Gromov boundaries of non-proper hyperbolic geodesic spaces

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
長谷川 耀（Yo HASEGAWA）

概 要

数学の一分野として幾何学的群論と呼ばれるものがある．幾何学的群論とは一言でいうならば, 無限離散群の性質を幾何学的手法で研究する分野といえる．この分野では, 群に対し Cayley グラフを考えることにより, 群そのものを幾何学的対象, つまり距離空間（測地空間）としてみなすのが常套手段である．1980 年代, Gromov は距離空間に対して Gromov 積を定義し, それを用いて距離空間が双曲的であるという性質を定義した．また, Gromov は有限生成群が双曲的であるという性質を,「Cayley グラフが双曲的測地空間となるような有限生成系が存在する」として定義し, 多くの重要な事実を示した．これが双曲群の理論の始まりであり, 幾何学的群論の研究で主要な役割を演じる理論の一つとなっている．双曲群を研究するにあたって強力な武器となるのが双曲的測地空間における“無限遠”の概念である．その一つに Gromov 境界がある．本稿では双曲的測地空間の Gromov 境界に関する既知の事実と新しく得られた結果について述べることにする．詳細に関しては [1,2,3,4,5] を参照されたい．

1 双曲的測地空間

定義 1. (X,d) を距離空間とする．3 点 $x,y,z \in X$ に対して, Gromov 積 $(y|z)_x$ を

$$(y|z)_x = \frac{1}{2}\{d(y,x)+d(z,x)-d(y,z)\}$$

で定義する．距離空間 (X,d) が双曲的であるとは, 任意の 4 点 $x_0,x,y,z \in X$ に対して,

$$(x|y)_{x_0} \geq \min\{(x|z)_{x_0},(y|z)_{x_0}\} - \delta$$

が成り立つような $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在することである．また, 距離空間 (X,d) の任意の 2 点が測地線で結べるとき, X は測地空間であるという．

2 点列境界

定義 2. X を基点 x_0 を持つ距離空間とするとき, $\lim_{i,j\to\infty}(x_i|x_j)_{x_0} = \infty$ を満たす点列 $\{x_i \in X\}$ を無限遠に収束する点列という．

この定義は基点 x_0 のとり方によらない．以降基点を問題にしない場合は明示しないこととする．

定義 3. 双曲的空間 X に対して, $S_\infty(X)$ で無限遠に収束する X の点列全体の集合を表すことにし, $S_\infty(X)$ に関係 R を, $\{x_i\}R\{y_i\} \Leftrightarrow \lim_{i,j\to\infty}(x_i|y_i) = \infty$ によって定める．すると, X が双曲的であることから R が同値関係であることが従う．このとき, 商集合 $S_\infty(X)/R$ を X の点列境界と呼び, $\partial_s X$ で表す．点列 $\{x_i\}$ が $\partial_s X$ の同値類 x を表すとき, $\{x_i\}$ は x に収束するという．$x,y \in X \cup \partial_s X$ であるとき, x に収束する点列 $\{x_i\}$ と y に収束する点列 $\{y_i\}$ について $\liminf_{i\to\infty}(x_i|y_i)$ を考え, x,y に収束する点列全体で inf をとったものを $(x|y)$ と定義する．$X \cup \partial_s X$ に次の 2 種類の部分集合を基とする位相を入れ, この部分空間として点列境界 $\partial_s X$ にも位相が入る．

- 中心 $x \in X$, 半径 $r > 0$ の開球 $\{y \in X \mid d_X(x,y) < r\}$.
- $x \in \partial_s X$ と $r > 0$ に対して, $\{y \in X \cup \partial_s X \mid (y|x) > r\}$.

3　測地境界

定義 4. X を基点 p を持つ測地空間とする．

(i) X の測地境界 $\partial_g X$ を次で定義する．

$$\partial_g X := \left\{ r\colon [0,\infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は測地半直線 } \right\} /\!\sim.$$

ただし, 2 つの測地半直線 $r, r'\colon [0,\infty) \to X$ に対して, $\mathrm{im}\, r$ と $\mathrm{im}\, r'$ の Hausdorff 距離が有限であるとき, $r \sim r'$ と定める．

(ii) X の点 p に関する測地境界 $\partial_{g,p} X$ を次で定義する．

$$\partial_{g,p} X := \left\{ r\colon [0,\infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は点 } p \text{ を発する測地半直線 } \right\} /\!\sim.$$

ただし, 同値関係 $\sim$ は上と同様である．

(iii) X の（点 p を発する）測地半直線全体の集合には広義一様収束の位相が入るので, $\partial_g X$（$\partial_{g,p} X$）にはその商位相を入れる．

ここで, 基点に関するものとそうでないものとがあるが, 固有な測地空間（つまり任意の有界閉集合がコンパクトである測地空間）に対しては, これら 2 つの境界が位相も込めて一致することが知られている．

4　点列境界 vs. 測地境界

点列境界と測地境界の間には次のよく知られた事実がある．

定理 5 ([2, 4, 5])**.** X を固有な双曲的測地空間とし, p を X 内の点とする．このとき X の点列境界 $\partial_s X$ と点 p に関する測地境界 $\partial_{g,p} X$ は同相である．

すなわち, 固有な双曲的測地空間に対しては, 点列境界と（基点に関する）測地境界が位相も込めて一致する．例えば, n 次元双曲空間 $\mathbb{H}^n$ は固有な双曲的測地空間であるので, その点列境界が $n-1$ 次元球面 S^{n-1} に同相であることが, Poincaré disk model において原点に関する測地境界を考えることにより容易にわかる．ここで双曲的測地空間が固有であるという条件は外せない．つまり, 固有でない双曲的測地空間に対しては, 必ずしも点列境界と基点に関する測地境界は一致しない．例としては次のようなものがある．

例 6. $\mathbb{B}^2$ を双曲平面の Poincaré disk model とし, $p = (0,0)$ を $\mathbb{B}^2$ 内の基点とする．$\mathbb{B}^2$ から open half disk を取り除いた後, 点 p を通る測地直線から開半直線を取り除く（図 1 を参照）．こうして得られる固有でない双曲的測地空間を考える．すると, 点列 $\{x_i\}$ で点列境界の点 x に収束するものは存在するが, 点 p を発する測地半直線で点 x に伸びるものは存在しない．ゆえに, 点列境界と基点に関する測地境界は一致しない．

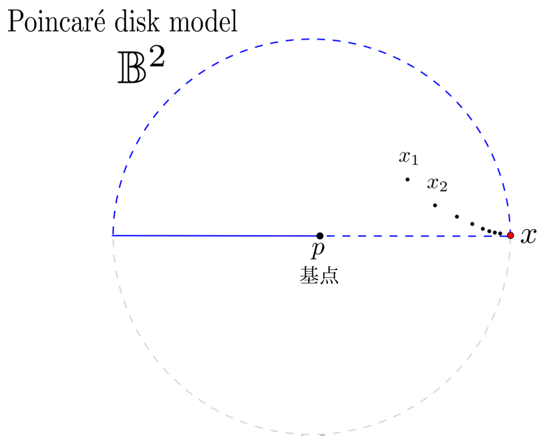

図 1: 点列境界と基点に関する測地境界が一致しない例

5　擬測地境界

ここでは測地空間に定義される測地境界の概念を少し緩めた, 擬測地空間に定義される擬測地境界について紹介する. そのための準備として $\mathcal{Q} := [1, \infty) \times [0, \infty)$ とし, $(c, b), (c', b') \in \mathcal{Q}$ に対して $c \le c'$ かつ $b \le b'$ のとき $(c, b) \le (c', b')$ と定める. このとき $(\mathcal{Q}, \le)$ は有向集合となる.

定義 7. 距離空間 (X, d) が擬測地空間であるとは, ある定数 $(c, b) \in \mathcal{Q}$ が存在し, X の任意の 2 点が (c, b)-擬測地線で結べるときをいう. ここで, $\gamma\colon I \to X$ が (c, b)-擬測地線であるとは, 任意の $t, t' \in I$ に対して,

$$\frac{1}{c}\,|t - t'| - b \le d(\gamma(t), \gamma(t')) \le c\,|t - t'| + b$$

を満たすことをいう. ただし, I は $\mathbb{R}$ の閉区間である.

定義より, $(1, 0)$-擬測地空間は測地空間になっている.

定義 8. 以下, X を基点 p を持つ擬測地空間とし, $(c, b) \in \mathcal{Q}$ とする.

(i) (a) (c, b)-擬測地半直線全体の集合を $QGR^{(c,b)}(X)$ と書く, i.e.

$$QGR^{(c,b)}(X) := \left\{ r\colon [0, \infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は } (c, b)\text{-擬測地半直線} \right\}.$$

(b) X の擬測地境界 $\partial_q X$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} \partial_q X &:= \left\{ r\colon [0, \infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は擬測地半直線} \right\} / \sim \\ &= \bigcup_{(c,b) \in \mathcal{Q}} QGR^{(c,b)}(X) \Big/ \sim. \end{aligned}$$

ただし, 2 つの擬測地半直線 $r, r'\colon [0, \infty) \to X$ に対して, $\mathrm{im}\, r$ と $\mathrm{im}\, r'$ の Hausdorff 距離が有限であるとき, $r \sim r'$ と定める.

(ii) (a) 点 p を発する (c, b)-擬測地半直線全体の集合を $QGR_p^{(c,b)}(X)$ と書く, i.e.

$$QGR_p^{(c,b)}(X) := \left\{ r\colon [0, \infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は点 } p \text{ を発する } (c, b)\text{-擬測地半直線} \right\}.$$

(b) X の基点 p に関する擬測地境界 $\partial_{q,p}X$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}\partial_{q,p}X &:= \left\{ r\colon [0,\infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は点 } p \text{ を発する擬測地半直線} \right\} /\!\sim \\ &= \left. \bigcup_{(c,b)\in\mathcal{Q}} QGR_p^{(c,b)}(X) \middle/ \sim . \right.\end{aligned}$$

ただし, 同値関係 $\sim$ は上と同様である.

(iii) 各集合 $QGR^{(c,b)}(X)$ ($QGR_p^{(c,b)}(X)$) には広義一様収束の位相が入るので, $\partial_q X$ ($\partial_{q,p}X$) には $QGR^{(c,b)}(X)$ ($QGR_p^{(c,b)}(X)$) から誘導される順極限位相の商位相を入れる.

ここで, 基点に関するものとそうでないものとがあるが, 擬測地空間に対してこれら 2 つの境界が位相も込めて一致することが確かめられる.

6 点列境界 vs. 擬測地境界

固有でない双曲的測地空間に対して, 点列境界と測地境界は一致しなかったが, 点列境界と擬測地境界に対しては次が成り立つ.

定理 9 ([3])**.** X を双曲的測地空間とし, p を X 内の点とする. このとき X の点列境界 $\partial_s X$ と点 p に関する擬測地境界 $\partial_{q,p}X$ は同相である.

すなわち, 固有とは限らない双曲的測地空間に対しては, 点列境界と（基点に関する）擬測地境界が位相も込めて一致する. Arzelà-Ascoli の定理より, 固有な測地空間に対して測地境界と擬測地境界が同相であることは確かめられるため, これは定理 5 の一般化になっている.

7 Gromov 境界

最後に, 本稿の題目でもある Gromov 境界についてであるが, 実は Gromov 境界は点列境界の別名と考えて問題ない. ただ点列境界と異なり, Gromov 境界は次のように“総称”として定義される場合も多い.

- 固有な双曲的測地空間 X に対して, その Gromov 境界 ∂X とは点列境界または（基点に関する）測地境界のことである.

つまり, 定理 5 より固有な双曲的測地空間においては点列境界と（基点に関する）測地境界は位相空間として同じものであったので, そのような位相空間を Gromov 境界と呼ぼうということである. 双曲的測地空間が固有でない場合においても, 定理 9 より点列境界と（基点に関する）擬測地境界は位相空間として同じものであるので, 次のように定義して良いことがわかる.

- 固有でない双曲的測地空間 X に対して, その Gromov 境界 ∂X とは点列境界または（基点に関する）擬測地境界のことである.

参考文献

[1] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric spaces of non-positive curvature, Springer, Bellin, 1999.

[2] C. Druţu, M. Kapovich, Geometric Group Theory, Colloquium Publications vol. 63, American Mathematical Society, 2018

[3] Y. Hasegawa, Gromov boundaries of non-proper hyperbolic geodesic spaces, Tokyo J. Math. Vol. 45, No. 2, 2022

[4] I. Kapovich and N. Benakli, Boundaries of hyperbolic groups. In Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001), volume 296 of Contemp. Math., pages 39–93, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[5] K. Ohshika, Discrete groups, Translation of Math. Monographs vol. 207, American Mathematical Society, 2001.