Grothendieck inequality and its application

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系
原渚彩 (Nagisa Hara)

概要

Grothendieck の定理は, Banach 空間論における中心的な定理のひとつであり, これまで C^* 環論, 作用素空間論の枠組みにおいて, そのアナロジーが研究されてきた. また, この定理は興味深いことに, 全く異なる文脈で発展してきた量子情報理論 (QIT) やコンピューターサイエンスにおいて, 深い関連性や応用があることがわかっている. 以来, 数学の枠組みにとどまらず, 他分野と双方向に影響を及ぼし合い, 研究されてきた. 本稿では, Grothendieck の定理の最近の進展と共に, 特に QIT との関連性を議論する.

1 導入

関数解析において, Banach 空間は基本的な設定である. Banach 空間とは, 線型空間に適当なノルム（位相）を備えた完備な距離空間であった. 特に L_p 空間 $(1 \le p \le \infty)$ が重要な例となる. ここで L_p 空間とは, ある (Ω, μ) 測度空間が存在して, その上の可測函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ のうち, $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ というノルムについて閉じた函数空間を指す.

そして, Banach 空間の性質を解析するにあたって, テンソル積は欠かせない. 一般にテンソル積は双線型写像を線型化するために用いられる技術であるが, 二つの線型空間から大きな一つの線型空間を構成する手続きでもある. Banach 空間に対してはさらにテンソル積上のノルムを考えることによって, 線型写像, 双線型写像, テンソル積の対応（ダイアグラム）を追いながら議論ができる.

このテンソル積の研究を始めた数学者は複数人いて, 中でも 1950 年代の Grothendieck の功績は大きい. 彼は"Résumé"[7] のなかでテンソル積とその上のノルムを考察し, Hilbert 空間 (L_2) と Banach 空間 (特に L_1, L_∞) の非自明な関係を明らかにした. 彼の業績が広く知られるところとなるには出版から 15 年の月日を要したものの, そのアイデアは C^* 環論, 作用素空間論へと受け継がれて今日に至る.

このように関数解析の枠組みで Grothendieck の定理が発展していく一方で, 量子情報理論 (QIT) やコンピューターサイエンス (CS) においてもその応用が議論されている. QIT では, Bell の不等式と Grothendieck の不等式の関連性が指摘され, CS では PvsNP 問題へ適用できることが確認されている. このようにして, 純粋数学にとどまらず, 他分野へも大きな影響を今なお与え続けいている.

以下, 特に断りのない限り M_n は体 $\mathbb{K}$ 上の $n \times n$ 行列環とする. また, Hilbert 空間 H 上の有界線型作用素全体からなる空間を $B(H)$ と表す.

2 Grothendieck 不等式

Grothendieck の定理の本質は, テンソル積上のノルムに関するものであると考える. しかし, いくつか同値の主張が存在するので, 以降の議論のため, この中で最も初等的なものを挙げよう. 詳しくは [6], [10] を参照されたい.

定理 2.1. $n \times n$ 行列 $[a_{i,j}]_{i,j} \in M_n$ として, 任意の H :Hilrbert 空間と $x_i, y_j \in H$ について, 次の不等式が成り立つ.

$$\sup_{\|x_i\|,\|y_j\|\leq 1} |\sum a_{i,j}\langle x_i, y_j\rangle| \leq K \sup_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} |\sum a_{i,j}\alpha_i\beta_j| \tag{1}$$

ただし, K はユニバーサル定数. この不等式を任意の n, H について満たす定数 K のうち, 極小のものを K_G と表す.

このとき, 式 (1) を Grothendieck の不等式といい, K_G を Grothendieck 定数と呼ぶ. ちなみに, 複素線型上あるいは実線型空間上の主張かによって K_G の値は異なるが, その正確な値は未だ知られていない. 実線型空間上の場合, その値はおよそ $1.66 \leq K_G \leq 1.783$ であることがわかっている.

上の主張は, 双線型形式 $T : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \to \mathbb{R}$ に対する不等式とみなすこともできる. 式 (1) の右辺は, 明らかに T の作用素ノルム $\|T\| \coloneqq \sup_{\|x\|_\infty,\|y\|_\infty\leq 1} |T(x,y)|$ である. 一方で, 左辺も完全有界ノルム $\|T\|_{\mathrm{cb}}$ とよばれるノルムが対応する. しかし, 非自明であるので, 定義だけ述べることにする.

$$\begin{aligned} T_n : M_n(\ell_\infty^N) \times M_n(\ell_\infty^N) &\to M_{n^2}(\mathbb{R}) \\ (a\otimes x, b\otimes y) &\mapsto T(x,y)a\otimes b \end{aligned} \tag{2}$$

$(x, y \in \ell_\infty, a, b \in M_n(\mathbb{C}))$ と定めたとき, 同様に作用素ノルム $\|T_n\|$ を考えられるが,

$$\|T\|_{\mathrm{cb}} \coloneqq \sup_{n\geq 1}\|T_n\|$$

を T の完全有界ノルム (completely bounded norm) と定める. ただし, 標準的な埋め込み $\ell_\infty^N \subset B(\ell_2^N) = M_N$ によって, $M_n(\ell_\infty^N)$ 上のノルムは, $M_n \otimes M_N = M_{n+N}$ で与えられている.

3 関数解析から QIT

今日では, 量子力学はミクロな世界を記述する言語として, 広く認められている. しかし, 20 世紀前半, Einstein をはじめとする一部の物理学者は量子力学を痛烈に批判していた. 彼らは, (量子もつれに関する) 量子実験に特徴的なランダム性を, 量子論の統計的な解釈ではなく, 決定論 (古典) 的に解釈することを試みた. そのために, 観測者には測定できない「隠れた」変数を導入した. これと相対論から要請される局所性-いかなる情報も光速より速く伝達しない-を合わせて, 局所隠れ変数モデルを提唱した.

次の実験を考えたい. いま, Alice と Bob が充分距離が離れた位置にいて, 測定結果として ± 1 を得るような観測 $\{A_i\}_{i=1}^N$, $\{B_j\}_{j=1}^N$ を行う. このとき, A_iB_j の期待値を考えたい. 局所隠れ変数モデル

を仮定すると, その期待値は

$$\langle A_i B_j \rangle = \int A_i(s) B_j(s) p(s) d\mu(s) \tag{3}$$

と表せる．ただし, s はある確率分布 $pd\mu$ に従う隠れ変数とし, これにより測定値が s の関数 $A_i(s), B_j(s) \in \{\pm 1\}$ で与えられると考えた．一方, 量子力学では, 系の状態は Hilbert 空間 H に作用する密度行列（演算子）ρ で表され, 測定 A_i, B_j はオブザーバブル (自己共役作用素) になり, その固有値が測定結果に対応するのであった． すると, 量子力学を仮定した場合, 期待値は

$$\langle A_i B_j \rangle = \mathrm{tr}(\rho A_i \otimes B_j) \tag{4}$$

となる．ただし $\mathrm{tr}(\cdot)$ はトレース．

（中心極限定理より）実験を何回も繰り返すことによって, $A_i B_j$ の期待値を良い精度で測定することができることに注意すると, 式 (3) と式 (4), いずれかがより正しく実験結果を説明できるのか, 確かめることはできないであろうか．これを考察したのが J. S. Bell[2] である．結論から言えば, 期待値 $\langle A_i B_j \rangle$ の線型結合を考えればよい．$[T_{i,j}] \in M_m(\mathbb{R})$ を実行列として, その線型結合を以下のように表す．

$$|\sum_{i,j} T_{i,j} \langle A_i B_j \rangle| \tag{5}$$

これのとりうる最大値に, 二つの仮定の差異が現れる．

局所隠れ変数モデルを仮定すると式 (5) は最大値

$$\sup_{a_i, b_j = \pm 1} |\sum T_{i,j} a_i b_j|$$

をとりうる．従って, もし量子力学モデルがこの局所隠れ変数モデルで記述可能ならば, 式 (4) を仮定した線型結合は常に以下の不等式（Bell の不等式)

$$|\sum T_{i,j} \mathrm{tr}(\rho A_i \otimes B_j)| \le \sup_{a_i, b_j = \pm 1} |\sum T_{i,j} a_i b_j| \tag{6}$$

を満たすべきである．しかし, この不等式は一般に成り立たないことが知られている．実際,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

に対応する線型結合 $|\langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_2 B_2 \rangle|$(Bell-CHSH 不等式) を考えると, 式 (6) の左辺は最大値 $2\sqrt{2}$ を取りうるのに対し, 右辺は 2 となる．あとは実際に実験をし, 期待値 $\langle A_i B_j \rangle$ の測定値が $2\sqrt{2}$ に近い値であるならば, 量子力学の妥当性を検証（あるいは局所隠れ変数モデルの棄却）ができる．詳しい物理的な背景知識は, 実際にこの Bell の実験を成功させた物理学者のうちの一人, 2022 年度のノーベル物理学賞受賞者である A. Aspect[1] を参照されたい．

ところで, Bell の不等式が成り立たないのであるならば, 式 (6) の左辺の上限は一般に求められるのだろうか．それは前節の Grothendieck の定理, 式 (1) によって既に与えられていて,

$$\sup_{\rho, -I \le A_i, B_j \le I} |\sum_{i,j=1}^{N} T_{i,j} \mathrm{tr}(\rho A_i \otimes B_j)| \le K_G \sup_{a_i, b_j = \pm 1} |\sum_{i,j=1}^{N} T_{i,j} a_i b_j| \tag{7}$$

が成り立つ. K_G はグローバル定数であったが, 特に $N=2$ と固定したときは, K_G は $\sqrt{2}$(Tsirelson's bound) で置き換えられることがわかっている. ここに Bell の不等式と Grothendieck の不等式の関係性を見ることができた. この事実は 1980 年頃に, B. S. Tsirelson[4][12][13] によって指摘されていて, 以来, 関数解析 (作用素環）と量子情報理論が双方向に発展していく.

それでは, 観測者が Alice と Bob の二人だけではなく, Charlie という三人目がいた場合にも同様な不等式が成り立つのであろうか. この問題を考えるために, 物理設定を忘れて, ひとまず式 (7) を抽象化しよう. 行列 $[T_{i,j}] \in M_N(\mathbb{R})$ を, 双線型形式 $T : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \to \mathbb{R}$ とみなす ($T_{i,j} \leftrightarrow T(e_i, e_j)$) ことにする. このとき, 式 (7) は, 前節から

$$\|T\|_{\mathrm{cb}} \leq K_G \|T\| \tag{8}$$

と表すことができたことを思い出す. このとき考えるべき命題は, 三重線型形式 $T : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \to \mathbb{R}$ についても同様な不等式が成り立つのであろうか, ということである.

4　最近の進展

2008 年, M. Junge et. al[9] によって, 三重線型形式において式 (8) の反例が構成され, 予想は否定的に説かれた. 証明は von Neumann 環や作用素空間のテクニックに依存したものであり, その構成方法は非常に抽象的なものであった. (一方で, 通信複雑性理論 (communication complexity), 量子暗号 (quantum cryptography) など, QIT の分野への応用が議論されている点で興味深い論文である.)

2013 年, random matrix theory を用いた, 幾分 explicit な構成の反例が J. Briët と T. Vidick によって与えられた [3]. (なお, 彼らは非局所ゲームにおける文脈で議論を行っていた.) ここでは, G. Pisier によって幾分改善された主張 [11] を挙げる.

定理 4.1. ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の N に対して, 次を満たす $\ell_\infty^{N^2}$ 上で定義された三重線型形式 T が存在する.

$$\|T\|_{cb} \geq C N^{1/2} (\log N)^{-3/2} \|T\|$$

M. Junge 等の反例よりも tight な不等式を得られたという意味で前進があった. しかし, この反例は確率的に構成されたものであるため, なお explicit で, より tight な評価の反例の構成が待たれる.

5　QIT から関数解析

前節の random matrix theory のテクニックを用いて, 対称三重線型形式 (symmetric trilinear form) についてもアナロジーを見出すことができる. なお, 本節は [5] に基づいた [8] の結果である. まず, ベクトル空間 V 上の m 次線型形式 T が対称 (symmetric) であるとは, S_m は m 次対称群として

$$T(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = T(x_1, \ldots, x_m) \quad \forall x_i \in V, \forall \sigma \in S_m$$

を満たすことであった. 一方で, 一般の m 次形式 T に対して, $T_s = \sum_{\sigma \in S_m} T \circ \sigma$ と定めれば対称な写像を得ることができる (一般論として, 任意の対称な写像は, （正規化を除いて）このような形で表

すことができる). この議論を定理 4.1 の証明のテクニックを適用することで, 次の定理を得ることだできる.

定理 5.1. 充分大きな N について, ある対称三重線型形式 $\varphi \in \ell_\infty^{N^2} \otimes \ell_\infty^{N^2} \otimes \ell_\infty^{N^2}$ が存在して, 次の不等式を満たす

$$\|\varphi\|_{\mathrm{cb}} \geq C' N^{1/2} (\log N)^{-3/2} \|\varphi\|$$

ここで, C' はある正の定数.

ここで, *homogeneous polynomial* の定義を思い出したい. ノルム空間を V, W として, 写像 $p : V \to W$ が, m-homogeneous polynomial であるとは, ある m 次線型写像 $\varphi : V \times \cdots \times V \to W$ が存在し, $p(x) = \varphi(x, \ldots x)$, $x \in V$ を満たすことであった. この m-homogeneous polynomial 全体からなる線型空間を $P^m(V; W)$ と表す. また, p に自然なノルムを

$$\|p\| \coloneqq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|p(x)\|_W$$

定めることで, 連続な m-homogeneous polynomial 全体からなるノルム空間 $\mathscr{P}^m(V; W)$ を得る.

ところで, 上で定義される p :m-homogeneous polynomial には, ある $\hat{p}$ で $p(x) = \hat{p}(x, \ldots, x)$, $x \in V$ を満たす m 次対称線型写像と, 一対一対応があることが知られている. 従って, homogeneous polynomial に関する議論を, 対称線型写像を経由して考察することにする.

いま, $P^m(\ell_\infty)$ を考えたい. 注意として, 自然な埋め込み $M_n(\ell_\infty) \subset M_n(B(\ell_2))$ によって, $M_n(\ell_\infty)$ 上にノルムが定まっている. $p \in P^m(\ell_\infty)$ について, これを $M_n(\ell_\infty)$ の上に拡張しよう. 例えば, 適当な性質を満たす行列積 $\lambda_n : M_n \times \cdots \times M_n \to M_{\tau(n)}$ を考える. これと, p に対応する m 次線型写像 $\hat{p}$ をテンソルし,

$$\begin{aligned} \hat{p}_{\lambda_n} = \hat{p} \otimes \lambda_n : M_n(\ell_\infty) \times \cdots \times M_n(\ell_\infty) &\to M_{\tau(n)} \\ (a_1 \otimes x_1, \ldots, a_m \otimes x_m) &\mapsto \lambda_n(a_1, \ldots, a_m) \otimes \hat{p}(x_1, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

($a_i \in M_n, x_i \in \ell_\infty$) を得る. そして, $p_{\lambda_n}(x) = \hat{p}_{\lambda_n}(x, \ldots, x)$, $x \in M_n(\ell_\infty)$ とすれば $p_{\lambda_n} \in P^m(M_n(\ell_\infty))$ となり $M_n(\ell_\infty)$ 上に拡張ができた. また,

$$\|p\|_\lambda \coloneqq \sup_{n \geq 1} \|p_{\lambda_n}\|$$

と定めると, ノルム空間

$$\mathscr{P}_\lambda^m(\ell_\infty) \coloneqq \{p \in P^m(\ell_\infty) : \|p\|_\lambda < \infty\}$$

を得る.

特に λ_n として,

Schur Product: $\bullet_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha_1 \bullet \cdots \bullet \alpha_m$ with $\tau(n) = n$
Kronecker Product: $\otimes_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m$ with $\tau(n) = n^m$

($\bullet$ は, Schur 積 $(\alpha_1 \bullet \cdots \bullet \alpha_m)_{i,j} = (\alpha_1)_{i,j} \cdots (\alpha_m)_{i,j}$) を考える. $\hat{p}_{\otimes_n}$ は (2) で与えた $\hat{p}_n$ であることに注意. すると, これらの行列積に対して, クロネッカー多項式 $\mathscr{P}_\otimes^m(\ell_\infty)$ とシューア多項式 $\mathscr{P}_\bullet^m(\ell_\infty)$ が得られる.

ところで, このクロネッカー多項式とシューア多項式が異なるものかどうか知られていなかった. 特に, $m = 3$ のとき (Banach 空間として)$\mathscr{P}^3_{\otimes}(\ell_\infty) \neq \mathscr{P}^3_{\bullet}(\ell_\infty)$ と予想されていたものの, 完全な証明が与えられていなかった. しかし, 定理 5.1 の手法を用いれば,

系 5.2 ([8])**.**

$$\mathscr{P}^3_{\otimes}(\ell_\infty) \neq \mathscr{P}^3(\ell_\infty)$$

が分かり, これと $\mathscr{P}^3(\ell_\infty) = \mathscr{P}^3_{\bullet}(\ell_\infty)$([5], Theorem 9.5) を併せて, この予想の肯定的な証明を与えることができた.

References

[1] A. Aspect. "Bell's theorem: the naive view of an experimentalist". In: *Quantum [un]speakables (Vienna, 2000)*. Springer, Berlin, 2002, pp. 119–153.

[2] J. S. Bell. "On the Einstein Podolsky Rosen paradox". In: *Phys. Phys. Fiz.* 1.3 (1964), pp. 195–200.

[3] J. Briët and T. Vidick. "Explicit lower and upper bounds on the entangled value of multiplayer XOR games". In: *Comm. Math. Phys.* 321.1 (2013), pp. 181–207.

[4] B. S. Cirel'son. "Quantum generalizations of Bell's inequality". In: *Lett. Math. Phys.* 4.2 (1980), pp. 93–100.

[5] A. Defant and D. Wiesner. "Polynomials in operator space theory". In: *J. Funct. Anal.* 266.9 (2014), pp. 5493–5525.

[6] J. Diestel, J. H. Fourie, and J. Swart. *The metric theory of tensor products.* Grothendieck's résumé revisited. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, pp. x+278.

[7] A. Grothendieck. "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques". In: *Bol. Soc. Mat. São Paulo* 8 (1953), pp. 1–79.

[8] N. Hara. "Tripartite Bell Iinequality for Homogeneous Polynomials in Operator Space Theory". 2023.

[9] M. Junge et al. "Unbounded violations of bipartite Bell inequalities via operator space theory". In: *Comm. Math. Phys.* 300.3 (2010), pp. 715–739.

[10] G. Pisier. "Grothendieck's theorem, past and present". In: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 49.2 (2012), pp. 237–323.

[11] G. Pisier. "Tripartite Bell inequality, random matrices and trilinear forms". In: *arXiv preprint arXiv:1203.2509* (2012).

[12] B. S. Tsirelson. "Quantum analogues of Bell's inequalities. The case of two spatially divided domains". In: vol. 142. Problems of the theory of probability distributions, IX. 1985, pp. 174–194, 200.

[13] B. S. Tsirelson. "Some results and problems on quantum Bell-type inequalities". In: *Fundamental questions in quantum physics and relativity.* Hadronic Press Collect. Orig. Artic. Hadronic Press, Palm Harbor, FL, 1993, pp. 32–48.