

# ベッチ数を指定した連結 2 部グラフの数え上げ

九州大学大学院 数理学府 数理学専攻

蓮井 太郎 (Taro HASUI)

## 概要

与えられたベッチ数を持つ連結で単純な 2 部グラフの個数に対し、2 変数生成関数を用いた 1 階線形偏微分方程式が得られる。本講演ではこの生成関数を紹介し、その係数の漸近挙動を述べる。次に連結な 2 部単純グラフを分類する基本グラフ族を用い、ラベル付き 2 部の根付き木の本数の有理関数の基本グラフ上での和として、生成関数の別表現を与える。本講演は白井朋之氏 (九大 IMI) と藪奥哲史氏 (北九州高専) との共同研究 [HSY22] による。

## 1 先行研究

この節ではグラフ理論の予備知識をおよび主結果に関係した先行研究を述べる。

**定義 1.1 (グラフ)** 集合  $V$  に対して、その 2 元部分集合族  $E \subset V \times V$  から決まる構造  $G = G(V, E)$  を **グラフ (graph)** と呼ぶ。なお  $V$  を **頂点集合 (vertex set)**、 $E$  を **辺集合 (edge set)** と呼ぶ。グラフ  $G$  から任意の頂点と任意の辺を選択して取り出したグラフ  $G'$  を  $G$  の **部分グラフ (subgraph)** と呼ぶ。さらにグラフにおいて、辺の向きを考慮するグラフを **有向グラフ (directed graph)**、考慮しないグラフを **無向グラフ (undirected graph)** と呼ぶ。またすべての頂点に辺が入った単純グラフを **完全グラフ (complete graph)** と呼ぶ。

**定義 1.2 (道, 閉路, ループ)** つながった辺の列を **道 (path)** という。また始点と終点と同じ道を **閉路 (cycle)** という。さらに同じ頂点対を持つ複数本の辺を **多重辺 (multiple edge)** と呼び、ある辺の両端点が等しいとき **ループ (loop)** と呼ぶ。

多重辺もループもないグラフを **単純グラフ** と呼ぶ。本稿の「グラフ」という表記はすべて単純で無向なグラフである。

さて、単純で無向なグラフ  $G$  を構成する頂点同士が辺でどのくらい繋がっているかを調べたい。そのために以下 **連結性** を導入する。

**定義 1.3 (連結グラフ)** 2 頂点間に道が存在する場合、2 つの頂点は **連結 (connect)** しているといい、グラフ上の任意の 2 頂点が連結なグラフを **連結グラフ (connected graph)** と呼ぶ

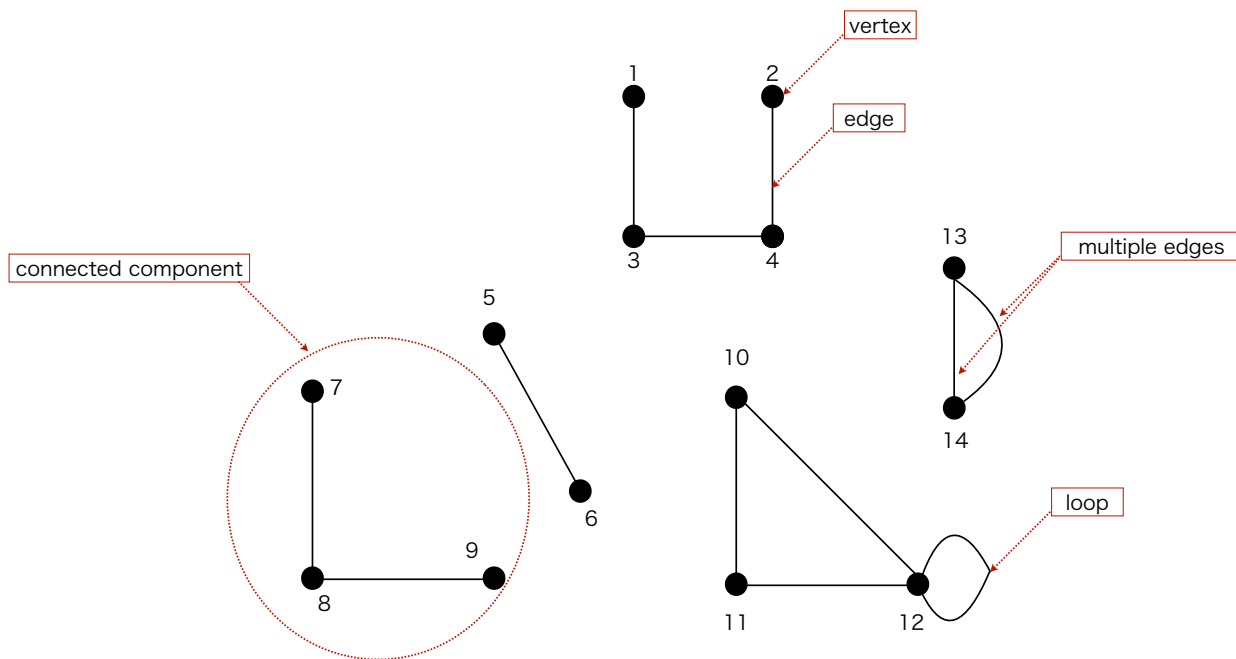


図 1: 非連結で単純でないグラフ

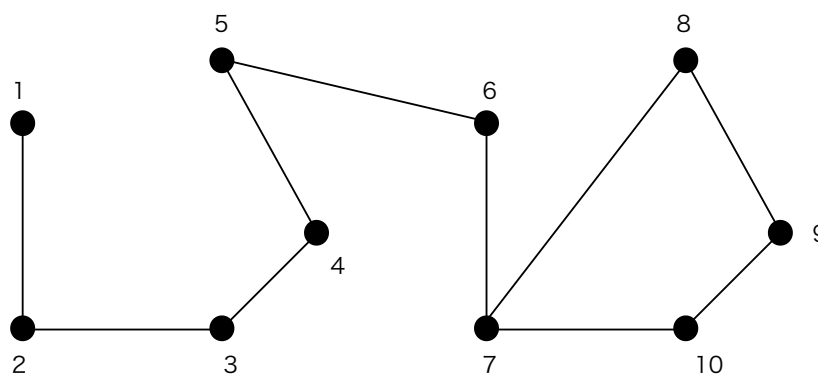


図 2: 連結で単純なグラフ

なお連結性はグラフだけでなく、**グラフの成分**，すなわちグラフを構成する頂点と辺の部分集合にも適用する．グラフ内の連結な成分を**連結成分 (connected component)**と呼ぶ．例えば図 1 は頂点集合  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$  辺集合  $E = \{1 - 3, 3 - 4, 4 - 2, 5 - 6, 7 - 8, 8 - 9, 10 - 11, 11 - 12, 10 - 12, 12 - 12, 13 - 14, 13 - 14\}$  である．さらに図示したように連結成分として  $\{7, 8, 9\}$  を持つ．当然  $\{7, 8, 9\}$  以外にも，例えば  $\{5, 6\}$  や  $\{13, 14\}$  なども連結成分である．また頂点 1 つのみの成分も連結成分とみなす．例えば図 1 は連結成分を 5 個持つが，グラフとしては非連結グラフであり，一方図 2 は連結グラフである．当然図 2 の連結成分は 1 つである．グラフとしては非連結でも，そのグラフを構成する成分においては連結なものが存在する．

さて，連結グラフないし連結成分は数種類に分類できる．

**定義 1.4 (単純グラフの木, サイクル, コンプレックス)** 単純グラフ  $G = (V, E)$  において,  $|E| -$

$|V| = k$  を考える.  $k = -1$  となるグラフを木 (tree) と呼び,  $k = 0$  となるグラフをサイクル (cycle) と呼ぶ. また  $k \geq 1$  のとき  $k$ -コンプレックス ( $k$ -complex) と呼ぶ.

連結グラフを扱っているので  $k$  はベッチ数 (Betti number) に相当する. すなわち各  $(r, s, r + s - 1 + k)$ -グラフの第 1 ホモロジー群の階数と同値である. ただしこのような連結グラフは頂点よりも辺の数が  $k - 1$  多い. 文献によってはベッチ数相当の  $k$  において,  $k - 1$  をエクセス (excess) と呼ぶ場合もある.

さて, 繰り返すが定義 1.4 は連結成分にも適用できる. 特に木において, あるグラフの全ての頂点と, そのグラフを構成する辺の一部で構成される木を全域木 (spanning tree) と呼ぶ. 以下  $G(V, E)$  において  $|V| = n, |E| = q$  の場合,  $(n, q)$ -グラフと記述する. さらに連結な  $(n, q)$ -グラフの個数を  $f(n, q)$  とする. さて, 完全グラフ  $K_n$  上の全域木は複数存在する. あるグラフの全域木の総数がいくつかは, [Cay89] によって以下のように知られている.

**定理 1.1 (Cayley's formula)**  $|V| = n$  の完全グラフ  $K_n$  上の全域木の個数  $f(n, n - 1)$  において,

$$f(n, n - 1) = n^{n-2}$$

が成り立つ.

例えば図 3(a) は頂点数  $|V| = 9$  のグラフの全域木である. 一方図 3(b) は赤の辺によってサイクルができており, サイクルを持たないという全域木の定義から外れている. なお当然図 3 以外にも全域木は存在し, その総数は定理 1.1 より,  $9^7$  通り存在する.

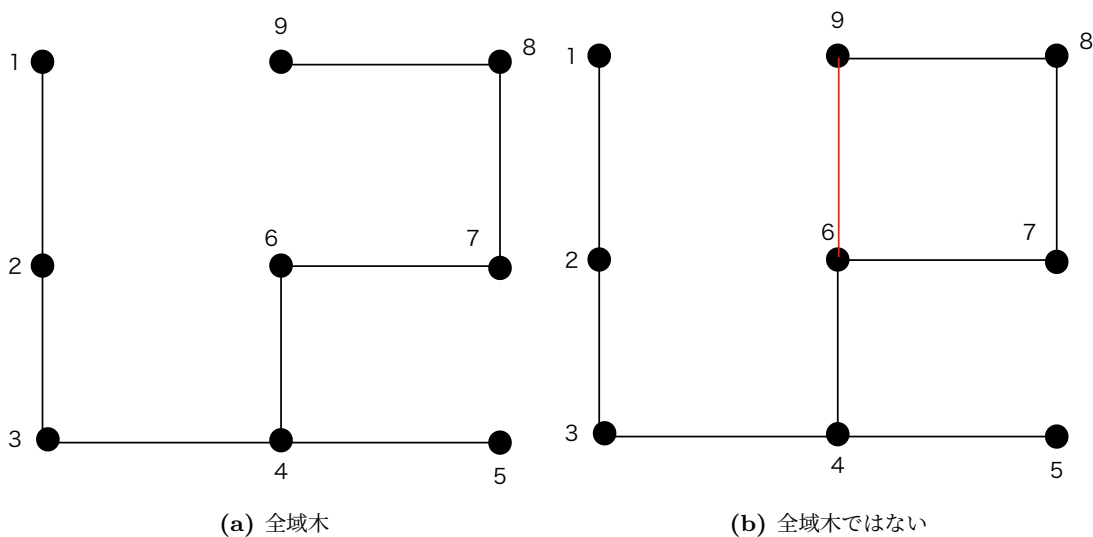


図 3:  $|V| = 9$  の全域木の一例

一方,  $|V| = n, |E| = n$  の場合, すなわち連結な  $(n, n)$ -グラフの総数  $f(n, n)$  は [Rén59] によると以下のように知られる.

**定理 1.2 (サイクルの総数およびその漸近挙動)**  $n$  頂点完全グラフ  $K_n$  上のサイクルグラフの総数

$f(n, n)$  において,

$$f(n, n) = \frac{1}{2} \left( \frac{h(n)}{n} - n^{n-2}(n-1) \right) \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} n^{n-1/2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. ただし,

$$h(n) = \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n}{s} s^s (n-s)^{n-s}$$

である.

次に, 単純グラフの頂点集合を2つに分割してできる **2部グラフ** を定義する.

**定義 1.5 (2部グラフ)** 頂点集合  $V$  を互いに素な集合  $V_1, V_2$  に分割でき, 辺集合  $E$  が  $E \subseteq \{(e, e') \mid e \in V_1, e' \in V_2\}$  となるとき, このグラフを **2部グラフ** と呼び,  $BG(V_1, V_2, E)$  と書く.

**定義 1.6 (2部グラフの木, サイクル, コンプレックス)** 単純な2部グラフ  $BG(V_1, V_2, E)$  において, 辺の数  $|E| = |V_1| + |V_2| - 1 + k$  を考える. ただし  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  である.  $k = 0$  となるグラフを **木 (tree)** と呼び,  $k \geq 1$  となるグラフを  $k$ -**サイクル ( $k$ -cycle)** と呼ぶ.

2部グラフにおいても  $k$  はベッチ数に対応する. すなわち  $k$  はサイクルの個数をあわらす. 本稿ではこの2部グラフの連結性について主に論じる. なお, 単純グラフの木および全域木はすべて2部グラフである. 以下2部グラフ  $BG(V_1, V_2, E)$  において,  $|V_1| = r, |V_2| = s, |E| = q$  のとき  $(r, s, q)$ -グラフと記述しよう. さらに連結な  $(r, s, q)$ -グラフの総数を  $f(r, s, q)$  とする. [Sco62] によると以下が成り立つ.

**定理 1.3 (2部グラフの全域木の総数)**  $|V_1| = r, |V_2| = s$  の完全グラフ  $K_{r,s}$  上の全域木の個数  $f(r, s, r+s-1)$  において,

$$f(r, s, r+s-1) = r^{s-1} s^{r-1}$$

が成り立つ.

つまり単純グラフの全域木と同じく, 2部グラフの全域木の総数も計算可能である. さて, 図4は  $(6, 6, 10)$ -グラフの例である. 2つの頂点集合  $V_1, V_2$  の内部に辺が存在しない. また, 図1.5は全域木だが, その総数は定理1.3より,  $f(6, 6, 10) = 6^{6-1} \cdot 6^{6-1}$  通り存在する.

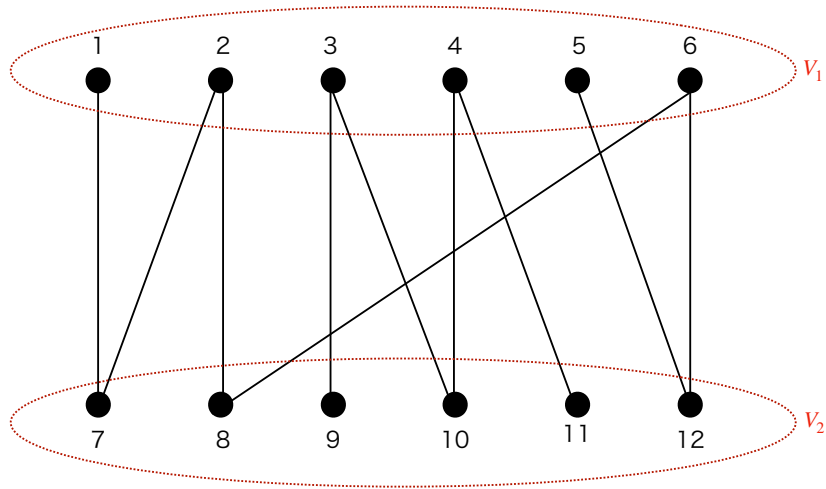


図 4:  $|V_1| = |V_2| = 6$  の 2 部連結グラフ

## 2 主結果

この節では蓮井, 白井, 藪奥による [HSY22] の主結果を述べる.

さて,  $f(r, s, r + s - 1 + k)$  を考えよう. ただし  $k = 0, 1, \dots$  である. また  $r + s = n$  である. このとき  $f(r, s, r + s - 1 + k)$  の指数型母関数を  $F_k(x, y)$  とする. すなわち,

$$F_k(x, y) := \sum_{r, s=0}^{\infty} \frac{f(r, s, r + s - 1 + k)}{r!s!} x^r y^s$$

である. また  $T := F_0(x, y)$  とする. すなわち  $k = 0$  の場合だが, 定理 1.3 より, 自明な計算で,

$$\begin{aligned} T(x, y) &:= F_0(x, y) \\ &= x + y + \sum_{r, s=1}^{\infty} \frac{r^{s-1} s^{r-1}}{r!s!} x^r y^s \end{aligned}$$

となる. さらに記号を設定しよう.  $D_x, D_y$  を  $x, y$  のオイラー微分とする. すなわち,

$$\begin{aligned} D_x &:= x \frac{\partial}{\partial x} \\ D_y &:= y \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

である. さらにこの  $D_x, D_y$  に関して, 以下のように記号を設定する.

$$\begin{aligned} T_x &:= D_x T \\ T_y &:= D_y T \\ Z &:= T_x + T_y \\ W &:= T_x T_y \end{aligned}$$

このとき以下が成り立つ.

**命題 2.1** ( $F_1$  の  $T_x, T_y$  表示)

$$F_1(x, y) = -\frac{1}{2} (\log(1 - T_x T_y) + T_x T_y)$$

また,  $F_2(x, y)$  に関しても以下が成り立つ.

**命題 2.2** ( $F_2$  の  $Z, W$  表示) 指数型母関数  $F_2(x, y)$  を  $F_2 = f_2(Z, W)$  と書くとする. このとき,

$$f_2(z, w) = \frac{w^2}{24(1-w)^3} \{(2+3w)z + 2w(6-w)\}$$

が成り立つ.

さて, 命題 2.1 および命題 2.2 で重要なのは,  $F_1(x, x), F_2(x, x)$  の係数である.  $F_k(x, x)$  の係数は  $K_n$  上のサイクルを  $k$  個持つ連結な 2 部グラフの総数を意味する. 例えば  $k = 1$  のとき, 命題 2.1 は, 簡単な計算で,

$$F_1(x, x) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{f(r, s, r+s)}{r!s!} x^n$$

となる. 以下, 指数型母関数  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$  に対し, 記号  $\langle \cdot \rangle$  を,

$$\langle x^n \rangle A(x) := a_n$$

と定義する.  $F_x(x, x)$  の  $\frac{x^{r+s}}{r!s!}$  の係数  $\langle x^n \rangle F_k(x, x)$  は,  $n$  個の頂点を持つベッチ数  $k$  の連結 2 部グラフの総数を表す. または,  $r + s = n$  より, 連結な  $(r, s, n - 1 + k)$ -グラフの総数を数えるという意味である. さて,  $k = 0$  のとき,

$$F_0(x, x) = 2 \left( x + \sum_{n=2}^{\infty} n^{n-2} \frac{x^n}{n!} \right)$$

である. さて, 命題 2.1 と命題 2.2 より,  $F_1(x, x), F_2(x, x)$  の係数の漸近挙動に関して以下が成り立つ.

**定理 2.1** ( $F_1(x, x)$  係数の漸近挙動)  $n = 4, 5, \dots$  に対し,

$$\langle x^n \rangle F_1(x, x) = n^{n-1} \sum_{2 \leq k \leq n/2} \frac{n!}{(n-2k)!n^{2k}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} n^{n-1/2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

定理 2.1 は頂点数  $n$  の完全 2 部グラフ上のサイクルグラフの総数の漸近挙動に対応する. 先行研究の定理 1.2 と比較すると, サイクルを 2 つ持つ  $n$  頂点のグラフの漸近挙動の主要項が, サイクルを 1 つ持つ  $r + s = n$  頂点の 2 部グラフの漸近挙動の主要項と一致しているのが分かる. 両者は有限の  $n$  では異なる. 表 1 を見れば明らかであろう. なお  $u_n := \langle x^n \rangle F_1(x, x)$  である.

また  $F_2(x, x)$  の係数について以下も成立する.

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(n, n)$	1	15	222	3660	68295	1436568	33779340	880107840	25201854045
$u_n$	0	6	120	2280	46200	1026840	25102224	673706880	19745850960

表 1:  $f(n, n)$  と  $u_n$  の  $n = 3, 4, \dots, 11$  までの比較

$n$	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(n, n+1)$	6	205	5700	156555	4483360	136368414	4432075200	154060613850
$b_n$	0	20	960	33600	1111040	37202760	1295884800	47478243120

表 2:  $f(n, n)$  と  $b_n$  の  $n = 4, 5, \dots, 11$  までの比較

定理 2.2 ( $F_2(x, x)$  係数の漸近挙動)  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\langle x^n \rangle F_2(x, x) \sim \frac{5}{48} n^{n+1}$$

が成り立つ.

定理 2.2 も定理 2.1 と同じく, 頂点数  $n$  の完全 2 部グラフ上のサイクルが 2 つあるようなグラフの総数の漸近挙動に対応する. なお [Wri77] において,  $K_n$  上のサイクルが 2 個あるような連結グラフの総数の漸近挙動の主要項は  $\frac{5}{24} n^{n+1}$  である. 定理 2.2 の式の 2 倍である.

$F_1(x, x)$  の係数の場合と同じく,  $F_2(x, x)$  の係数も有限の  $n$  では異なる. 表 2 から明らかであろう. なお  $b_n := \langle x^n \rangle F_2(x, x)$  とする. 定理 1.3 によって  $F_0$  が既知であるため, 原理的には  $F_k(x, y)$  は帰納的に計算できる. すなわち  $k$  に対し,  $n \rightarrow \infty$  のとき, 以下と予想できる.

予想 2.1 ( $F_k$  の値)  $k \geq 2$  のとき, 指数型母関数  $F_k(x, y)$  を  $F_k = f_k(Z, W)$  と書くとする. このとき,

$$f_k(z, w) = \frac{w^2}{(1-w)^{3(k-1)}} \sum_{j=0}^{k-1} q_{k,j}(w) z^j$$

が成り立つ. ただし  $q_{k,j}$  は  $w$  の多項式である. さらに,

$$\langle x^n \rangle F_k(x, x) \sim \frac{1}{2^{k-1}} \rho_{k-1} n^{n+(3(k-1)-1)/2}$$

も成り立つ. なお,

$$f(n, n+k) \sim \rho_k n^{n+(3k-1)/2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

であり,  $\rho_k$  の明示的な値は [Wri77] で与えられる.

なお  $F_k(x, y)$  の表示に関しては, 次のような結果も得た.

**定理 2.3 ( $F_k$  の別表示)**  $k \geq 2$  とする. このとき  $F_k$  は基本グラフを用いて,  $T_x, T_y$  の有理関数の和に分解される.

$$F_k(x, y) = \sum_{B \in BG_k} J_B(x, y)$$

ここで,

$$J_B(x, y) = \frac{T_x^{r_{sp}+a_1+2a_2+b_2+c_2} T_y^{s_{sp}+2a_1+a_2+b_1+c_2}}{g_B (1 - T_x T_y)^{a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2}},$$

である. なお  $BG_K$  は基本グラフ全体の集合.  $g_B, r_{sp}, s_{sp}, a_i, b_j, c_k (i, j, k = 1, 2)$  は基本グラフ  $B$  に関する情報である.

すなわち  $F_k$  は,  $k \geq 2$  の場合は  $T_x, T_y$  の有理関数である. 以下, 定理 2.3 で初めて登場した基本グラフについて述べる. ただしページ数の都合上概略のみ説明する. 正確な定義や証明は [HSY22] を参照されたい.

さて, 基本グラフとはサイクルを 2 つ以上持つ (すなわち  $k \geq 2$  となるような) 連結な 2 部グラフから「葉 (1 本だけ辺が接続している頂点) および葉に隣接する辺を除去する」という操作を、葉がなくなるまで繰り返して得られるグラフである.  $k \geq 2$  となる連結な 2 部グラフ  $G$  の基本グラフ  $B$  は, 必ず図 5 の各パーツを組み合わせた単純グラフになる. (図 5 の各パーツの辺を special path と呼び, 頂点を special cycle と呼ぶ.) また基本グラフ  $B$  は 2 部グラフ  $G$  の連結性に関する情報を保有する.

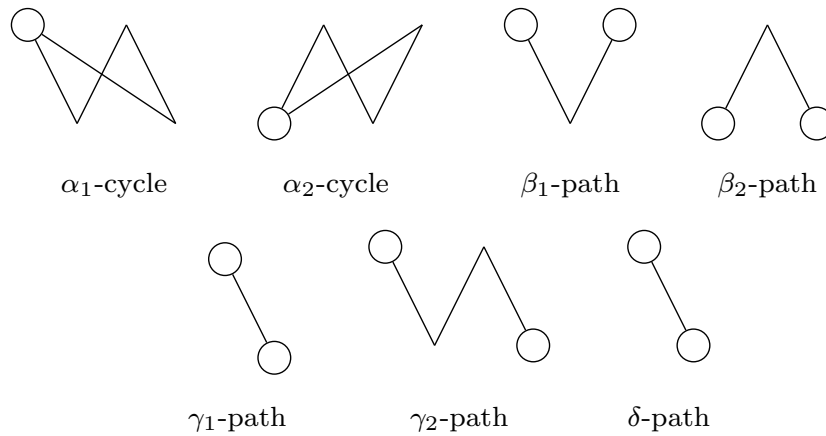


図 5: 基本グラフを構成するパーツ

定理 2.3 の系として以下も得た.

**系 2.1 ( $F_k$  の別表示)**  $k \geq 2$  のとき, 次を満たすような多項式  $\tilde{q}_k(x, y)$  が存在する.

$$F_k(x, y) = \frac{1}{(1 - T_x T_y)^{3(k-1)}} \tilde{q}_k(T_x, T_y)$$

この  $\tilde{q}_k(x, y)$  は  $1 - xy$  を因数に持たない.



## 参考文献

- [Cay89] Arthur Cayley. A theorem on trees. *Quart. J. Math.*, 23:376–378, 1889.
- [HSY22] Taro Hasui, Tomoyuki Shirai, and Satoshi Yabuoku. Enumeration of connected bipartite graphs with given betti number. *arXiv preprint arXiv:2208.03996*, 2022.
- [Rén59] Alfred Rényi. *On connected graphs*. Akadémiai Kiadó, 1959.
- [Sco62] H.I. Scoins. The number of trees with nodes of alternate parity. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 58, pages 12–16. Cambridge University Press, 1962.
- [Wri77] Edward M. Wright. The number of connected sparsely edged graphs. *Journal of Graph Theory*, 1(4):317–330, 1977.