Uniform Weak Convergence to Additive Processes

幡　航太朗 (Kotaro Hata)*
(長谷部　高広 (Takahiro Hasebe)†氏との共同研究)

1　導入

無限分解可能分布は畳み込みの意味で n 乗根が存在する確率分布, すなわち $\mathbb{R}^d$ 上の確率分布 μ が無限分解可能であるとは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, ある $\mathbb{R}^d$ 上の確率分布 μ_n が存在し, $\mu = \mu_n^{n*}$ が成立することをいう. 無限分解可能分布には顕著な性質がいくつか知られているがそのうちの一つとして, 無限分解可能分布による弱極限は無限分解可能分布となり, さらにこの弱収束は Levy の三つ組の各要素による 3 条件に置き換えられる, というものがある. また無限小三角配列の行和が弱収束することは, ある無限分解可能分布に従う確率変数が弱収束することと同値になる, ということも古典的事実のうちの一つである. そこで本研究は加法過程の各時刻の分布が無限分解可能分布になることに着目し, 無限小三角配列によってうまく確率過程を構成し, さらに確率過程間の収束を新たにうまく定義することで加法過程に対する同分布性を仮定しない極限定理を得ることができたので紹介をする.

2　準備

2.1　記号・用語

まず, 使用する記号・用語について準備をする.

- P_X : 確率変数 X の分布.
- $C_\sharp(\mathbb{R}^d) := \{f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,;\, f$ は有界連続かつある原点近傍 U 上で $f = 0\}$.
- $C_{\sharp\sharp}(\mathbb{R}^d) := \{f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,;\, f$ は有界連続かつ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x|^2} = 0\}$.
- $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は原点近傍で $h(x) = x$ となる有界連続関数.
- 確率測度 μ に対して, $\mu = \langle A, \nu, \gamma\rangle$: 任意の $z \in \mathbb{R}^d$ に対して
  $\hat{\mu}(z) = \exp[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + i\langle z, \gamma\rangle + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z, h(x)\rangle\right) \nu(dx)]$ が成り立つことを表す.
  (ここで A は $d \times d$ 半正定値対称行列, ν は $\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |x|^2\, \nu(dx) < \infty$ なる測度, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ である.)
- 確率変数による二重列 $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ と正の実数 $R > 0$ に対して, 第 i 成分が $\displaystyle\int_{|x|<R} x_i\, P_{Z_{n,j}}(dx)$ で定義される $\mathbb{R}^d$ の元を $b_{n,j}^R$ を書く.
- 確率変数による二重列 $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ が与えられたときに $S_t^n := \displaystyle\sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor} Z_{n,j}$ で定義される確率過程 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ を単に二重列 $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ によって生成された確率過程と呼ぶ.
- $\mu = \langle A, \nu, \gamma\rangle$ を満たす確率測度 μ に対して, (i, j) 成分が $A_{i,j} + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h(x)_i h(x)_j\, \nu(dx)$ で定義された行列を ${}_h\tilde{A}$ と書く.

---

* 北海道大学大学院理学院数学専攻修士 2 年. 本研究の詳細をご希望の方は kotarohata1021[at]icloud.com までご連絡下さい
† 北海道大学大学院理学研究院准教授

2.2　無限分解可能分布に関する性質

この章では無限分解可能分布に関する事実を述べる．まず無限分解可能分布 μ に対して, ある $d \times d$ 半正定値対称行列 A, $\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |x|^2 \, \nu(dx) < \infty$ なる測度 ν, 及び $\gamma \in \mathbb{R}^d$ が一意に存在して, $\mu = \langle A, \nu, \gamma \rangle$ となることが知られている．この μ に対して定まる三つ組 $\langle A, \nu, \gamma \rangle$ を Levy の三つ組という．

また無限分解可能分布がある確率測度に弱収束しているとき, その極限分布は無限分解可能分布になることが知られている．さらにこの収束は, Levy の三つ組によって次のように言い換えられることが知られている．

Fact 2.1 ([3, Chapter Ⅶ, Theorem 2.9])**.** 無限分解可能分布列 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と無限分解可能分布 μ がそれぞれ $\mu_n = \langle A_n, \nu_n, \gamma_n \rangle$, $\mu = \langle A, \nu, \gamma \rangle$ を満たすものとする．このとき, μ_n が μ に弱収束することは以下の 3 条件が成り立つことと同値である．

(1) $\forall i, j = 1, 2, \dots d, \lim_{n\to\infty} ({}_h\tilde{A}_n)_{i,j} = ({}_h\tilde{A})_{i,j}$.

(2) $\forall f \in C_\sharp(\mathbb{R}^d), \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu$.

(3) $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$.

重要な確率過程のクラスとして, 加法過程と Lévy 過程があるが (以下, 加法過程と Lévy 過程の定義は [5] で導入されたものとする.), 無限分解可能分布は Lévy 過程とある意味での一対一対応があることが知られており, また加法過程に対しては次の関係があることが知られている．

Fact 2.2 ([5, Theorem 9.8])**.** 加法過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ の各時刻の分布は無限分解可能分布となる． さらに $P_{X_t} = \langle A_t, \nu_t, \gamma_t \rangle$ と表した時, 次の 3 条件が成り立つ．

(1) $A_0 = 0, \nu_0 = 0, \gamma_0 = 0$.

(2) $s \leq t$ ならば, 任意の $z \in \mathbb{R}^d$ に対して $\langle z, A_s z \rangle \leq \langle z, A_t z \rangle$, かつ任意のボレル集合 $B \subset \mathbb{R}^d$ に対して $\nu_s(B) \leq \nu_t(B)$.

(3) 任意の $z \in \mathbb{R}^d$ に対して $\lim_{s\to t} \langle z, A_s z \rangle = \langle z, A_t z \rangle$, かつ任意のボレル集合 $B \subset \mathbb{R}^d$ に対して
$\exists \varepsilon > 0 \,\mathrm{s.t.}\, B \subset \{x\,;\, |x| > \epsilon\} \Rightarrow \lim_{s\to t} \nu_s(B) = \nu_t(B)$, かつ $\lim_{s\to t} \gamma_s = \gamma_t$.

2.3　三角配列・無限小三角配列に関する性質

三角配列は極限定理を一般化するに際して現れる概念である．

Definition 2.3 (三角配列・無限小三角配列)**.** 確率変数による二重列 $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ が以下の条件 (1), (2) を満たすとき, $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ は三角配列であるという． これに加えてさらに (3) を満たす時, 特に $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ を無限小三角配列と呼ぶ．

(1) $k_n \to \infty$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{Z_{n,1}, Z_{n,2}, \dots, Z_{n,k_n}\}$ は独立.

(3) $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \sup_{j=1,2,\dots,k_n} P(|Z_{n,j}| > \varepsilon) = 0$.

無限小三角配列の行和に関する極限定理は無限分解可能分布の議論に落とし込むことができることが知られている．

Fact 2.4 ([4, Theorem 3.2.12])**.** $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ を無限小三角配列, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ を数列, Y を確率変数とする．このとき, $Z_{n,1} + Z_{n,2} + \cdots + Z_{n,k_n} - a_n$ が Y に弱収束することは, 任意の $R > 0$ に対して, 次を満たす確率変数列 Y_n が Y に弱収束することと同値である．

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, \widehat{P_{Y_n}}(z) = \exp\left[i \left\langle \sum_{j=1}^{k_n} b_{n,j}^R - a_n, z \right\rangle + \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1) \, P_{Z_{n,j} - b_{n,j}^R}(dx) \right].$$

3 主結果

3.1 問題設定

[1, Definition 2.3.] では次の収束概念が定められている.

Definition 3.1 (局所一様弱収束)**.** S, T を距離空間, $(\mu_t^n)_{t\in T}, (\mu_t)_{t\in T}$ を S 上の有限測度列とする. この時 $(\mu_t^n)_{t\in T}$ が $(\mu_t)_{t\in T}$ に局所一様弱収束するとは, 任意の有界集合 $B \subset T$ と任意の有界連続関数 $f\colon S \to \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in B} \left| \int_S f\, d\mu_t^n - \int_S f\, d\mu_t \right| = 0$$

が成り立つことである.

この局所一様弱収束に触発され, 次の一様弱収束を定義するに至った.

Definition 3.2 (一様弱収束)**.** $\{X_t^n\}_{t\in[0,1]}, \{X_t\}_{t\in[0,1]}$ を $\mathbb{R}^d$-値確率過程とする. この時, $\{X_t^n\}_{t\in[0,1]}$ が $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ に一様弱収束するとは, 任意の $z \in \mathbb{R}^d$ に対してその特性関数が一様収束すること, すなわち

$$\forall z \in \mathbb{R}^d,\ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \widehat{P_{X_t^n}}(z) - \widehat{P_{X_t}}(z) \right| = 0$$

が成り立つことをいい, $\{X_t^n\}_{t\in[0,1]} \xrightarrow{\text{u.w.}} \{X_t\}_{t\in[0,1]}$ と書く.

実は [2, Theorem 2.6] によって, 一様弱収束は局所一様弱収束の特別な場合であることがわかっている.

3.2 主結果

本研究は Fact 2.1, 2.4 の手法を基にすることで, 無限小三角配列によって生成された確率過程が加法過程に一様弱収束することの必要十分条件を得たので, その結果を報告する.

Theorem 3.3. $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ を無限小三角配列, $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ を加法過程で $P_{X_t} = \langle A_t, \nu_t, \gamma_t \rangle$ を満たすものとする. このとき $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ によって生成された確率過程列 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ に関して以下は同値である.

I) $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]} \xrightarrow{\text{u.w.}} \{X_t\}_{t\in[0,1]}$.

II) $\forall R > 0$,[*1]

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \left(b_{n,j}^R + \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\, P_{Z_{n,j}-b_{n,j}^R}(dx) \right) - \gamma_t \right| = 0.$

(2) $\displaystyle \forall i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, d,\ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} h(x)_{i_1} h(x)_{i_2}\, P_{Z_{n,j}-b_{n,j}^R}(dx) - ({}_h\tilde{A}_t)_{i_1,i_2} \right| = 0.$

(3) $\displaystyle \forall f \in C_{\sharp\sharp}(\mathbb{R}^d),\ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} f\, dP_{Z_{n,j}-b_{n,j}^R} - \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\nu_t \right| = 0.$

特に [2, Theorem 3.4] より (II)-(3) と (II)-(2) は次の 2 条件と同値である.

(1) $\displaystyle \forall t \in [0,1], \forall i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, d,\ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} h(x)_{i_1} h(x)_{i_2}\, P_{Z_{n,j}-b_{n,j}^R}(dx) = ({}_h\tilde{A}_t)_{i_1,i_2}.$

(2) $\displaystyle \forall t \in [0,1], \forall f \in C_\sharp(\mathbb{R}^d),\ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} f\, dP_{Z_{n,j}-b_{n,j}^R} = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\nu_t.$

無限小三角配列の各行に関してさらに同分布性を課すと次のことがわかる.

[*1] $\exists R > 0$ としてもよい.

Corollary 3.4. $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ を無限小三角配列で任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $Z_{n,1}\overset{\mathrm{d}}{=}Z_{n,2}\overset{\mathrm{d}}{=}\cdots\overset{\mathrm{d}}{=}Z_{n,k_n}$ を満たすものとする．このとき，$\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ によって生成された確率過程列 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ が加法過程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ に一様弱収束するならば $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ は Lévy 過程となる．さらに $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ が Lévy 過程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ に一様弱収束することは S_1^n が X_1 に弱収束することと同値である．

3.3 具体例の構成

各要素がデルタ分布に従う無限小三角配列が，ある加法過程に一様弱収束することの必要十分条件は以下で与えられる．ここで $a\in\mathbb{R}^d$ でのデルタ分布を δ_a で表す．

example 3.5. 数列 $(m_{n,j})\subset\mathbb{R}^d$ に対して，$\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ を $\mathbb{R}^d$-値三角配列で $P_{Z_{n,j}}=\delta_{m_{n,j}}$ を満たすものとする．このとき $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ が無限小三角配列となる必要十分条件は以下である．

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{j=1,2,\ldots,k_n}|m_{n,j}|=0.$$

さらに $\lim_{n\to\infty}\sup_{j=1,2,\ldots,k_n}|m_{n,j}|=0$ が成立していると仮定する．このとき，$\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ によって生成された確率過程列 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ に対して以下は同値である．

(1) ある加法過程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ が存在して，$\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}\xrightarrow{\text{u.w.}}\{X_t\}_{t\in[0,1]}$．

(2) ある数列 $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}\subset\mathbb{R}^d$ が存在して，$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor}m_{n,j}-\gamma_t\right|=0.$

上記が成り立つとき，$P_{X_t}=\langle 0,0,\gamma_t\rangle$ となる．

次に各要素がガウス分布に従う場合を考える．ここで平均 m，分散 v の正規分布を $N(m,v)$ で表す．

example 3.6. 数列 $(m_{n,j})\subset\mathbb{R}$ に対して，$\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ を $\mathbb{R}$-値三角配列で $P_{Z_{n,j}}=N(0,m_{n,j})$ を満たすものとする．このとき,$\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ が無限小三角配列となる必要十分条件は以下である．

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{j=1,2,\ldots,k_n}m_{n,j}=0.$$

さらに $m_{n,j}$ が $\lim_{n\to\infty}\sup_{j=1,2,\ldots,k_n}m_{n,j}=0$ を満たすと仮定する．このとき $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ によって生成された確率過程列 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ に対して以下は同値である．

(1) ある加法過程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ が存在して，$\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}\xrightarrow{\text{u.w.}}\{X_t\}_{t\in[0,1]}$．

(2) ある連続関数 $a\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ が存在して，$\forall t\in[0,1]$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor}m_{n,j}=a(t).$

(3) ある連続関数 $a\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ が存在して，$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor}m_{n,j}-a(t)\right|=0.$

上記が成り立つとき，$P_{X_t}=\langle a(t),0,0\rangle$ となる．

無限小三角配列の各要素が無限分解可能分布に従っているとき，一様弱収束の定義から直接，一様弱収束の言い換えが出る．つまり次が成り立ち，example 3.6 はその特殊な場合である．

Proposition 3.7. $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ を無限小三角配列で各 $Z_{n,j}$ は無限分解可能分布に従っている，すなわち，$P_{Z_{n,j}}=\langle A_{n,j},\nu_{n,j},\gamma_{n,j}\rangle$ を満たしているとする．さらに $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ を加法過程で $P_{X_t}=\langle A_t,\nu_t,\gamma_t\rangle$ を満たすものとする．このとき，$\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ によって生成された確率過程列 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ に対して以下は同値である．

I) $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}\xrightarrow{\text{u.w.}}\{X_t\}_{t\in[0,1]}$．

II) (1) $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor}\gamma_{n,j}-\gamma_t\right|=0.$

(2) $\forall i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, d, \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor} ({}_h\tilde{A}_{n,j})_{i_1,i_2} - ({}_h\tilde{A}_t)_{i_1,i_2} \right| = 0.$

(3) $\forall f \in C_{\sharp\sharp}(\mathbb{R}^d), \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\nu_{n,j} - \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\nu_t \right| = 0.$

特に [2, Theorem 3.4] より (II)-(2) と (II)-(3) は次の 2 条件と同値である．

(1) $\forall t \in [0,1], \forall i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, d, \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor} ({}_h\tilde{A}_{n,j})_{i_1,i_2} = ({}_h\tilde{A}_t)_{i_1,i_2}.$

(2) $\forall t \in [0,1], \forall f \in C_{\sharp}(\mathbb{R}^d), \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\nu_{n,j} = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\nu_t.$

4　謝辞

本研究は JSPS 二国間交流事業 JPJSBP120209921, JSPS 若手研究 19K14546, JSPS 基盤研究 (B) 18H01115 及び公益財団法人ウシオ財団様からの補助を受けたものである．ここに受けた援助に対して深く感謝の意を表する．

参考文献

[1] T. Hasebe and I. Hotta, Additive processes on the unit circle and Loewner chains, Int. Math. Res. Not. 2022 (2022), Issue 22, 17797–17848.

[2] T. Hasebe, I. Hotta and T. Murayama, Notes on locally uniform weak convergence with application to additive processes. arXiv:2301.04361.

[3] J. Jacod and A. N. Shiryaev, Limit Theorem for Stochastic Processes, Springer, 2003.

[4] M. M. Meerschaert and H. Scheffler, Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors Heavy Tails in Theory and Practice, Wiley InterScience, 2001.

[5] K. Sato, Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 68, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.