曲面間の写像に関する Gauss-Bonnet 型公式

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
橋堀 恭矢 (Kyoya HASHIBORI)

概要

Gauss-Bonnet の定理は微分幾何学的量である Gauss 曲率と位相幾何学的量である Euler 数を結びつける定理であるが，この定理が意味を持つのは正則曲面上，つまり，特異点を持たない曲面上である．実際，Gauss 曲率は特異点では定義されない．では，特異点を持つ曲面上で成り立つような Gauss-Bonnet の定理の類似はあるのだろうか．ここでは，その 1 つの答えを曲面間の写像を使った議論を通して解説する．また，ここで得られた Gauss-Bonnet 型公式の応用として，Euler 数と回転数を結びつける Levine の公式を解説する．

1　導入

当講演では，波面の内在的定式化である “連接接束” の諸性質を，曲面間の写像の言葉を用いて書き下すことにより，連接接束という抽象的概念を具体的に理解することを目指す．連接接束という概念は，Riemann 多様体上の接束を一般化したものであり，佐治・梅原・山田によって導入された (曲面上の連接接束の定義は論文 [6] を，一般次元の多様体上の連接接束の定義は論文 [7] を参照)．その後，境界をもつ曲面上の連接接束の概念が，Domitrz・Zwierzyński によって定義され，彼らは，佐治・梅原・山田によって導出された境界を持たない曲面についての Gauss-Bonnet 型公式を，境界を持つ曲面の場合の公式に一般化した ([2, Theorem 2.20] を参照)．

ここで，論文 [2] に基づいて，境界を持ちうる曲面上の連接接束の概念を正確に定義しよう．

定義 1.1 M を境界を持ちうる向きづけられた曲面とする．M 上の**連接接束**とは，次の 2 つの条件を満たす 5 つ組のデータ $(M, \mathcal{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle, D, \varphi)$ のことである．

(i) $\mathcal{E}$ は M 上の階数 2 の向きづけ可能なベクトル束であり，$\mathcal{E}$ は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とこの内積と整合性をもつ接続 D を持つ．

(ii) $\varphi : TM \to \mathcal{E}$ はベクトル束の準同型写像で，任意の M 上のベクトル場 X, Y に対して，次の式を満たすものである．

$$D_X\varphi(Y) - D_Y\varphi(X) = \varphi([X, Y]).$$

例 1.2 (M, g) が Riemann 曲面であるとき，$\mathcal{E} := TM$, $\langle\cdot,\cdot\rangle := g$, $D := \nabla$, $\varphi := \mathrm{id}$ とおけば，定義より，$(M, TM, g, \nabla, \mathrm{id})$ は連接接束であることがわかる．ここで，∇ は g の Levi-Civita 接続である．このことから，連接接束は Riemann 曲面上の接束の一般化であることがわかる．

それから，[2, Theorem 2.20] を，当講演で解説する場合に還元した形で述べておく．

事実 1.3 ([2, Theorem 2.20]**)** $(M, \mathcal{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle, D, \varphi)$ をコンパクトで向きづけられた境界を持つ曲面 M 上の連接接束とする．φ は第 1 種の特異点と許容的な第 2 種の特異点だけを許容すると仮定し，φ の特異点集合 Σ と境界 ∂M は横断的であると仮定する．このとき，次の 2 つの式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\int_M K dA + 2\int_\Sigma \kappa_s ds + \int_{\partial M} \kappa_g ds \\ &= 2\pi\chi(M) + \sum_{p\in(\Sigma\cap\partial M)^{\mathrm{null}}} (2\alpha_+(p) - \pi), \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\int_M K d\widehat{A} + \int_{\partial M\cap M^+} \kappa_g ds - \int_{\partial M\cap M^-} \kappa_g ds \\ &= 2\pi\left(\chi(M^+) - \chi(M^-)\right) + 2\pi\left(\#S^+ - \#S^-\right) \\ &\quad +\pi\left(\#(\Sigma\cap\partial M)^+ - \#(\Sigma\cap\partial M)^-\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

事実 1.3 の中の記号たちは，第 2 節の中で，曲面間の写像の言葉を使った形で定義される．

もちろん，曲面が境界を持たなければ，式 (1.1), (1.2) は次の形に還元される．

$$\int_M K dA + 2\int_\Sigma \kappa_s ds = 2\pi\chi(M), \tag{1.3}$$

$$\int_M K d\widehat{A} = 2\pi\left(\chi(M^+) - \chi(M^-)\right) + 2\pi\left(\#S^+ - \#S^-\right). \tag{1.4}$$

さらに，佐治・梅原・山田は，論文 [7] の中で，Gauss-Bonnet 型公式の，曲面間の写像へのいくつかの応用を与えた．例えば，式 (1.3) を用いて "曲面版"Levine の公式を，式 (1.4) を用いて Quine の公式を導出できることを示した ([7, Proposition 3.6, Corollary 3.8] を参照)．なお，"曲面版" と書いたのは，Levine は偶数次元多様体の場合に公式を示したからである (論文 [5] を参照)．それから，Domitrz と Zwierzyński は，式 (1.2) を用いて福田-石川の公式の特別な場合を導出した ([2, Proposition 4.1] を参照)．なお，福田-石川の公式は，Quine の公式を境界を持つ曲面の場合に一般化した公式である．

以上のような背景に基づくと，我々は曲面版 Levine の公式を境界つき曲面に一般化することに興味をもつことは自然である．

当講演は次のような内容で構成されている．まず，曲面間の写像の言葉を用いて，連接接束の諸概念を見る．それから，曲面間の写像の言葉を使って，事実 1.3 を書き直す．最後に，曲面間の写像に関する Gauss-Bonnet 型公式を用いて，境界を持つ曲面についての Levine の公式を導出する．

2 曲面間の写像から誘導される連接接束と Gauss-Bonnet 型公式

曲面間の写像の言葉を使って連接接束の諸概念を考えることができるのは，次の例による．

例 2.1 ([7, Example 2.3]**)** M を向きづけられた曲面，(N, g) を向きづけられた Riemann 曲面，$f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．f^*TN を接束 TN の f による引き戻しとする．このとき，Riemann 計量 g の f による引き戻しが f^*TN 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を与え，g の Levi-Civita 接続 ∇ の f^*TN への制限 D が内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と整合性をもつ f^*TN 上の接続を与える．さらに，f の微分写像

$df : TM \to f^*TN$ がベクトル束の準同型写像を与え，M 上の任意のベクトル場 X, Y に対して，

$$D_X df(Y) - D_Y df(X) = df([X, Y])$$

を満たす．よって，5 つ組 $(M, f^*TN, \langle\cdot,\cdot\rangle, D, df)$ は M 上の連接接束である．これを**曲面間の写像 f から誘導される連接接束**と呼ぶ.

以下，境界を持つコンパクトで向きづけられた曲面 M と向きづけられた Riemann 曲面 (N, g) と C^∞ 級写像 $f : M \to N$ を固定することにより，f から誘導される連接接束 $(M, f^*TN, \langle\cdot,\cdot\rangle, D, df)$ を考える．内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の f による引き戻し $ds^2 := f^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ を M 上の**第 1 基本形式**と呼ぶ．点 $p \in M$ が f の**特異点**であるとは，f が p ではめ込みでないこと，すなわち，ds^2 が p において正定値でないことであり，f の特異点全体の集合を Σ で表す．$M\backslash\Sigma$ に含まれる点を f の**正則点**と呼ぶ.

N の向きに同調する局所座標系 $(V; x, y)$ をとる．TN の V への制限 $TN|_V$ 上の正の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとり，$\{\omega_1, \omega_2\}$ をその双対基底とする．このとき，$dA_N := \omega_1 \wedge \omega_2$ は V 上の正の正規直交基底の場の選び方によらないので，dA_N は N 上全体で定義される．dA_N を N 上の**面積要素**と呼び，dA_N の f による引き戻し $d\widehat{A} := f^*dA_N$ を M 上の**符号つき面積要素**と呼ぶ.

M の向きに同調する局所座標系 $(U; u, v)$ を $f(U) \subset V$ となるようにとる．このとき，

$$\lambda := d\widehat{A}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = (dA_N)_f\,(f_u, f_v) \quad \left(f_u := df\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), f_v := df\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right)$$

で与えられる U 上の C^∞ 級関数 λ を**符号つき面積密度関数**と呼ぶ．定義より, U 上で $d\widehat{A} = \lambda du \wedge dv$ と書けるのは明らかである．また，U 上の特異点集合は次のように表現される:

$$\Sigma \cap U = \{p \in U \mid \lambda(p) = 0\}.$$

さらに，$dA := |\lambda| du \wedge dv$ とおくと，dA は M の向きに同調する局所座標系の選び方によらないので，dA は M 上全体で定義される連続な 2 次微分形式を与える．dA を M 上の**面積要素**と呼ぶ.

さて，M 上の 2 次微分形式 $d\widehat{A}$ と dA を用いて，M の 2 つの開部分多様体 M^+ と M^- をそれぞれ次のように定義する:

$$M^+ := \left\{p \in M\backslash\Sigma \mid dA_p = d\widehat{A}_p\right\},\ M^- := \left\{p \in M\backslash\Sigma \mid dA_p = -d\widehat{A}_p\right\}.$$

すると，U 上の符号つき面積密度関数 λ を用いて，M^+ と M^- の局所的表現をそれぞれ次のように書くことができる:

$$M^+ \cap U = \{p \in U \mid \lambda(p) > 0\},\ M^- \cap U = \{p \in U \mid \lambda(p) < 0\}.$$

次に，接続形式を定義する．g の Levi-Civita 接続 ∇ の定義より，$f^{-1}(V)$ 上の任意のベクトル場 X に対して，

$$\langle D_X(\boldsymbol{e}_i \circ f), \boldsymbol{e}_i\rangle = g\left(\nabla_{df(X)}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i\right) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

が成り立つ．このことは $D_X(\boldsymbol{e}_i \circ f)$ と $\boldsymbol{e}_i$ が内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して直交していることを示している．よって，

$$D_X(\boldsymbol{e}_1 \circ f) = -\omega(X)\boldsymbol{e}_2,\ D_X(\boldsymbol{e}_2 \circ f) = \omega(X)\boldsymbol{e}_1$$

を満たす $f^{-1}(V)$ 上の 1 次微分形式 ω が一意的に存在し，これを**接続形式**と呼ぶ．ω の外微分 $d\omega$ は正の正規直交基底の場の選び方によらないので，$d\omega$ は M 上全体で定義された 2 次微分形式を定める．そして，f の正則点集合上で，$d\omega = Kd\widehat{A}$ が成り立つので，$d\omega$ の連続性から，$Kd\widehat{A}$ を M 上全体に滑らかに拡張することができる．ここで，K は M 上の ds^2 に関する Gauss 曲率である．

一方，ω_N を N 上の Levi-Civita 接続 ∇ に関する接続形式とすると，

$$D_X(\boldsymbol{e}_1 \circ f) = -f^*\omega_N(X)\boldsymbol{e}_2,\ D_X(\boldsymbol{e}_2 \circ f) = f^*\omega_N(X)\boldsymbol{e}_1$$

が成り立つから，$\omega = f^*\omega_N$ を得る．そして，古典的な接続の理論より，ω_N の外微分 $d\omega_N$ は $K_N dA_N$ に等しい．ここで，K_N は N 上の g に関する Gauss 曲率である．よって，

$$Kd\widehat{A} = d\omega = d(f^*\omega_N) = f^*(d\omega_N) = f^*(K_N dA_N) = (K_N \circ f)d\widehat{A} \tag{2.1}$$

が f の正則点集合上で成り立つ．

次に，非退化な特異点を定義し，それを 2 種類に分類することを考える．f の特異点 p が**非退化**であるとは，符号つき面積密度関数 λ の外微分 $d\lambda$ が p において消えないことである．p が非退化な特異点であるならば，陰関数定理により，p の十分に小さい近傍 U が存在して，U 上の特異点集合 $\Sigma \cap U$ を正則曲線 $\gamma(t)$ $(\gamma(0) = p)$ によってパラメータ表示することができる．このような曲線を**特異曲線**と呼び，接ベクトル $\gamma'(t) := d\gamma/dt(t)$ の方向を**特異方向**と呼ぶ．一方，f の p における微分写像 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ の階数は 1 であるから，$\mathrm{Ker} df_p$ の次元は 1 である．この T_pM の部分ベクトル空間 $\mathrm{Ker} df_p$ の方向を**退化方向**と呼ぶ．これら 2 つの方向を用いて，非退化な特異点を次のように分類する．すなわち，非退化な特異点における特異方向と退化方向が異なるとき，その点を**第 1 種の特異点**と呼び，そうでないとき，その点を**第 2 種の特異点**と呼ぶ．さらに，第 2 種の特異点 p の近傍 U で，$U \backslash \{p\}$ 上の特異点たちが全て第 1 種の特異点であるようなものが存在するとき，p は**許容的**であると言う．以下，f は第 1 種の特異点と許容的な第 2 種の特異点だけを許容すると仮定する．

例 2.2 曲面間の C^∞ 級写像 $f : M \to N$ の特異点 p が**折り目** (resp. **カスプ**) であるとは，p における f の写像芽が原点 0 における $(u, v) \mapsto (u, v^2)$ (resp. $(u, v) \mapsto (u^3 - 3uv, v)$) の写像芽に右左同値であることである．ここで，2 つの写像芽 $f_1, f_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ が**右左同値**であるとは，微分同相写像芽 $\varphi, \Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ で，$\Phi \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$ が成り立つようなものが存在することである．このとき，p は第 1 種の特異点 (resp. 許容的な第 2 種の特異点) であることが確かめられる．

次に，特異曲線の特異曲率を定義する．特異点 p が第 1 種であると仮定する．もちろん，p を通る特異曲線 $\gamma(t)$ $(\gamma(0) = p)$ が存在する．p の十分に小さい近傍 U をとると，$U \cap \mathrm{Im}\gamma$ が第 1 種の特異点だけからなるようにできるので，γ に沿う退化ベクトル場 $\eta(t)$ を，$\{\gamma'(t), \eta(t)\}$ が U の向きに同調するようにとることができる．$\gamma(t)$ が非退化な特異点であることを思い出すと，df の階数は 1 であるから，$f'(\gamma(t))$ は常に消えない．一方，$\lambda(\gamma(t)) = 0$ の両辺を t について微分すると，$d\lambda_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$ を得る．再び $\gamma(t)$ が非退化な特異点であることを思い出すと，$\mathrm{Ker} d\lambda_{\gamma(t)}$ の次元は 1 であるから，$d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))$ は常に消えない．このような考察のもと，γ の**特異曲率** κ_s を

$$\kappa_s(t) := -\mathrm{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t)))\frac{\langle \boldsymbol{n}'(t), f'(\gamma(t))\rangle}{|f'(\gamma(t))|^2}$$

によって定義する．ここで，$\boldsymbol{n}(t)$ は γ に沿う f^*TN の切断で，$\{f'(\gamma(t))/|f'(\gamma(t))|, \boldsymbol{n}(t)\}$ が γ に沿う f^*TN 上の正の正規直交基底の場を与えるものであり，$\boldsymbol{n}'(t)$ は $\boldsymbol{n}(t)$ の $\gamma'(t)$ 方向に関する共変微分 $D_{d/dt}\boldsymbol{n}(t)$ のことである．

注意 2.3 特異曲率は測地的曲率の極限であるという解釈をすることができる．実際，第 1 種の特異点のまわりに M の向きに同調する座標近傍 $(U; u, v)$ で，u 軸は第 1 種の特異点からなる特異曲線であり，u 軸に沿う退化方向は v 軸に平行であるようなものをとる．そして，U 上の正則曲線 $\gamma_c(t)$ $(c \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ を $\gamma_c(t) = (t, c)$ で定義する．ここで，ε は十分に小さい正の実数である．すると，γ_c $(c \neq 0)$ の測地的曲率 κ_g^c が

$$\kappa_g^c(t) := -\mathrm{sgn}(\lambda(\gamma_c(t)))\frac{\langle \boldsymbol{n}_c'(t), f'(\gamma_c(t))\rangle}{|f(\gamma_c'(t))|^2}$$

によって定義される．ここで，$\boldsymbol{n}_c(t)$ は γ_c に沿う f^*TN の切断で，$\{f'(\gamma_c(t))/|f'(\gamma_c(t))|, \boldsymbol{n}_c(t)\}$ が γ_c に沿う f^*TN 上の正の正規直交基底の場を与えるものであり，$\boldsymbol{n}_c'(t)$ は $\boldsymbol{n}_c(t)$ の $\gamma_c'(t)$ 方向に関する共変微分 $D_{d/dt}\boldsymbol{n}_c(t)$ のことである．このとき，$\gamma = \gamma_0$ の特異曲率 κ_s と γ_c $(c \neq 0)$ の測地的曲率 κ_g^c の間に，次のような関係が成り立つ ([8, Remark 1.7]):

$$\lim_{c\to+0}\kappa_g^c(t) = \kappa_s(t),\ \lim_{c\to-0}\kappa_g^c(t) = -\kappa_s(t).$$

次に，M を三角形分割することによって得られる三角形たちの内角の総和について考える．まず，M の内部 $M\backslash\partial M$ の中の第 2 種の特異点 p に集まる三角形たちの内角の総和について考える．p を中心とする M の向きに同調する局所座標系 (u, v) で，p を通る特異曲線に沿う退化方向が u 軸に平行であるようなものをとると，次の式が成り立つ ([6, Theorem A]):

$$\alpha_+(p) + \alpha_-(p) = 2\pi,\ \alpha_+(p) - \alpha_-(p) \in \{-2\pi, 0, 2\pi\}.$$

ここで，$\alpha_+(p)$ (resp. $\alpha_-(p)$) は p に集まる三角形たちの M^+ 側 (resp. M^- 側) の内角の総和である．$\alpha_+(p) - \alpha_-(p) = 2\pi$ (resp. 0, -2π) であるとき，p を**正** (resp. **零**, **負**) の特異点と言う．次に，境界 ∂M 上の特異点 p に集まる三角形たちの内角の総和を考える．p における退化方向が ∂M に横断的に交わる場合，p を中心とする局所座標系 (u, v) で，上のようなものをとると，次の式が成り立つ ([2, Theorem 2.13]):

$$\alpha_+(p) + \alpha_-(p) = \pi,\ \alpha_+(p) - \alpha_-(p) \in \{-\pi, \pi\}.$$

一方，p における退化方向が ∂M に接する場合，p を中心とする局所座標系 (u, v) で，やはり上のようなものをとると，次の式が成り立つ ([2, Theorem 2.13]):

$$\alpha_+(p) - \alpha_-(p) = 0.$$

$\alpha_+(p) - \alpha_-(p) = \pi$ (resp. 0, $-\pi$) であるとき，p を**正** (resp. **零**, **負**) の特異点と言う．

以上までで解説した概念たちを用いることにより，曲面間の写像に関する Gauss-Bonnet 型公式を得る．

定理 2.4 M を境界を持つコンパクトで向きづけられた曲面，(N, g) を向きづけられた Riemann 曲面，$f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．f は第 1 種の特異点と許容的な第 2 種の特異点だけを許容すると仮定し，f の特異点集合 Σ と境界 ∂M は横断的であると仮定する．このとき，次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\int_M (K_N \circ f) dA + 2\int_\Sigma \kappa_s ds + \int_{\partial M} \kappa_g ds \\
&= 2\pi\chi(M) + \sum_{p \in (\Sigma \cap \partial M)^{\mathrm{null}}} (2\alpha_+(p) - \pi), \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_M (K_N \circ f) d\widehat{A} + \int_{\partial M \cap M^+} \kappa_g ds - \int_{\partial M \cap M^-} \kappa_g ds \\
&= 2\pi\left(\chi(M^+) - \chi(M^-)\right) + 2\pi\left(\#S^+ - \#S^-\right) \\
&\quad + \pi\left(\#(\Sigma \cap \partial M)^+ - \#(\Sigma \cap \partial M)^-\right). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

ここで，S^+ (resp. S^-) は $M \backslash \partial M$ の中の正 (resp. 負) の第 2 種の特異点全体の集合を表し，$(\Sigma \cap \partial M)^+$ (resp. $(\Sigma \cap \partial M)^{\mathrm{null}}$, $(\Sigma \cap \partial M)^-$) は ∂M 上の正 (resp. 零，負) の特異点全体の集合を表す．

証明 曲面間の写像 f は連接接束 $(M, f^*TN, \langle \cdot, \cdot \rangle, D, df)$ を誘導することを思い出すと，事実 1.3 が成り立つ．そして，式 (2.1) が成り立つことを思い出すと，式 (1.1) と (1.2) から，式 (2.2) と (2.3) が導かれる． □

なお，(2.2) は [2, Proposition 4.2] の公式の一般化である．実際，折り目特異点とカスプ特異点はそれぞれ第 1 種の特異点，許容的な第 2 種の特異点の例である．

3 定理 2.4 の応用

Gauss-Bonnet 型公式を用いることにより，曲面版 Levine の公式と，Quine の公式を示すことができるということが [7] の中で紹介されている ([7, Proposition 3.6, Corollary 3.8])．それから，Gauss-Bonnet 型公式を用いることにより，Quine の公式の境界を持つ曲面への一般化である福田・石川の公式を示すことができるということが [2] の中で紹介されている ([2, Proposition 4.1])．ここでは，Gauss-Bonnet 型公式を用いることにより，曲面版 Levine の公式の境界を持つ曲面への一般化を与える．

定理 3.1 M を境界を持つコンパクトで向きづけられた曲面とし，$f : M \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級写像とする．f は第 1 種の特異点と許容的な第 2 種の特異点だけを許容すると仮定し，f の特異点集合 Σ と境界 ∂M は交わらないと仮定する．$\{c_1, \cdots, c_r\}$ を Σ の連結成分の全体とし，$\{e_1, \cdots, e_s\}$ を ∂M の連結成分の全体とする．このとき，次の式を満たすような $\{c_1, \cdots, c_r\}$ と $\{e_1, \cdots, e_s\}$ の向きがそれぞれ唯 1 つ存在する:

$$\frac{\chi(M)}{2} = \sum_{i=1}^{r} I(c_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} I(e_i). \qquad (3.1)$$

ここで，$I(c_i)$ (resp. $I(e_i)$) は c_i (resp. e_i) の回転数を表す．

証明 f は曲面と平面の間の写像であるから，f は連接接束 $(M, f^*T\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle, D, df)$ を誘導する．$\mathbb{R}^2$ の Gauss 曲率は 0 であるという事実と Σ が ∂M に交わらないという仮定により，式 (2.2) は次のように還元される:

$$2\int_{\Sigma}\kappa_s ds + \int_{\partial M}\kappa_g ds = 2\pi\chi(M). \tag{3.2}$$

ここで，[9, Theorem 5.4.8] により，各 $f(c_i)$ $(i = 1, \cdots, r)$ の平面曲線としての曲率は，c_i の特異曲率に一致するから，

$$\int_{\Sigma}\kappa_s ds = 2\pi\sum_{i=1}^{r} I(c_i) \tag{3.3}$$

が成り立つ．さらに，各 $f(e_i)$ $(i = 1, \cdots, s)$ の平面曲線としての曲率は，e_i の測地的曲率に一致するから，

$$\int_{\partial M}\kappa_g ds = 2\pi\sum_{i=1}^{s} I(e_i) \tag{3.4}$$

が成り立つ．最後に，式 (3.2)-(3.4) を組み合わせることによって，式 (3.1) を得る． □

注意 3.2 定理 3.1 は，次の意味で [4] の曲面版 Levine の公式の一般化になっている．実際，[4] では，曲面と平面の間の写像は安定であるという仮定のもとで導かれた公式である．ここで，C^∞ 級写像 $f : M \to \mathbb{R}^2$ が**安定**であるとは，f の近傍 $N(f) \subset C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ で，$N(f)$ に含まれる全ての C^∞ 級写像が f に右左同値であるようなものが存在することである．ここで，$C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ は M から $\mathbb{R}^2$ への C^∞ 級写像全体の集合で，Whitney C^∞ 位相が与えられているものである．そして，f の特異点集合 Σ と境界 ∂M が交わらなければ，f は特異点として折り目とカスプしか許容しないことが知られている ([1]).

参考文献

[1] J. W. Bruce, P. J. Giblin, *Projections of surfaces with boundary.* Proc. London Math. Soc. (3) **60** (1990), no. 2, 392–416.

[2] W. Domitrz, M. Zwierzyński, *The Gauss-Bonnet theorem for coherent tangent bundles over surfaces with boundary and its applications.* J. Geom. Anal. **30** (2020), no. 3, 3243–3274.

[3] T. Fukuda, G. Ishikawa, *On the number of cusps of stable perturbations of a plane-to-plane singularity.* Tokyo J. Math. 10 (1987), no. 2, 375–384.

[4] H. Levine, *Computing the Euler characteristic of a manifold with boundary.* Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), no. 8, 2563–2567.

[5] H. Levine, *Mappings of manifolds into the plane.* Amer. J. Math. 88 (1966), 357–365.

[6] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *Behavior of corank-one singular points on wave fronts.* Kyushu J. Math. **62** (2008), no. 1, 259–280.

[7] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts.* J. Geom. Anal. **22** (2012), no. 2, 383–409.

[8] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *The geometry of fronts.* Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 491–529.

[9] M. Umehara, K. Saji, K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities.* Translated from the 2017 Japanese original by Wayne Rossman. Series in Algebraic and Differential Geometry, 1. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ 2022.