Neretin 群とそのある開部分群について

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
有本諒也 (Ryoya ARIMOTO)

概要

Neretin 群とはある rooted tree の almost automorphism からなる完全不連結局所コンパクト群であり、様々な興味深い性質を持つことが知られている。本講演では、Neretin 群の定義とその性質を紹介し、最後には Neretin 群のある開部分群は I 型ではないという結果を紹介する。

1　はじめに

局所コンパクト群は数学における基本的な研究対象の 1 つである。本稿では、位相群は Hausdorff かつ第二可算なもののみを考える。局所コンパクト群 G が与えられたとき、その単位元を含む連結成分 G° は G の閉正規部分群であり、この正規部分群による商 G/G° は完全不連結局所コンパクト群となる。従って、G は連結な局所コンパクト群の完全不連結局所コンパクト群による拡大 $0 \to G^\circ \to G \to G/G^\circ \to 0$ であるため、一般の局所コンパクト群の研究は理論上、連結なものについての研究と完全不連結なものについての研究に分けられる。Gleason–山辺の定理により、連結局所コンパクト群は Lie 群の射影極限であるため、前者については Lie 群の豊かな理論が援用できる。一方、完全不連結局所コンパクト群については現在も研究が進められているところである。

完全不連結局所コンパクト群の例として、Neretin 群と呼ばれる群がある。これはある rooted tree の almost automorphism からなる群である。この群は、コンパクト生成で単純であるにも関わらず、格子を持たないなどといった様々な興味深い性質を持つ。2021 年には P.-E. Caprace, A. Le Boudec, N. Matte Bon によってこの群が I 型ではないということが示されている。

群が I 型であるとは、大雑把にはその群が表現論的によい振る舞いをするということであり、与えられた群が I 型かどうかを決定するということは基本的な問題である。離散群に対しては I 型群の特徴づけが知られているが、一般の局所コンパクト群に対する I 型群の特徴づけはまだ知られていない。

前述した Neretin 群には特徴的な開部分群が存在する。この開部分群が I 型であるかどうかということは自然な疑問であり、実際 Neretin 群が I 型でないことを示した 3 人の論文にもこのことが疑問として書かれている。本稿では、この疑問に対する解答である、Neretin 群の特徴的な開部分群は I 型ではないという結果を紹介する。I 型群の開部分群は I 型であるから、この結果を用いると Neretin 群が I 型でないことの別証明が得られる。

2　Neretin 群の定義と性質

Neretin 群とは、円周の微分同相群の p 進類似として Neretin により導入された群である ([10])。Neretin 群の定義や性質が述べられた文献としては [8] や [5, Section 6.3] などがある。

Neretin 群の定義を述べる。グラフや tree の基本事項については、[4, Appendix E] などを参考にされたい。なお、rooted tree とは root と呼ばれる、1 つの頂点が指定された tree のことである。さて、d, k は 2 以上の整数とし、rooted tree $\mathcal{T}_{d,k}$ を root は k 個の、他の頂点は $d+1$ 個の頂点とそれぞれ隣接しているようなものとする (図 1)。

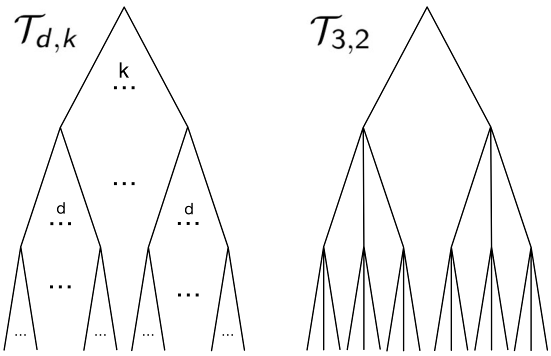

図 1　rooted tree $\mathcal{T}_{d,k}$

この tree の almost automorphism とは、3 つ組み (A, B, φ) である。ここで、A, B は $\mathcal{T}_{d,k}$ の root を含む有限 subtree であって、隣接する頂点の数が 1 であるような頂点の個数が等しいもので、$\varphi\colon \mathcal{T}_{d,k} \setminus A \to \mathcal{T}_{d,k} \setminus B$ は同型写像である。図 2 は $\mathcal{T}_{3,2}$ における almost automorphism の例である。

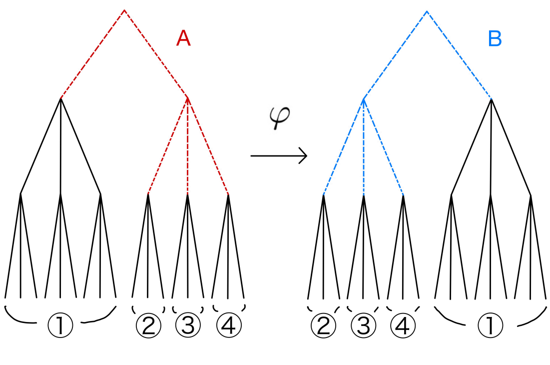

図 2　almost automorphism の例

2 つの almost automorphism $(A, B, \varphi), (A', B', \varphi')$ が同値であるということを、ある有限 subtree $\tilde{A} \subset \mathcal{T}_{d,k}$ であって、A, A' を含み、$\varphi|_{\mathcal{T}_{d,k} \setminus \tilde{A}} = \varphi'|_{\mathcal{T}_{d,k} \setminus \tilde{A}}$ となるものが存在することと定める。以上の準備の下に、**Neretin 群** $\mathcal{N}_{d,k}$ を $\mathcal{T}_{d,k}$ の almost automorphism の同値類がなす群とする。ここ

で、Neretin 群においては almost automorphism そのものではなく、その同値類を考えているため、それらの合成が well-defined に定まり、Neretin 群は本当に群となっていることに注意する。

次に、Neretin 群に位相を導入する。まず、$\mathcal{T}_{d,k}$ の自己同型全体 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{d,k})$ は、そのコンパクト開位相により完全不連結コンパクト群である。もちろん $\mathcal{T}_{d,k}$ の自己同型は almost automorphism なので、自然な単射群準同型 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{d,k}) \hookrightarrow \mathcal{N}_{d,k}$ が存在する。Neretin 群にはこの埋め込みが連続かつ開となるような位相がただ 1 つ存在する。この位相によって、Neretin 群は完全不連結局所コンパクト群である。

Neretin 群は数多くの興味深い性質を持つということが知られている。ここではそのうちのいくつかを紹介する。Neretin 群はコンパクト生成 ([5]) であり、単純 ([9]) である。そうであるにも関わらず格子を持たない ([2])。Neretin 群は単純であるが格子を持たない局所コンパクト群の最初の例である。2021 年には、P.-E. Caprace, A. Le Boudec, N. Matte Bon によって Neretin 群が I 型ではない (I 型の定義は後述) ということが示された ([6])。その証明は Glimm の定理を用いて行われる。

3　群 von Neumann 環と I 型群

この章では群 von Neumann 環と I 型群の定義、性質を紹介する。この章については、3.1 節に関しては [7] などを、3.2 節、3.3 節に関しては [3] などをそれぞれ参考にされたい。

3.1　von Neumann 環

von Neumann 環とは、恒等作用素を含み弱作用素位相に関して閉であるような $*$-部分代数 $M \subset B(H)$ のことである。ここで、H は (可分)Hilbert 空間であり、$B(H)$ は H 上の有界線型作用素全体のなす $*$-代数である。さらに $B(H)$ の弱作用素位相とは、セミノルムの族 $B(H) \ni x \to |\langle x\xi, \eta\rangle| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $(\xi, \eta \in H)$ によって定まる局所凸位相である。さて、部分集合 $A \subset B(H)$ に対して $A' = \{x \in B(H) \mid$ すべての $a \in A$ に対して $ax = xa\}$ と定める。二重可換子定理によると、恒等作用素を含む $*$-部分代数 $M \subset B(H)$ が von Neumann 環である (つまり、弱作用素位相に関して閉である) ことと、M が $M''(:= (M')')$ と等しくなることは同値である。

von Neumann 環には、I 型、II 型、III 型と呼ばれるものがある。I 型 von Neumann 環とは、$B(H)$ や可換 von Neumann 環、及びそれらの直和やテンソル積である。他の型についての説明は省略する。任意の von Neumann 環 M は $M = M_{\mathrm{I}} \oplus M_{\mathrm{II}} \oplus M_{\mathrm{III}}$ と一意的に直和分解できるということが知られている。ここで $M_{\mathrm{I}}, M_{\mathrm{II}}, M_{\mathrm{III}}$ はそれぞれ I 型、II 型、III 型 von Neumann 環である。

3.2　局所コンパクト群のユニタリ表現

局所コンパクト群 G の**ユニタリ表現** (π, H_π) とは G から Hilbert 空間 H_π 上のユニタリ作用素のなす群 $\mathcal{U}(H_\pi)$ への群準同型 $\pi\colon G \to \mathcal{U}(H_\pi)$ であって強作用素位相に関して連続なもの、つまり各 $\xi \in H_\pi$ に対して $G \ni g \mapsto \pi(g)\xi \in H_\pi$ が連続であるようなものである。ユニタリ表現の例としては、**左正則表現**がある。これは、局所コンパクト群 G の左 Haar 測度 μ に関して 2 乗可積分な関数のなす Hilbert 空間 $L^2(G)$ への表現 $\lambda\colon G \to \mathcal{U}(L^2(G))$ で $[\lambda(g)f](x) = f(g^{-1}x)$ $(g, x \in G,\ f \in L^2(G))$

によって定まるものである。局所コンパクト群 G のユニタリ表現 (π, H_π) が与えられたとき、この表現により生成される von Neumann 環 $\pi(G)'' \subset B(H_\pi)$ を考えることができる。左正則表現から定まる von Neumann 環 $\lambda(G)'' \subset B(L^2(G))$ を $L(G)$ で表し、G の**群 von Neumann 環**という。

3.3 I 型群

局所コンパクト群 G が **I 型**であるとは、全ての G のユニタリ表現について、その表現により生成される von Neumann 環が I 型となることをいう。I 型群はユニタリ表現の既約分解がうまくいくなど、表現論的によく振舞う群であり、逆に I 型ではない群では既約分解がうまくいかず、そのような群を既約表現を通して理解するのは絶望的である。

可換群やコンパクト群は I 型である。また、d-regular tree の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_d)$*1 も I 型群である。さらに、I 型群の開部分群も I 型であることが知られている。

4 主結果

この章では主結果を紹介する。主結果は次に述べる Neretin 群のある開部分群 $\mathcal{O}_{d,k} < \mathcal{N}_{d,k}$ に関するものである。

4.1 開部分群 $\mathcal{O}_{d,k}$

先ほど定義した rooted tree $\mathcal{T}_{d,k}$ の 2 つの頂点 v, w に対して、$d(v, w)$ で v と w を結ぶ道の長さを表す。これは $\mathcal{T}_{d,k}$ の頂点集合上の距離である。自然数 n に対して、root からの距離が n 以下の頂点によって生成される $\mathcal{T}_{d,k}$ の subtree を B_n で表す。このとき、B_n は $\mathcal{T}_{d,k}$ の root を含む有限な subtree であるから、$\mathcal{T}_{d,k} \setminus B_n$ の自己同型は almost automorphism である。よって、$\mathcal{T}_{d,k} \setminus B_n$ の自己同型全体の集合を $\mathcal{O}_{d,k}^{(n)}$ で表すこととすると、これは Neretin 群 $\mathcal{N}_{d,k}$ のコンパクト開部分群となる。このコンパクト開部分群の増大列 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{d,k}) = \mathcal{O}_{d,k}^{(1)} < \mathcal{O}_{d,k}^{(2)} < \cdots$ の和集合を $\mathcal{O}_{d,k}$ で表すとすると、$\mathcal{O}_{d,k}$ も Neretin 群 $\mathcal{N}_{d,k}$ の開部分群である。

4.2 主結果

以上の準備のもとに、主結果を紹介する。

定理 4.1（[1]） Neretin 群 $\mathcal{N}_{d,k}$ の開部分群 $\mathcal{O}_{d,k}$ の群 von Neumann 環 $L(\mathcal{O}_{d,k})$ は II 型である。特に、この開部分群 $\mathcal{O}_{d,k}$ は I 型でない。

I 型群の開部分群は I 型であるから、この定理を使うと先述の Neretin 群は I 型ではないという主張の別証明が得られる。

定理の証明については詳しく紹介しないが、ある条件を満たす非自明な中心列を構成する*2 ことで群 von Neumann 環が II 型であることを示すことができる。

*1 この群はコンパクト開位相により完全不連結局所コンパクト群である。

*2 正確には、群 von Neumann 環のコーナーと呼ばれる部分環上に構成する。

参考文献

[1] R. Arimoto; *On the type of the von Neumann algebra of an open subgroup of the Neretin group*. Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B, 9 (2022), 311–316.

[2] U. Bader, P.-E. Caprace, T. Gelander, and S. Mozes; *Simple groups without lattices*. Bull. Lond. Math. Soc., 44.1 (2012), 55-67.

[3] B. Bekka and P. de la Harpe; *Unitary Representations of Groups, Duals, and Characters*. Mathematical Surveys and Monographs, 250. American Mathematical Society, Providence, RI, 2020.

[4] N. P. Brown and N. Ozawa; *C^*-algebras and finite-dimensional approximations*. Graduate Studies in Mathematics, 88. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[5] P.-E. Caprace and T. De Medts; *Simple locally compact groups acting on trees and their germs of automorphisms*. Transform. Groups, 16.2 (2011), 375-411.

[6] P.-E. Caprace, A. Le Boudec, and N. Matte Bon; *Piecewise strongly proximal actions, free boundaries and the Neretin groups*. Preprint, arXiv:2107.07765v2, 2021.

[7] J. Dixmier; *Von Neumann Algebras*. North-Holland Mathematical Library, 27. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981.

[8] Ł. Garncarek and N. Lazarovich; *The Neretin groups*. In P.-E. Caprace and N. Monod (Eds.), New Directions in Locally Compact Groups (London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 131-144). Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

[9] C. Kapoudjian; *Simplicity of Neretin's group of spheromorphisms*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 49.4 (1999), 1225–1240.

[10] Yu. A. Neretin; *On combinatorial analogs of the group of diffeomorphisms of the circle*. Izv. Math., 41.2 (1993), 337-349.