(q^{b_{ij}}x; p)}{\theta(q^{-b_{ij}}x; p)}.$$

このとき生成元同士の対応により, 次の位相的 H-Hopf 亜代数の同型を得る.

$$U_{q,p}(g, X_l) \cong U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}}(X_l)).$$

参考文献

[DI97] J. Ding, K. Iohara, *Generalization of Drinfeld Quantum Affine Algebras*, Lett. Math. Phys., **41**, 181–193 (1997).

[D89] V. G. Drinfeld, *New realization of Yangian and quantum affine algebra*, Soviet Math. Dokl., **36**, 212–216 (1988).

[F+09] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, *A commutative algebra on degenerate* $\mathbb{CP}^1$ *and Macdonald polynomials*, J. Math. Phys., **50**, no. 9, 095215, 42pp. (2009).

[HY22] M. Hattori, S. Yanagida, *A dynamical analogue of Ding-Iohara quantum algebras*, arXiv:2210.02777.

[J+99] M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, J. Shiraishi, *Elliptic algebra* $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$*: Drinfeld currents and vertex operators*, Comm. Math. Phys., **199**, 605–647 (1999).

[Ka90] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Kas95] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, **155**. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Ko20] H. Konno, *Elliptic Quantum Groups*, Springer Briefs in Math. Phys., **37**, Springer, 2020.

[M07] K. Miki, *A* (q, γ) *analog of the* $W_{1+\infty}$ *algebra*, J. Math. Phys., **48**, 123520, 35pp. (2007).