On Affine Structures coming from Berkovich Geometry

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻数学系
後藤 慶太 (Keita Goto)

概要

ミラー対称性の数学的理解の一つとして特異点を許す整アファイン多様体 (IAMS) を用いたミラーの構成が注目されている．この構成は元々 Strominger-Yau-Zaslow により提唱された SYZ 予想と呼ばれる物理学の予想 [SYZ96] に由来しており，特に Calabi-Yau 多様体の退化族から IAMS を得る段階（SYZ Picture）で微分幾何学的な議論が必要となる．2006 年に Kontsevich-Soibelman はこの構成を代数幾何学的に捉えるために，(後に）Non-Archimedean SYZ Picture と呼ばれる Calabi-Yau 多様体の退化族から IAMS を得る新たな手法を生み出した [KS06]．このとき，Calabi-Yau 多様体の退化族に対して上記 2 種類の構成から得られる IAMS が「同じ」であることが期待されている（cf. [KS06, Conjecture 3]）ものの，一般的な解決には至っていない．講演者は，偏極アーベル多様体の K-trivial な有限商の極大退化族に対して，SYZ Picture と Non-Archimedean SYZ Picture の両方で得られる IAMS を具体的に決定し，直接比較することで偏極アーベル多様体の K-trivial な有限商の極大退化族に対して両者の一致を証明することに成功した．また，hybrid 解析化という比較的新しい枠組みを用いることによって，この一致を幾何学的に特徴づけることに成功した．今回の講演ではこれらの結果について紹介する．これらの結果は [Got22] 及び [GO22] に基づく．

目次

1 導入 1

2 準備 2
2.1 SYZ fibration 4
2.2 Non-Archimedean SYZ fibration 5

3 主結果 6

1 導入

2006 年に Kontsevich-Soibelman は [KS06] において次のような予想を提唱した．

Conjecture 1.1 (cf. [KS06, Conjecture 3])**.** 極大退化している偏極 *Calabi-Yau* 多様体の族に対して，*special Lagrangian torus fibration* を用いて構成した *IAMS* と非アルキメデス幾何学を用いて構成した *IAMS* は一致する．

但し，この IAMS というのは，**特異点を許す整アファイン多様体** (Integral Affine Manifold with Singularities) の略であり，n 次元位相多様体 B が *IAMS* であるとは，余次元 2 の部分集合を除いたところで変換関数が整アファイン関数 ($\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$) となるような極大アトラスが存在する (**整アファイン構造**を持つ) ことを指す．同様に，B が**アファイン構造**を持つとは，B に変換関数がアファイン関数 ($\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$) となるような極大アトラスが存在することを指し，B が**特異点を許すアファイン構造**を持つとは，余次元 2 の部分集合を除いたところで B がアファイン構造を持つことを指す．

この予想が提唱された背景としてあるのが，元々理論物理学でその存在が予見され現在に至るまで盛んに研究されているミラー対称性である．ミラー対称性は数学的にいくつかの定式化が知られているが今回は Strominger-Yau-Zaslow が [SYZ96] において提唱した SYZ 予想と呼ばれる定式化（正確にはその変種）に注目する．特に，SYZ 予想は偏極 Calabi-Yau 多様体の極大退化族に対しそのミラー対の構成を IAMS を用いて理解できるということを示唆している（図 1 ）．

図 1 : SYZ 予想に基づくミラー対の構成

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathcal{X} : \text{偏極 Calabi-Yau 多様体の極大退化族}} \arrow[r, "\text{Step 1}"] \arrow[d, dotted] & \boxed{\text{IAMS}} \arrow[d, "\text{Step 2}"] \\
\boxed{\check{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \text{ のミラー対}} & \boxed{\text{IAMS}} \arrow[l, "\text{Step 3}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \text{Step 1: } \textit{SYZ Picture} \text{ (special Lagrangian torus fibration を用いた構成)} \\ \text{Step 2: Legendre transform} \\ \text{Step 3: Step 1 の逆問題を解く.} \end{cases}$$

しかし，図 1 における Step 1 (SYZ Picture) には複素微分幾何学の議論が必要で，それを代数幾何学的に理解するのは難しいという問題点があった．そこで，この Step 1 に相当する代数幾何学的な操作として採用されたのが Kontsevich-Soibelman が [KS06] にて考案した非アルキメデス幾何学を用いたアプローチ (non-Archimedean SYZ Picture) である．非アルキメデス幾何学は元々代数幾何学の研究から生まれた分野であるため代数幾何学との相性が良いことは良く知られており，non-Archimedean SYZ Picture は代数幾何的な解釈として注目されることになった．つまり，Conjecture 1.1 はこの SYZ 予想に基づくミラー対の構成に対する代数幾何的解釈の正当性を主張する一連の予想の一つなのである．

本講演では，Conjecture 1.1 の解決に向けた講演者の結果を紹介する．

2 準備

主結果を述べるにあたって，用語をいくつか準備する．

Definition 2.1 (variety)**.** K を体とする．X が K 上の *variety* であるとは，X が K 上分離的かつ有限型の整スキームであることを指す．

Definition 2.2 (Calabi-Yau variety)**.** K を体とする．X が K 上の *Calabi-Yau variety* であるとは，X が K 上の smooth proper variety であって canonical bundle ω_X が自明となるもののことを指す．

Remark 2.3. 一般的には，X が n 次元 Calabi-Yau variety というのは，上記の条件に加えて，$1 \leq i \leq n-1$ に対して $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ となることも仮定する．但し，$\mathcal{O}_X$ は X の構造層とする．特に Definition 2.2 の意味ではアーベル多様体 (Definition 2.10) も Calabi-Yau variety である．

Remark 2.4. 一般に $\mathbb{C}$ 上の Calabi-Yau variety X の複素解析化 $X(\mathbb{C}) := \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, X)$ は Kähler 構造を持つとは限らない．しかし，X が $\mathbb{C}$ 上 projective であれば，ample line bundle L が定める $\mathbb{P}(H^0(X,L)^\vee)$ への埋め込みによって，$\mathbb{P}(H^0(X,L)^\vee)$ 上の Fubini-Study metric を引き戻すことにより Kähler 構造が定まる．特に，$\omega_{FS}(L)$ を引き戻しによって定義されたその Kähler 計量とするとき，$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ 上で $[\omega_{FS}(L)] = c_1(L)$ が成立する．但し，$c_1(L)$ は L の first Chern class である．

Definition 2.5 (Calabi-Yau manifold)**.** コンパクト複素多様体 M が (algebraic) *Calabi-Yau manifold* であるとは，Kähler 構造を持ち，ある $\mathbb{C}$ 上の Calabi-Yau variety X が存在して $M \cong X(\mathbb{C})$ を満たすことを指す．

Calabi-Yau manifold に対して，次の定理が重要である．

Theorem 2.6 ([Yau78, Theorem 2])**.** *Calabi-Yau manifold* M *に対して，*ω *を所与の Kähler form とする．このとき，*ω *と cohomology class が同じ* M *上のある Kähler form* ω' $\big($*i.e.* $[\omega] = [\omega'] \in H^2(M, \mathbb{R})\big)$ *であって，*ω' *に付随する Ricci form* $\mathrm{Ric}(\omega')$ *について* $\mathrm{Ric}(\omega') = 0$ *となるものが一意に存在する．*

$\mathrm{Ric}(\omega) = 0$ となるような Kähler form ω に付随する metric g のことを *Ricci flat metric* と呼ぶ．

Remark 2.7. X を projective とすれば，Remark 2.4 のように所与の Kähler form として，任意の X 上の ample line bundle L に付随する $\omega_{FS}(L)$ を取ることができる．このとき，Theorem 2.6 を用いると，任意の ample line bundle L に対し，$[\omega] = c_1(L) \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ となるような Ricci flat metric に付随する Kähler form ω が一意に存在することが分かる．特にこの構成において，Ricci flat metric に付随する Kähler form ω は L ではなく $c_1(L)$ に依存していることに注意する．

Remark 2.8. Theorem 2.6 は Monge-Ampère 方程式という多様体上の非線形な偏微分方程式を解く問題に帰着されるのだが，後に Tian や Chen-Donaldson-Sun により Fano 多様体に対して Monge-Ampère 方程式の解が存在することと接束の K-poly 安定性と呼ばれる代数幾何的な条件が等価であることが示されている．

ここまでで Calabi-Yau variety と Calabi-Yau manifold を定義したが，両者を特に区別せず，まとめて *Calabi-Yau* 多様体と呼ぶ．

Definition 2.9 (極大退化族)**.** Δ を $\mathbb{C}$ の原点中心の開円盤とし，その穴あき円盤を $\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$ とする．flat family $f : \mathcal{X} \to \Delta$ として $t \neq 0$ 上で $\mathcal{X}_t := f^{-1}(t)$ が n 次元 Calabi-Yau 多様体，$t = 0$ 上で $\mathcal{X}_0 := f^{-1}(t)$ は特異であるようなものを考える．このような $\mathcal{X}$ を**退化**といい，$\mathcal{X}^* := f^{-1}(\Delta^*) \to \Delta^*$ を**退化族**という．より強く，$\mathcal{X}$ が**極大退化**であるとは，$t \neq 0$ に対しモノドロミー変

換 $T : H^n(\mathcal{X}_t, \mathbb{Q}) \to H^n(\mathcal{X}_t, \mathbb{Q})$ が $(T - I)^{n+1} = 0$ 及び $(T - I)^n \neq 0$ を満たしていることを指す．また，極大退化 $f : \mathcal{X} \to \Delta$ に対して $\mathcal{X}^* \to \Delta^*$ を**極大退化族**という．

Definition 2.10 (アーベル多様体)**.** K を体とする．X が K 上の**アーベル多様体**であるとは，群演算 $m : X \times X \to X$ として m や逆元を与える射が多様体の射となっているようなものが存在する K 上の proper variety のことを指す．

一般にアーベル多様体は projective であることが知られている．また，$\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体 X については次が知られている．

Fact 2.11 (cf. [Mum70])**.** X を $\mathbb{C}$ 上の g 次元アーベル多様体とする．このとき次が成立する．

- 適当な格子 $\Lambda(\cong \mathbb{Z}^{2g}) \subset \mathbb{C}^g$ が存在して $X(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$ を満たす．
- $\mathrm{Pic}^0 X$ を X の *Picard* 群 $\mathrm{Pic} X$ の部分群であって単位元と代数的同値になるような元からなる部分群とするとき，$\mathrm{Pic}^0 X$ は $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体の構造を持つ．

$X(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$ の下，$x \in X(\mathbb{C})$ **による** *translation* $t_x : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ を $t_x(y) := x + y$ で定める．このとき，付随する射も $t_x : X \to X$ と書く．L を X 上の ample line bundle とするとき，$x \mapsto t_x^*(L) \otimes L^{-1}$ により群準同型 $\phi_L : X \to \mathrm{Pic}^0 X$ が誘導される．このような群準同型 $\phi = \phi_L : X \to \mathrm{Pic}^0 X$ を X の**偏極**という．偏極を指定したアーベル多様体のことを**偏極アーベル多様体**という．

Remark 2.12. 偏極は ample line bundle L に依存しているように見えるが，より正確には，その first Chern class $c_1(L)$ に依存している．

Definition 2.13 (有限群作用)**.** 偏極アーベル多様体の (極大) 退化族 $\mathcal{A}^* \to \Delta^*$ に**有限群 G が作用している**とは，群準同型 $\varphi : G \to \mathrm{Aut}_{\Delta^*} \mathcal{A}^*$ が存在して，各 $\varphi(g)$ が任意の $t \in \Delta^*$ に対して $\mathcal{A}_t$ 上の偏極 ϕ_t を保つような自己同型であることを指す．

偏極アーベル多様体の (極大) 退化族 $\mathcal{A}^* \to \Delta^*$ に有限群 G が作用しているとき，自然に $\mathcal{X}^* := \mathcal{A}^*/G \to \Delta^*$ が定義できる．特に，各ファイバー $\mathcal{X}_t = \mathcal{A}_t/G$ はアーベル多様体の有限商になっており，$\mathcal{X}^* \to \Delta^*$ はそのような有限商の退化族を与えている．$\mathcal{X}_t$ が *K-trivial* であるとは，dualizing sheaf $\omega_{\mathcal{X}_t}$ が自明となることを指す．但し，$\mathcal{X}_t$ は smooth とは限らないため，一般に canonical bundle の代わりに dualizing sheaf を考える必要があることに注意する．

Remark 2.14. 上の議論において $\mathcal{X}_t$ は normal であるため，$\mathcal{X}_t$ の smooth locus 上で canonical divisor を考えて，その closure をとることで dualizing sheaf は Weil divisor として実現される．

2.1 SYZ fibration

この節において，M は常に $\mathbb{C}$ 上の n 次元 Calabi-Yau 多様体とし，ω を M の Ricci flat metric に対応する Kähler form，Ω を M 上の holomorphic volume form とする．

Definition 2.15 (special Lagrangian submanifold)**.** M の実 n 次元部分多様体 N が *special Lagrangian submanifold* とは，N が $\omega|_N = 0$ 及び $\mathrm{Im}\Omega|_N = 0$ を満たしていることを指す．

Definition 2.16 (SYZ fibration)**.** B を位相多様体とする．fibration $f : M \twoheadrightarrow B$ が *special Lagrangian torus fibration* であるとは，任意のファイバー $M_b := f^{-1}(b)$ が M の special Lagrangian submanifold であって実トーラスと可微分同相であることを指す．この fibration のことを *SYZ fibration* ともいう．

SYZ fibration $f : M \to B$ は B に二つのアファイン構造 (∇_A, ∇_B) と一つの計量 g を与えることが知られている．特に，∇_B は $\mathrm{Im}\Omega$ によって定まっているため (B, ∇_B) は複素構造を反映しているアファイン構造であり，後述の non-Archimedean SYZ fibration で与えられる IAMS と比較すべきアファイン構造である．

2.2 Non-Archimedean SYZ fibration

この節では，X を $K := \mathbb{C}((t))$ 上の Calabi-Yau 多様体とし，K の DVR を $R := \mathbb{C}[[t]]$，剰余体を $k \cong \mathbb{C}$ とおく．また，K 上の離散付値（但し，乗法的な記法を採用する）として，$||t|| = e^{-1}$ によって正規化したものを考える．

Definition 2.17 (semivaluation)**.** A を K 上有限型代数とする．写像 $|\cdot| : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が A 上の *semivaluation* であるとは，任意の $f, g \in A$ に対して $|f+g| \leq |f| + |g|$ 及び $|f| \cdot |g| = |fg|$ が成立し，任意の $a \in K \hookrightarrow A$ に対し $|a| = ||a||$ が成立することを指す．

Definition 2.18 (Berkovich 解析化)**.** K 上有限型代数 A に対し，$U := \mathrm{Spec}A$ とおくとき，U の *Berkovich* 解析化 U^{an} を A 上の semivaluation 全体と定義する．また U^{an} の位相として，任意の $f \in A$ に対し，$|\cdot| \mapsto |f|$ で定まる写像 $f : U^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が連続となる最も粗い位相を入れる．より強く，U^{an} には G-topology が自然に定義され，それによって構造層が定義できるが，詳細は [Ber90] に譲る．一般の K 上局所有限型 scheme X に対しても，各 affine open subscheme $U \subset X$ に対して U^{an} を構成し，それらを貼り合わせることによって *Berkovich* 解析化 X^{an} を定義することができる．X^{an} も U^{an} 同様に G-topology を持ち，構造層 $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ が定義できる．

Definition 2.19 (model)**.** flat R-algebraic space $\mathcal{X}$ が，同型 $\mathcal{X}_K := \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}K \cong X$ を備えているとき，この $\mathcal{X}$ を X の *model* という．さらに，この $\mathcal{X}$ が normal scheme で，特異ファイバー $\mathcal{X}_k (= \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}k)$ の被約化 $\mathcal{X}_{k,\mathrm{red}}$ の各既約成分が $\mathbb{Q}$-Cartier，そして pair $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_k)$ が minimal dlt model であるときに，$\mathcal{X}$ を X の *good minimal dlt model* という．

Definition 2.20 (dual complex)**.** $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_k)$ を dlt pair とするとき，$\mathcal{X}$ の *dual complex* $\Delta(\mathcal{X})$ とは，次で定まる正則 CW 複体である：
$\mathcal{X}_k^{=1}$ を divisor としての $\mathcal{X}_k$ における係数が 1 であるような prime divisor 全体の成す divisor とする．そのような prime divisor E_i を用いて $\mathcal{X}_k^{=1} = \bigcup_{i \in I} E_i$ とおくとき，$\bigcap_{i \in J} E_i \neq \emptyset$ なる $J \subset I$ を考える．ここで $\bigcap_{i \in J} E_i$ の各既約成分に対して，$|J| - 1$ 次元の cell を対応させる．このとき任意の $j \in J$ に対し，$\bigcap_{i \in J} E_i$ の各既約成分は $\bigcap_{i \in J \setminus \{j\}} E_i$ の複数の既約成分に含まれてしまうことはない．このことから各 cell 同士の間の attaching map が誘導され CW 複体となる．

$\mathcal{X}$ を X の proper な good minimal dlt model とするとき，dual complex $\Delta(\mathcal{X})$ は X の Berkovich 解析化 X^{an} の部分集合とみなすことが出来る上に，X^{an} から $\Delta(\mathcal{X})$ への retraction $\rho_{\mathcal{X}} : X^{\mathrm{an}} \to \Delta(\mathcal{X})$ が誘導されることが知られている (cf.[BFJ16, Corollary 3.2])．このとき，X^{an} の部分集合としての $\Delta(\mathcal{X})$ は good minimal dlt model $\mathcal{X}$ の取り方に依らないことも知られており [MN12, §4.5]，これを X の *essential skelton* と呼び，$\mathrm{Sk}(X)$ と書く．また，こうして $\mathcal{X}$ から誘導される retraction $\rho_{\mathcal{X}} : X^{\mathrm{an}} \to \mathrm{Sk}(X)$ を $\mathcal{X}$ に付随する *non-Archimedean SYZ fibration* という．SYZ fibration がアファイン構造を与えていたように，non-Archimedean SYZ fibration も $\mathrm{Sk}(X)$ に IAMS 構造を与えることが知られている [NXY19, Theorem 6.1].

3　主結果

さて，主結果を述べていこう．以下，Δ を十分小さい半径を持つ $\mathbb{C}$ の原点中心の開円盤とし，その穴あき円盤を $\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$ とする．

Theorem 3.1 (cf. [GO22, Theorem 2.8])**.** 任意の偏極アーベル多様体の *K-trivial* な有限商の Δ^* 上の極大退化族 $\mathcal{X}^*$ に対して，各ファイバー $\mathcal{X}_t$ がある *fibration* $f_t : \mathcal{X}_t \to \mathcal{B}_t$ を持ち，$\mathcal{B}_t$ の余次元 *2* を除いたところで *SYZ fibration* になっている．しかも，その f_t の定める $\mathcal{B}_t$ 上の二つの特異点を許すアファイン構造と一つの計量の組 $(\mathcal{B}_t, \nabla_A(t), \nabla_B(t), g_t)$ は適当な意味で $t \to 0$ で収束し，その極限 $(\mathcal{B}_0, \nabla_A(0), \nabla_B(0), g_0)$ は明示的に書き下せる．特に，$(\mathcal{B}_0, \nabla_B(0))$ は *IAMS* である．

Remark 3.2. 一般の Calabi-Yau 多様体に対して SYZ fibration が存在するかどうかという問題は未解決問題である．[GO22, Theorem 2.8] では，後述するように，各ファイバーに対し SYZ fibration が存在するだけでなく，SYZ fibration の族として Δ^* 上の連続写像として与えられることも示している．この SYZ fibration の族の存在に関して，我々の結果以外では，一般の K3 曲面に対しても正しいことが知られている [OO21, Chapter 4].

Theorem 3.3 (偏極アーベル多様体の K-trivial な有限商に対する Conjecture 1.1 の肯定的解決．cf. [Got22, Theorem 5.31])**.** 有限群作用が適当な条件を満たすような偏極アーベル多様体の *K-trivial* な有限商に対する Δ^* 上の極大退化族 $\mathcal{X}^*$ を考える．この時，*Theorem 3.1* で与えられた $(\mathcal{B}_0, \nabla_B(0))$ は，適当な有限次拡大に相当する *base change* $\mathrm{Spec}K' \to \mathrm{Spec}K$ の後に，$X := \mathcal{X}^*_K$ に対するある *non-Archimedean SYZ fibration* $\rho_{\mathcal{X}} : X^{\mathrm{an}} \to \mathrm{Sk}(X)$ が定める *IAMS* $(\mathrm{Sk}(X), \rho_{\mathcal{X}})$ とスケールの差を除いて *IAMS* として同型となる．

Remark 3.4. Theorem 3.3 で述べた non-Archimedean SYZ fibration を与えるような good minimal dlt model $\mathcal{X}$ はアーベル多様体の退化の理論を応用することで与えられる．このアーベル多様体の退化は [FC90] において非常に良く調べられており，実際 Theorem 3.3 で述べた non-Archimedean SYZ fibration により定まる IAMS は [FC90] において degeneration data と呼ばれているものによって明示的に記述することができる．この degeneration data から所望の good minimal dlt model $\mathcal{X}$ を構成する過程において，アーベル多様体の退化を cone decomposition に結び付ける [Mum72] の議論を有限群作用付きに深化させた [Kün98] の理論が重要になるのだが，[Kün98] での議論は誘導される

IAMS を明示的に記述する上で不十分なものであった．Theorem 3.3 における講演者の最も大きな貢献は，[Kün98] の議論を発展させることで，この IAMS が明示的に記述できるような good minimal dlt model $\mathcal{X}$ を構成したことにある．

最後の定理を述べるための準備をしよう．Theorem 3.3 と同様の偏極アーベル多様体の K-trivial な有限商の極大退化族 $\mathcal{X}^*$ と $X = \mathcal{X}^*_K$ の minimal dlt model $\mathcal{X}$ を考える．このとき，$\mathcal{X}$ の *hybrid* 解析化 $\mathcal{X}^{\mathrm{hyb}}$ が存在して次の性質を満たすことが知られている [BJ17, §4 and Appendix].

1. $\mathcal{X}^{\mathrm{hyb}}$ は位相空間であり，連続写像 $\pi : \mathcal{X}^{\mathrm{hyb}} \twoheadrightarrow \Delta$ が存在する．
2. 次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\Delta^*) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{X}^* \arrow[d] \\ \Delta^* \arrow[r, "="] & \Delta^* \end{tikzcd}$$

3. $\pi^{-1}(0) \cong X^{\mathrm{an}}$ が成り立つ．

Theorem 3.5 (Theorem 3.3 の幾何学的特徴づけ cf. [GO22, Theorem 3.2, Theorem 4.9])**.** 上で定めた *hybrid* 解析化 $\mathcal{X}^{\mathrm{hyb}}$ に対して，*Theorem 3.1* で主張した各ファイバー $\mathcal{X}_t (t \neq 0)$ 上の *SYZ fibration* を f_t とし，$\mathcal{X}$ の定める *non-Archimedean SYZ fibration* を $\rho_{\mathcal{X}}$ とするとき，ある Δ 上の位相多様体 $\mathcal{B}$ と連続写像 $f^{\mathrm{hyb}} : \mathcal{X}^{\mathrm{hyb}} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ (我々はこれを hybrid SYZ fibration と呼んでいる) が存在し次を満たす．

1. $t \in \Delta^*$ に対して $f^{\mathrm{hyb}}|_t = f_t$.
2. $f^{\mathrm{hyb}}|_{t=0} = \rho_{\mathcal{X}}$.

Remark 3.6. 特に，f^{hyb} は $\mathcal{B}$ の各ファイバー $\mathcal{B}_t$ にそれぞれ SYZ fibration もしくは non-Archimedean SYZ fibration により特異点を許すアファイン構造を誘導しているが，$(\mathcal{B}_t, \nabla_B(t))$ に注目すると，$t = 0$ を含めて連続的にアファイン構造が変化していることが分かる．これは Theorem 3.3 に対して幾何的な描像を与えている．また，Fermat 型超曲面の族に対して, この hybrid 解析化を用いた同種の結果が報告されている [PS22, Proposition 5.8].

参考文献

[Ber90] V. Berkovich, *Spectral Theory and Analytic Geometry Over Non-Archimedean Fields*, American Mathematical Society, 1990.

[BFJ16] S. Boucksom, C. Favre, and M. Jonsson, *Singular semipositive metrics in non-Archimedean geometry*, Journal of Algebraic Geometry **25** (2016), no. 1, 77 - 139.

[BJ17] S. Boucksom and M. Jonsson, *Tropical and non-Archimedean limits of degenerating families of volume forms*, Journal de l'École polytechnique - Mathématiques **4** (2017), 87–139.

[FC90] G. Faltings and C. L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 22, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[GO22] K. Goto and Y. Odaka, *Special Lagrangian fibrations, Berkovich retraction, and crystallographic groups*, arXiv:2206.14474, 2022 (submitted).

[Got22] K. Goto, *On The Two Types Of Affine Structures For Degenerating Kummer Surfaces — Non-Archimedean VS Gromov-Hausdorff Limits —*, arXiv:2203.14543, 2022 (submitted).

[KS06] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Affine Structures and Non-Archimedean Analytic Spaces*, The Unity of Mathematics: In Honor of the Ninetieth Birthday of I.M. Gelfand (2006), 321–385.

[Kün98] K. Künnemann, *Projective regular models for abelian varieties, semistable reduction, and the height pairing*, Duke Mathematical Journal **95** (1998), no. 1, 161 – 212.

[MN12] M. Mustaţă and J. Nicaise, *Weight functions on non-Archimedean analytic spaces and the Kontsevich-Soibelman skeleton*, Algebraic Geometry **2** (2012).

[Mum70] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 5, Oxford University Press, 1970.

[Mum72] ______, *An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings*, Compositio Mathematica **24** (1972), no. 3, 239–272.

[NXY19] J. Nicaise, C. Xu, and T. Y. Yu, *The non-archimedean SYZ fibration*, Compositio Mathematica **155** (2019), no. 5, 953–972.

[OO21] Y. Odaka and Y. Oshima, *Collapsing K3 Surfaces, Tropical Geometry and Moduli Compactifications of Satake, Morgan-Shalen Type*, MSJ Memoir, vol. 40, MATHEMATICAL SOCIETY OF JAPAN, 2021.

[PS22] L. Pille-Schneider, *Hybrid toric varieties and the non-archimedean SYZ fibration on Calabi-Yau hypersurfaces*, arXiv:2210.05578, 2022.

[SYZ96] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T duality*, Nuclear Physics **479** (1996), 243–259.

[Yau78] S.T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, Communications on Pure and Applied Mathematics **31** (1978), no. 3, 339–411.