

長距離型の逆冪乗型ポテンシャルをもつ 非線形シュレディンガー方程式の散乱解について

早稲田大学 理工学術院
浜野 大 (Masaru HAMANO)

概要

本講演は理化学研究所 AIP センター、慶應義塾大学の池田正弘氏との共同研究に基づく。Guo 氏, Wang 氏, Yao 氏 [J. Math. Anal. Appl. 506 (2022), no. 2, Paper No. 125653, 30 pp] により空間遠方での減衰が速い短距離型のポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式について解が散乱するための十分条件が与えられた。本講演では、空間遠方での減衰が遅い長距離型のポテンシャルをもつ状況において解が散乱するための十分条件を球対称解に制限することにより与える。

1 導入

本稿では逆冪乗型ポテンシャルをもつ以下の非線形シュレディンガー方程式を考える。

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) - \frac{\gamma}{|x|^\mu} u(t, x) = -|u(t, x)|^p u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (\text{NLS}_\gamma)$$

ここで、虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ 、時間微分 $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ 、空間微分 $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 、 $d \geq 1$ 、 $\gamma > 0$ 、 $0 < \mu < \min\{2, d\}$ 、 $1 < p < 2^* - 1$ 、解 $u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ は未知関数、初期値 $u_0(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ は既知関数である。ここで、

$$2^* - 1 := \begin{cases} \infty, & (d = 1, 2), \\ 1 + \frac{4}{d-2}, & (d \geq 3). \end{cases}$$

$\gamma < 0$ 、 $\mu = 1$ のとき、作用素 $-\Delta + \frac{\gamma}{|x|}$ は 2 つの荷電粒子間のクーロン力の量子力学的描写を与え、正に帯電した原子核の存在により外部に引力的な長距離型ポテンシャルを持つことに対応する [19]。ここで、 $0 < \mu \leq 1$ のとき $\frac{\gamma}{|x|^\mu}$ は長距離型ポテンシャルと呼ばれ、 $1 < \mu < 2$ のとき $\frac{\gamma}{|x|^\mu}$ は短距離型ポテンシャルと呼ばれる。量子物理学分野における水素原子のより多くのモデルに関しては [18, 24] を参照せよ。

$\gamma = 0$ のとき、 (NLS_γ) は渦糸の運動、スピンの歳差運動、光ファイバー中における超短パルスの電波などを記述する。

1.1 準備

非負値 X, Y に対して, ある $C > 0$ が存在して $X \leq CY$ が成り立つとき $X \lesssim Y$ と表現する. $X \lesssim Y \lesssim X$ が成り立つとき $X \sim Y$ と表現する. 関数空間 X に対して, $X_{\text{rad}} := \{f \in X : f \text{ は球対称関数}\}$ とする.

定義 1.1 (ルベグ空間). $p \geq 1$ において, ルベグ空間 $L^p(\mathbb{R}^d)$ を

$$L^p(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

で定義する. ここで, ルベグノルム $\|\cdot\|_{L^p}$ は次である.

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & (1 \leq p < \infty), \\ \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|, & (p = \infty). \end{cases}$$

定義 1.2 (フーリエ変換・フーリエ逆変換). フーリエ変換とフーリエ逆変換を次のように定義する.

$$(\text{フーリエ変換}) \quad \mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx,$$

$$(\text{フーリエ逆変換}) \quad \mathcal{F}^{-1}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \xi} f(x) dx.$$

定義 1.3 (ソボレフ空間). 非斉次ソボレフ空間 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ と斉次ソボレフ空間 $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ を次で定義する.

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{W^{s,p}} < \infty\},$$

$$\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} < \infty\}.$$

ここで, 非斉次ソボレフノルム $\|\cdot\|_{W^{s,p}}$ と斉次ソボレフノルム $\|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}}$ はそれぞれ

$$\|f\|_{W^{s,p}} := \|(1 - \Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}(1 + 4\pi^2|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f\|_{L^p},$$

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} := \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}(2\pi|\cdot|)^s \mathcal{F}f\|_{L^p}.$$

$p = 2$ のとき $H^s(\mathbb{R}^d) := W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$, $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) := \dot{W}^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ と表すこととする.

注意 1.4. $1 < p < \infty$, $s = 1$ のとき, 次が成り立つ.

$$\|f\|_{W^{1,p}} \sim \|f\|_{L^p} + \|\nabla f\|_{L^p}.$$

2 (NLS $_{\gamma}$) の時間局所適切

時間に依存した非線形偏微分方程式の研究は大きく分けると 2 つに分けられる. 1 つ目は時間局所適切の有無である. (NLS $_{\gamma}$) が時間局所適切であるとは, 次の (1)~(4) が成り立つことである.

(1) (解の一意性) (NLS $_{\gamma}$) の解は一意である.

(2) (解の存在性) 任意の $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ に対して, 時間区間 $(T_{\min}, T_{\max}) = (T_{\min}(u_0), T_{\max}(u_0))$ ($\ni 0$) 上定義される (NLS_γ) の解 $u \in C((T_{\min}, T_{\max}); H^1(\mathbb{R}^d))$ が存在して, (T_{\min}, T_{\max}) を超えて (NLS_γ) の解は存在しない.

(3) (Blow-up alternative) もし $T_{\max} < \infty$ ($T_{\min} > -\infty$) とすると,

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty, \quad \left(\lim_{t \searrow T_{\min}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty \right).$$

(4) (初期値への連続依存性) もし $u_{0,n} \rightarrow u_0$ in H^1 とすると, 任意の閉区間 $I \subset (T_{\min}, T_{\max})$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq n_0$ に対して $u_{0,n}$ を初期値にもつ (NLS_γ) の解 u_n は I 上で定義されて $u_n \rightarrow u$ in $C(I; H^1(\mathbb{R}^d))$ ($n \rightarrow \infty$) をみたす.

注意 2.1. (Blow-up alternative) より, 次が成り立つ.

$$\sup_{t \in (T_{\min}, T_{\max})} \|u(t)\|_{H^1} < \infty \implies (T_{\min}, T_{\max}) = \mathbb{R}.$$

(NLS_γ) は時間局所適切であることが知られている.

定理 2.2 ((NLS_γ) の時間局所適切, [3]). $d \geq 1$, $1 < p < 2^* - 1$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < \min\{d, 2\}$ とする. このとき, (NLS_γ) は時間局所適切である.

(NLS_γ) は次の積分方程式に書き換えることができる.

$$u(t, x) = e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} u_0(x) + i \int_0^t e^{i(t-s)(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} (|u|^{p-1} u)(s, x) ds.$$

(NLS_γ) の時間局所適切は例えば, この積分方程式に次のストリッカーツ評価を適用した縮小写像の議論により得られる.

定理 2.3 (ストリッカーツ評価, [21]). $d = 3$, $0 < \mu < 2$, $\gamma > 0$, $0 \leq s \leq 1$ とする. $t_0 \in \mathbb{R}$ とし, 時間区間 I は t_0 を含むとする.

$$I_s := \begin{cases} \left\{ (q, r) : 2 \leq q \leq \infty, \frac{6}{3-2s} \leq r \leq \frac{6}{1-2s} \right\} & \left(0 \leq s < \frac{1}{2} \right), \\ \left\{ (q, r) : \frac{4}{3-2s} < q \leq \infty, \frac{6}{3-2s} \leq r < \infty \right\} & \left(\frac{1}{2} \leq s \leq 1 \right) \end{cases}$$

に対し,

$$\Lambda_s := \left\{ (q, r) \in I_s : \frac{2}{q} + \frac{3}{r} = \frac{3}{2} - s \right\}$$

を定義する. もし $(q_1, r_1) \in \Lambda_s$, $(q_2, r_2) \in \Lambda_0$ とすると

- $\|e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} f\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^s}$,
- $\left\| \int_{t_0}^t e^{i(t-s)(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} F(\cdot, s) ds \right\|_{L_t^{q_1}(I; L_x^{r_1})} \lesssim \|F\|_{L_t^{q_2}(I; \dot{W}_x^{s, r_2})}$

が成り立つ.

定理 2.2 で得られた (NLS_γ) の解は質量とエネルギーを保存する.

定理 2.4 (保存則). 定理 2.2 で得られた (NLS_γ) の解 u は次の質量とエネルギーを時間に関して保存する.

$$\begin{aligned} \text{(質量)} \quad M[f] &:= \|f\|_{L^2}^2, \\ \text{(エネルギー)} \quad E_\gamma[f] &:= \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\gamma}{|x|^\mu} |f(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1} \|f\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \end{aligned}$$

つまり,

$$M[u(t)] = M[u_0], \quad E_\gamma[u(t)] = E_\gamma[u_0], \quad t \in (T_{\min}, T_{\max})$$

が成り立つ.

$\gamma = 0$ をもつ (NLS_γ) , つまり

$$i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) = -|u(t, x)|^{p-1} u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \quad (\text{NLS}_0)$$

は次のスケール変換に関して不変である.

$$u(t, x) \mapsto u_{[\lambda]}(t, x) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad (\lambda > 0).$$

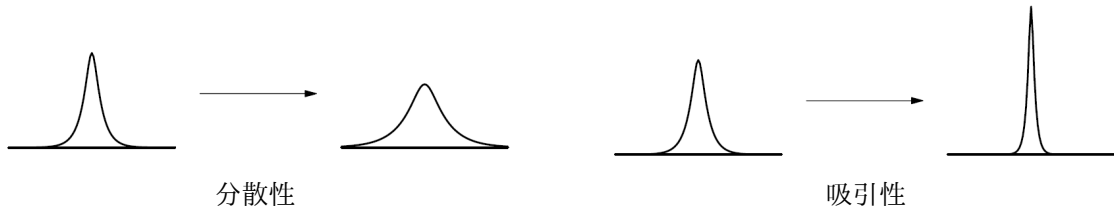
つまり, u が (NLS_0) の解であるならば, $\lambda > 0$ に対して $u_{[\lambda]}$ もまた (NLS_0) の解である. この変換により初期値 u_0 は

$$u_0(x) \mapsto (u_0)_{\{\lambda\}}(x) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x)$$

と移り変わる. $s_c := \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$ とすると, \dot{H}^{s_c} -ノルムはこの変換に関して不変である. つまり, $\|(u_0)_{\{\lambda\}}\|_{\dot{H}^{s_c}} = \|u_0\|_{\dot{H}^{s_c}}$ が成り立つ. そのため $p = 1 + \frac{4}{d}$ ($s_c = 0$) のとき (NLS_γ) は L^2 -臨界もしくは質量臨界, $p = 1 + \frac{4}{d-2}$ ($s_c = 1$) のとき (NLS_γ) は \dot{H}^1 -臨界もしくはエネルギー臨界と呼ばれる.

3 (NLS_γ) の解の時間挙動

時間局所適切が得られたとき, 解の時間発展による挙動を調べるのが時間に依存した非線形偏微分方程式の研究の 2 つ目である. (NLS_γ) の解の時間発展を考えた際, 線形部分 $(i\partial_t u + \Delta u - \frac{\gamma}{|x|^\mu} u)$ は分散的にはたつき, 非線形部分 $(-|u|^{p-1} u)$ は吸引的にはたらく. 分散性は波を散らばらせ, 吸引性は波を集中させる.



線形部分と非線形部分の働きが逆であり, これらの兼ね合いにより様々な種類の時間挙動が存在する. 分散効果の方が吸引効果より強いとき, 解 u は空間遠方に向かっていく. そのため, 解 u 自身の相互作用が弱まり線形状態に近づく. このような挙動を散乱といい, このような解を散乱解と呼ぶ. 吸引

効果の方が分散効果より強いとき、解 u はあるところに集中していく。このような挙動を爆発といい、このような解を爆発解と呼ぶ。爆発は有限時間爆発と無限時間爆発の2つに分けられる。分散効果と吸引効果が釣り合うとき、時間に関して位相の周期的な変動しかない解が生じる。このような解を定在波解と呼ぶ。これらの挙動を数学的に記述すると以下ようになる。

定義 3.1 (散乱解, 有限時間爆発解, 無限時間爆発解, 定在波解). $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, u は (NLS_γ) の解とする。

- (散乱解)

(NLS_γ) の解 u が正 (負) の時間で散乱するとは, $T_{\max} = +\infty$ ($T_{\min} = -\infty$) であり, さらに, ある $\psi_+ \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ($\psi_- \in H^1(\mathbb{R}^d)$) が存在して

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} \psi_+\|_{H^1} = 0, \quad \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t) - e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} \psi_-\|_{H^1} = 0 \right)$$

が成立することである。時間両方向で散乱するとき, 単に散乱と呼ぶ。ここで, $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}$ は線形シュレディンガー発展作用素であり, $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} \psi$ は ψ を初期値にもつ線形方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) - \frac{\gamma}{|x|^\mu} u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (\text{LS}_\gamma)$$

の解である。

- (有限時間爆発解)

(NLS_γ) の解 u が正 (負) の時間で有限時間爆発するとは, $T_{\max} < +\infty$ ($T_{\min} > -\infty$) をみたすことである。時間両方向で有限時間爆発するとき, 単に有限時間爆発と呼ぶ。

- (無限時間爆発解)

(NLS_γ) の解 u が正 (負) の時間で無限時間爆発するとは, $T_{\max} = +\infty$ ($T_{\min} = -\infty$) であり, さらに,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{H^1} = \infty, \quad \left(\limsup_{t \rightarrow -\infty} \|u(t)\|_{H^1} = \infty \right)$$

が成り立つことである。時間両方向で無限時間爆発するとき, 単に無限時間爆発と呼ぶ。

- (定在波解)

ある $\omega \in \mathbb{R}$ に対して

$$u(t, x) = e^{i\omega t} Q_{\omega, \gamma}(x), \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

の形をしているとき, 解 u は定在波解であるという。ここで, $Q_{\omega, \gamma} = Q_{\omega, \gamma}(x)$ は楕円型方程式

$$-\omega Q_{\omega, \gamma} + \Delta Q_{\omega, \gamma} - \frac{\gamma}{|x|^\mu} Q_{\omega, \gamma} = -|Q_{\omega, \gamma}|^{p-1} Q_{\omega, \gamma} \quad (\text{SP}_{\omega, \gamma})$$

の解である。

注意 3.2. $(\text{SP}_{\omega, \gamma})$ の解は作用汎関数

$$S_{\omega, \gamma}(f) := \frac{\omega}{2} M[f] + E_\gamma[f]$$

により次のように特徴付けられる.

$$Q_{\omega,\gamma} \text{ が } (\text{SP}_{\omega,\gamma}) \text{ の解} \iff (S_{\omega,\gamma})'(Q_{\omega,\gamma}) = 0.$$

4 先行結果

$\gamma = 0$ (ポテンシャルの項がない) とき :

- (定在波解の存在) $d \geq 1, 1 < p < 2^* - 1, \omega > 0$ のとき $(\text{SP}_{\omega,0})$ は解をもつ. 特に,

$$\mathcal{G}_{\omega,0} := \{\phi \in \mathcal{A}_{\omega,0} : S_{\omega,0}(\phi) \leq S_{\omega,0}(\psi) \text{ for any } \psi \in \mathcal{A}_{\omega,0}\}$$

に属する基底状態と呼ばれる解が存在する [2, 25]. ここで,

$$\mathcal{A}_{\omega,0} := \{\phi \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} : (S_{\omega,0})'(\phi) = 0\}.$$

- (散乱) $d \geq 1, Q_{\omega,0}$ は $(\text{SP}_{\omega,0})$ の基底状態とする.
 - $p = 1 + \frac{4}{d}, u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), M[u_0] < M[Q_{1,0}]$ ならば, (NLS_0) の解 u は散乱する [5].
 - $1 + \frac{4}{d} < p < 2^* - 1, u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d),$

$$S_{\omega,\gamma}(u_0) < S_{\omega,0}(Q_{\omega,0}) \text{ for some } \omega > 0, \quad (1)$$

$$K_\gamma(u_0) := 2\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \mu \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\gamma}{|x|^\mu} |u_0(x)|^2 dx - \frac{d(p-1)}{p+1} \|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1} \geq 0 \quad (2)$$

ならば, (NLS_0) の解 u は散乱する [1, 7, 8, 14] (関連した文献として [16] も挙げておく).

- (爆発) $d \geq 1, 1 + \frac{4}{d} < p < 2^* - 1, u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d), (1),$

$$K_\gamma(u_0) < 0 \quad (3)$$

ならば, (NLS_0) の解 u は有限時間爆発もしくは無限時間爆発する [1, 6, 15]. さらに, $u_0 \in |x|^{-1}L^2(\mathbb{R}^d)$ もしくは “ $u_0 \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^d), d \geq 2, d = 2$ のとき $p \leq 5$ ” であるならば, (NLS_0) の解 u は有限時間爆発する [1, 9, 22].

$\gamma > 0$ (ポテンシャルの項がある) とき :

- (定在波解の存在) $d \geq 1, 1 < p < 2^* - 1, 0 < \mu < \min\{d, 2\}, \omega > 0$ のとき $(\text{SP}_{\omega,\gamma})$ は解をもつ. 特に,

$$\mathcal{G}_{\omega,\gamma,\text{rad}} := \{\phi \in \mathcal{A}_{\omega,\gamma,\text{rad}} : S_{\omega,\gamma}(\phi) \leq S_{\omega,\gamma}(\psi) \text{ for any } \psi \in \mathcal{A}_{\omega,\gamma,\text{rad}}\}$$

に属する “球対称” 基底状態と呼ばれる解が存在する [11, 12]. ここで,

$$\mathcal{A}_{\omega,\gamma,\text{rad}} := \{\phi \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} : (S_{\omega,\gamma})'(\phi) = 0\}.$$

- (散乱) $d = 3, (1 + \frac{4}{3}) = \frac{7}{3} < p < 5 (= 1 + \frac{4}{3-2}), 1 < \mu < 2, u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3), (1), (2)$ ならば, (NLS_γ) の解 u は散乱する [10].
- (爆発) $d \geq 1, 1 + \frac{4}{d} < p < 2^* - 1, 0 < \mu < \min\{d, 2\}, u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d), (1), (3)$ ならば (NLS_γ) の解 u は有限時間爆発もしくは無限時間爆発する [10, 12]. さらに $u_0 \in |x|^{-1}L^2(\mathbb{R}^d)$ もしくは “ $u_0 \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^d), d \geq 2, d = 2$ のとき $p \leq 5$ ” であるならば (NLS_γ) の解 u は有限時間爆発する [4, 12, 19].

5 主定理

$\gamma > 0$ のとき, 散乱の結果では $1 < \mu < 2$ を仮定している. $1 < \mu < 2$ と $0 < \mu \leq 1$ では線形解 $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})\psi}$ ((LS $_\gamma$) の解) に関して次の違いがある.

- $1 < \mu < 2$:

$$(u(t) \xrightarrow{\sim} e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})\psi} \xrightarrow{\sim} e^{it\Delta}\psi_+ \text{ in } H^1 (t \rightarrow \infty). \\ \text{Guo-Wang-Yao [10] \quad Mizutani [20]}$$

- $0 < \mu \leq 1$:

$$(u(t) \xrightarrow{\sim} e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})\psi} \not\xrightarrow{\sim} e^{it\Delta}\psi_+ \text{ in } L^2 (t \rightarrow \infty). \\ ? \quad \text{Reed-Simon [23]}$$

つまり, $1 < \mu < 2$ のとき, 線形解 $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})\psi}$ は $t \rightarrow \infty$ として, ポテンシャルをもたない線形解 $e^{it\Delta}\psi_+$ に漸近する [20]. 一方で, $0 < \mu \leq 1$ のとき, 線形解 $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})\psi}$ は $t \rightarrow \infty$ としても, ポテンシャルをもたない線形解 $e^{it\Delta}\psi_+$ に漸近しない [23]. Guo-Wang-Yao [10] は $1 < \mu < 2$ において非線形方程式の解 u ((NLS $_\gamma$) の解) が $t \rightarrow \infty$ として, 線形解 $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})\psi}$ に漸近するための初期値の十分条件を与えた. 本研究では $0 < \mu \leq 1$ のときについて調べた.

定理 5.1 (H.-Ikeda, [13]). $d = p = 3$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < 2$ とする. $Q_{\omega,\gamma}$ は (SP $_{\omega,\gamma}$) の “球対称” 基底状態解であるとする. もし $u_0 \in H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R})$ がある $\omega > 0$ に対して $S_{\omega,\gamma}(u_0) < S_{\omega,\gamma}(Q_{\omega,\gamma})$ と (2) をみたすとき (NLS $_\gamma$) の解 u は散乱する.

注意 5.2. 定理 5.1 は $1 < \mu < 2$ においても, Guo-Wang-Yao [10] で扱っていない初期値を扱えている. つまり, ある $u_0 \in H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^3)$ が存在して

$$S_{\omega,0}(Q_{\omega,0}) \leq S_{\omega,\gamma}(u_0) < S_{\omega,\gamma}(Q_{\omega,\gamma}), \quad K_\gamma(u_0) \geq 0$$

をみたす.

注意 5.3. $\mu = 1$ で非線形項が分散的にはたらく ($|u|^{p-1}u$ である) とき, つまり

$$i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) - \frac{\gamma}{|x|} u(t, x) = |u(t, x)|^{p-1} u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

に対しては, 次の結果が知られている.

$\gamma > 0$, $\frac{7}{3} < p < 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ とする. このとき, 解 u は散乱する.

6 証明の概略

本稿では, Guo-Wang-Yao [10] と定理 5.1 の証明で異なる部分を紹介する. Guo-Wang-Yao [10] では, 初期値の列 $\{u_{0,n}\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ に対して次のプロファイル分解を適用することで議論を行う.

定理 6.1 (プロフィール分解). $d = p = 3$, $\gamma > 0$, $1 < \mu < 2$ とする. また $\{f_n\}$ は $H^1(\mathbb{R}^3)$ の有界列であるとする. 部分列を取ると, ある $J^* \in \{0, 1, \dots, \infty\}$, プロファイル $\{f^j\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$, パラメータ $\{(t_n^j, x_n^j)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, 剰余 $\{R_n^J\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ が存在して, 任意の $0 \leq J \leq J^*$ ($J \in \mathbb{N}$), $n \in \mathbb{N}$ に対して次の分解が成り立つ.

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^J \left[e^{-it_n^j \left(\Delta - \frac{\gamma}{|x+x_n^j|^\mu} \right)} f^j \right] (x - x_n^j) + R_n^J(x).$$

$\{R_n^J\}$ は次の意味で剰余である.

$$\lim_{J \rightarrow J^*} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} R_n^J\|_{L_t^5 L_x^5} = 0. \quad (4)$$

注意 6.2. $\{(t_n^j, x_n^j)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, $\{R_n^J\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ は他にもいくつかの性質をみたすが, ここでは省略する.

定理 6.1 の作用素 $e^{-it_n^j \left(\Delta - \frac{\gamma}{|x+x_n^j|^\mu} \right)}$ の性質を得るために仮定 $1 < \mu < 2$ は使用される. 球対称関数に制限することで, 定理 6.1 の x_n^j は恒等的に 0 にできることが知られている. 例えば, [14, 17] などで見つけられる. [14] では, 作用素 $e^{it\Delta}$ がフーリエ変換を用いて $\mathcal{F}^{-1} e^{-4\pi^2 it|\xi|^2} \mathcal{F}$ と表されていることを利用している. そのため, 今回の $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})}$ に対して, その証明は直接適用することができない. また [17] では, 一度 x_n^j を含めた形 (定理 6.1 の形) で証明し, 球対称であるとき $\{x_n^j\}$ が有界であることを導き, それを利用して証明する. それ故, その証明を直接適用すると $1 < \mu < 2$ の制限を取り除くことはできない. 本研究では, 埋め込み $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^3(\mathbb{R}^3)$ がコンパクトであることのみを利用して, $\{f_n\} \subset H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^3)$, $0 < \mu < 2$, $x_n^j \equiv 0$ をもつ定理 6.1 を証明した. 本稿では $\{f^j\} \subset H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^3)$, $\{t_n^j\} \subset \mathbb{R}$, $\{R_n^J\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ の取り方のみ紹介する.

証明. 補完不等式とストリッカーツ評価 (定理 2.3) より

$$\|e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f\|_{L_t^5 L_x^5} \leq \|e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f\|_{L_t^\infty L_x^3}^{1-\theta} \|e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f\|_{L_t^q L_x^r}^\theta \lesssim \|e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f\|_{L_t^\infty L_x^3}^{1-\theta} \|f\|_{\dot{H}_x^{\frac{1}{2}}}^\theta.$$

ここで, $(q, r) \in \Lambda_{\frac{1}{2}}$, $\theta \in (0, 1)$ は $\frac{1}{5} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{q} = \frac{1-\theta}{3} + \frac{\theta}{r}$ をみたす定数である. それ故, 次の成り立つば (4) は成立する.

$$\lim_{J \rightarrow J^*} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} R_n^J\|_{L_t^\infty L_x^3} = 0.$$

$\{f^1\}$, $\{t_n^1\}$, $\{R_n^1\}$ を構成する.

$A_0 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \|e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f_n\|_{L_t^\infty L_x^3}$. もし $A_0 = 0$ ならば, 各 $j \geq 1$ に対して $f^j \equiv 0$ と取ることで主張が得られる. そこで, $A_0 > 0$ を仮定する. この仮定により部分列 $\{f_n\}$ (もとの列と同じ記号を用いる) を次をみたすように取ることができる.

$$\|e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f_n\|_{L_t^\infty L_x^3} \geq \frac{3}{4} A_0 \quad \text{for each } n \in \mathbb{N}.$$

そして, 列 $\{t_n^1\} \subset \mathbb{R}$ を次をみたすように取る.

$$\|e^{it_n^1(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f_n\|_{L_x^3} \geq \frac{1}{2} A_0 \quad \text{for each } n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

今, $\|e^{it_n^1(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f_n\|_{H_x^1}$ ($\sim \|f_n\|_{H^1}$ (作用素のユニタリ性より)) は有界列であるから, ある $f^1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ が存在して $e^{it_n^1(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f_n \rightarrow f^1$ in $H^1(\mathbb{R}^3)$ as $n \rightarrow \infty$. $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^3(\mathbb{R}^3)$ のコンパクト性から $e^{it_n^1(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f_n \rightarrow f^1$ in $L^3(\mathbb{R}^3)$. (5) から $f^1 \neq 0$ である. 実際,

$$\frac{1}{2}A_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{it_n^1(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f_n\|_{L_x^3} = \|f^1\|_{L^3}$$

が成り立つ. $R_n^1 := f_n - e^{-it_n^1(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} f^1$ とおく.

$\{f^2\}, \{t_n^2\}, \{R_n^2\}$ の構成について :

$A_1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \|e^{it_n^2(\Delta - \frac{\gamma}{|\cdot|^\mu})} R_n^1\|_{L_t^\infty L_x^3}$ とおき, 上と同様の議論を行う.

以後, 帰納的に $\{f^j\}, \{t_n^j\}, \{R_n^j\}$ を構成していく. □

参考文献

- [1] T. Akahori and H. Nawa, Blowup and scattering problems for the nonlinear Schrödinger equations. *Kyoto J. Math.* **53** (2013), no. 3, 629–672. MR3102564
- [2] H. Berestycki and P.-L. Lions, *Nonlinear scalar field equations*, I. Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983), no. 4, 313–345. MR0695535
- [3] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+323 pp. MR2002047
- [4] V. D. Dinh, *On nonlinear Schrödinger equations with repulsive inverse-power potentials*, *Acta Appl. Math.* **171** (2021), Paper No. 14, 52 pp. MR4198524
- [5] B. Dodson, *Global well-posedness and scattering for the mass critical nonlinear Schrödinger equation with mass below the mass of the ground state*, *Adv. Math.* **285** (2015), 1589–1618. MR3406535
- [6] D. Du, Y. Wu, and K. Zhang, On blow-up criterion for the nonlinear Schrödinger equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **36** (2016), no. 7, 3639–3650. MR3485846
- [7] T. Duyckaerts, J. Holmer, and S. Roudenko, *Scattering for the non-radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation*, *Math. Res. Lett.* **15** (2008), no. 6, 1233–1250. MR2470397
- [8] D. Fang, J. Xie, and T. Cazenave, Scattering for the focusing energy-subcritical nonlinear Schrödinger equation. *Sci. China Math.* **54** (2011), no. 10, 2037–2062. MR2838120
- [9] R. T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, *J. Math. Phys.* **18** (1977), no. 9, 1794–1797. MR0460850
- [10] Q. Guo, H. Wang, and X. Yao, *Dynamics of the focusing 3D cubic NLS with slowly decaying potential*, *J. Math. Anal. Appl.* **506** (2022), no. 2, Paper No. 125653, 30 pp. MR4315563
- [11] M. Hamano and M. Ikeda, *Characterization of the ground state to the intercritical NLS with a linear potential by the virial functional*, *Advances in harmonic analysis and partial differential equations*, 279–307, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Cham MR4174752

- [12] M. Hamano and M. Ikeda, *Equivalence of conditions on initial data below the ground state to NLS with a repulsive inverse power potential*, J. Math. Phys. **63** (2022), no. 3, Paper No. 031509, 16 pp. MR4393612
- [13] M. Hamano and M. Ikeda, *Scattering solutions to nonlinear Schrödinger equation with a long range potential*, preprint, arXiv : 2104. 13577.
- [14] J. Holmer and S. Roudenko, *A sharp condition for scattering of the radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **282** (2008), no. 2, 435–467. MR2421484
- [15] J. Holmer and S. Roudenko, *Divergence of infinite-variance nonradial solutions to the 3D NLS equation*, Comm. Partial Differential Equations **35** (2010), no. 5, 878–905. MR2753623
- [16] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675. MR2257393
- [17] R. Killip, S. Masaki, J. Murphy, and M. Visan, *The radial mass-subcritical NLS in negative order Sobolev spaces*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **39** (2019), no. 1, 553–583. MR3918185
- [18] A. Messiah, *Quantum mechanics*, Vol. I. Translated from the French by G. M. Temmer North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Interscience Publishers Inc., New York 1961 xv+504 pp. MR0129790
- [19] C. Miao, J. Zhang, and J. Zheng, *A nonlinear Schrödinger equation with Coulomb potential*, Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) **42** (2022), no. 6, 2230–2256. MR4493675
- [20] H. Mizutani, *Wave operators on Sobolev spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **148** (2020), no. 4, 1645–1652. MR4069201
- [21] H. Mizutani, *Strichartz estimates for Schrödinger equations with slowly decaying potentials*, J. Funct. Anal. **279** (2020), no. 12, 108789, 57 pp. MR4156128
- [22] T. Ogawa and Y. Tsutsumi, *Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations **92** (1991), no. 2, 317–330. MR1120908
- [23] M. Reed and B. Simon, *Methods of Mathematical Physics*, New Academic, New York, Vols. 1, 2, 1975; Vols. 3, 4, 1978.
- [24] G. Series, *Spectrum of Atomic Hydrogen*, Oxford University Press, Oxford, 1957.
- [25] W. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), no. 2, 149–162. MR0454365