ミドル・コンボリューションの q 変形と その q 差分方程式への応用

お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻 数学コース
新井由美 (Yumi ARAI)

概要

超幾何関数は重要な特殊関数の一つであり，微分方程式や積分表示の面で様々な結果が知られている．本研究では，q-middle convolution に関連する q 積分変換を再構成し，q-middle convolution の収束について考察した．具体的な q 差分方程式に q-middle convolution を適用することにより，q 超幾何方程式の標準形と次数 2 の変異版 q 超幾何方程式を導出した．またこれらの q 積分表示を得た．

本研究は竹村剛一教授との共同研究 ([2]) である．

1　導入

超幾何関数は重要な特殊関数の一つであり，整数論をはじめとする様々な分野との関わりをもち，数学のみならず物理学や工学においても重要な役割を担っている．

超幾何関数は，冪級数展開，積分表示，微分方程式という 3 通りの表示をもつ．超幾何級数は

$$
{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}z^2 + \cdots + \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n + \dots, \tag{1.1}
$$

$$
\text{ただし } (\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)
$$

により定義され，超幾何微分方程式

$$
z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + (\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0 \tag{1.2}
$$

の解である．超幾何微分方程式は，3 つの確定特異点 $\{0,1,\infty\}$ をもつ 2 階の Fuchs 型微分方程式の標準形である．超幾何微分方程式の解の積分表示は，C を適当な積分路として

$$
y = \int_C w^{\alpha-\gamma}(1-w)^{\gamma-\beta-1}(z-w)^{-\alpha}dw \tag{1.3}
$$

と書くことができる． (1.3) は Euler の積分表示と呼ばれる．

超幾何級数の q 類似である q 超幾何級数

$$
{}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^\alpha, q^\beta \\ q^\gamma \end{matrix}; q, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^\alpha;q)_n(q^\beta;q)_n}{(q;q)_n(q^\gamma;q)_n} z^n \tag{1.4}
$$

は Heine により 1846 年に導入された．ここで，$(\lambda;q)_n$ は $(\lambda;q)_0 = 1$，また正の整数 n に対して

$$
(\lambda;q)_n = (1-\lambda)(1-\lambda q)(1-\lambda q^2)\dots(1-\lambda q^{n-1}) \tag{1.5}
$$

により定義される q-Pochhammer 記号である．q 類似とは，「パラメーター q によって変形されたもので，$q \to 1$ の極限でもとに戻るもの」である．実際，q 超幾何級数の各項 $z^n(q^\alpha;q)_n(q^\beta;q)_n/((q;q)_n(q^\gamma;q)_n)$ は $q \to 1$ で超幾何級数 (1.1) の項 $z^n(\alpha)_n(\beta)_n/(n!(\gamma)_n)$ に収束する．q 超幾何級数は q 差分方程式

$$(x-q)f(x/q) - ((q^\alpha + q^\beta)x - q - q^\gamma)f(x) + (q^{\alpha+\beta}x - q^\gamma)f(qx) = 0 \tag{1.6}$$

を満たす．この q 差分方程式は $q \to 1$ で超幾何微分方程式 (1.2) となる．

次数 2 の変異版 q 超幾何方程式 ([5]) は

$$\begin{aligned}&(x - q^{h_1+1/2}t_1)(x - q^{h_2+1/2}t_2)g(x/q) + q^{k_1+k_2}(x - q^{l_1-1/2}t_1)(x - q^{l_2-1/2}t_2)g(qx) \\ &- [(q^{k_1} + q^{k_2})x^2 + Ex + p(q^{1/2} + q^{-1/2})t_1t_2]g(x) = 0, \\ &p = q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+k_1+k_2)/2}, \quad E = -p\{(q^{-h_2} + q^{-l_2})t_1 + (q^{-h_1} + q^{-l_1})t_2\}\end{aligned} \tag{1.7}$$

により定義される（ただし，$0 \neq t_1 \neq t_2 \neq 0$）．これは 3 つの特異点 $\{t_1, t_2, \infty\}$ をもつ 2 階の Fuchs 型微分方程式の q 類似である．次数 2 の変異版 q 超幾何方程式の解は [5, 7] においていくつか得られている．

middle convolution は Katz([6]) によって導入された操作であり，この Katz の理論により，任意の rigid な既約 Fuchs 型微分方程式は 1 階の Fuchs 型微分方程式に addition と middle convolution を有限回施すことにより得られることが示された．後に，Dettweiler と Reiter([3, 4]) が Katz の理論を

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \Big(\frac{A_1}{x-t_1} + \frac{A_2}{x-t_2} + \cdots + \frac{A_r}{x-t_r}\Big)Y(x) \tag{1.8}$$

と書かれる Fuchs 型微分方程式系に対して線形代数的に書き直し，それによって上述の理論がよりわかりやすいものになった．ここで，$Y(x)$ は n 項ベクトル，$A_1, A_2, \ldots, A_r$ は $n \times n$ 定数行列である．

関数 $Y(x) = x^a(1-x)^b$ は 1 階の線形微分方程式 $dY(x)/dx = \{a/x + b/(x-1)\}Y(x)$ を満たす．この微分方程式に middle convolution を施すと，(1.8) で $r = 2$, $n = 2$ とした微分方程式系が得られる．$Y(x)$ の 2 つの成分それぞれに関する単独の 2 階 q 差分方程式を導出すると，それらは適当なパラメーターをもつ q 超幾何方程式となる．積分表示 (1.3) は，middle convolution に付随する解の対応として得られる．

middle convolution の q 変形は坂井, 山口両氏によって構築された ([8])．q-middle convolution の対象となるのは，線形 q 差分方程式系

$$E_{\mathbf{B},\mathbf{b}} : Y(qx) = B(x)Y(x), \quad B(x) = B_\infty + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{1 - x/b_i} \tag{1.9}$$

である．$B_\infty, B_1, \ldots, B_N$ は同じサイズの正方行列，$b_1, b_2, \ldots, b_N$ は相異なる 0 でない複素数である．坂井・山口の q-convolution([8]) は Jackson 積分

$$\int_0^\infty f(s)\, d_q s = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n) \tag{1.10}$$

と関連している．

本講演では，q-middle convolution を用いることによって，q 超幾何方程式および変異版 q 超幾何方程式の解の積分表示の q 変形について調べる．この目的のため，坂井・山口の理論を拡張する．坂井・山口の理論における Jackson 積分 (1.10) を

$$\int_0^{\xi\infty} f(s)\, d_qs = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n\xi f(q^n\xi), \quad (\xi \in \mathbb{C}\setminus\{0\}) \tag{1.11}$$

に書き換える．これは青本氏の理論 ([1]) を踏まえたもので，坂井・山口の Jackson 積分 (1.10) は $\xi = 1$ の場合であると考えることができる．

複素数 q は $0 < |q| < 1$ を満たすものとして，次の記号を用いる．

$$(a;q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-q^ja), \quad (a_1, a_2, \dots, a_N; q)_\infty = (a_1;q)_\infty(a_2;q)_\infty \dots (a_N;q)_\infty. \tag{1.12}$$

2 q-middle convolution と収束

定義 2.1. (q$-$*convolution*[8])
$\mathbf{B} = (B_\infty; B_1, \dots, B_N)$ を $m\times m$ 行列の組，$(b_1, b_2, \dots, b_N)$ を 0 でない相異なる複素数の組とする．$B_0 = I_m - B_\infty - B_1 - \cdots - B_N$ とする．q-convolution $c_\lambda : (B_\infty; B_1, \dots, B_N) \mapsto (F_\infty; F_1, \dots, F_N)$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{F} = (F_\infty; F_1, \dots, F_N) \text{ は } (N+1)m \times (N+1)m \text{ 行列の組}, \tag{2.1}$$

$$F_i = \begin{pmatrix} & & O & & \\ B_0 & \cdots & B_i - (1-q^\lambda)I_m & \cdots & B_N \\ & & O & & \end{pmatrix} (i+1), \quad 1 \le i \le N,$$

$$F_\infty = I_{(N+1)m} - \widehat{F}, \quad \widehat{F} = \begin{pmatrix} B_0 & \cdots & B_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0 & \cdots & B_N \end{pmatrix}.$$

定義 2.1 の q-convolution により，線形 q 差分方程式の対応

$$Y(qx) = B(x)Y(x) \mapsto \widehat{Y}(qx) = F(x)\widehat{Y}(x), \tag{2.2}$$

$$B(x) = B_\infty + \sum_{i=1}^{N}\frac{B_i}{1-x/b_i},\ F(x) = F_\infty + \sum_{i=1}^{N}\frac{F_i}{1-x/b_i}$$

が引き起こされ，これは坂井・山口 ([8]) によって構成された q 積分変換と関連する．Jackson 積分を (1.11) で定義すると，この Jackson 積分の値は ξ に依存する．

坂井・山口の q-convolution に付随する q 積分表示の定理に収束条件を加えて書き直したものが次の定理である．

定理 2.2. (cf. [8, Theorem 2.1])
$Y(x)$ は $E_{\mathbf{B},\mathbf{b}}$ の解であって， 任意の $s \in \{q^n\xi | n \ge M_1,\ n \in \mathbb{Z}\}$ と $k = 1, \dots, m$ に対して

$|[Y(s)]_k| \le C_1|s|^{\varepsilon_1}$ となる $\varepsilon_1, C_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $M_1 \in \mathbb{Z}$ が存在し, また, 任意の $s \in \{q^n\xi | n \le M_2, n \in \mathbb{Z}\}$, $k = 1, \dots, m$ に対して $|[Y(s)]_k| \le C_2|s|^{\lambda-\varepsilon_2}$ となる $\varepsilon_2, C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$，$M_2 \in \mathbb{Z}$ が存在するものとする．このとき

$$\widehat{Y}_i(x) = \int_0^{\xi\infty} \frac{P_\lambda(x,s)}{s-b_i} Y(s)\, d_q s \quad (i = 0, \dots, N), \quad \widehat{Y}(x) = \begin{pmatrix} \widehat{Y}_0(x) \\ \vdots \\ \widehat{Y}_N(x) \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$P_\lambda(x,s) = \frac{(q^{\lambda+1}s/x;q)_\infty}{(qs/x;q)_\infty}$$

で定められる関数 $\widehat{Y}(x)$ は収束し，方程式 $E_{c_\lambda(\mathbf{B}),\mathbf{b}}$ を満たす．ただし，$c_\lambda(\mathbf{B}) = \mathbf{F}$ は (2.1) によって定められた行列の組である．

定義 2.3. (q$-$*middle convolution*, [8])
$(\mathbb{C}^m)^{N+1}$ の部分空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \ker B_0 \\ \vdots \\ \ker B_N \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \ker(\widehat{F} - (1-q^\lambda) I_{(N+1)m}) \tag{2.4}$$

と定義する．$\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ は $\boldsymbol{F}$-不変である．F_k の商空間 $(\mathbb{C}^m)^{N+1}/(\mathcal{K}+\mathcal{L})$ での作用を $\overline{F}_k$ $(k = \infty, 1, \dots, N)$ と記す．このとき q-middle convolution mc_λ は $E_{\mathbf{B},\mathbf{b}} \mapsto E_{\overline{\mathbf{F}},\mathbf{b}}$，$\overline{\mathbf{F}} = (\overline{F}_\infty; \overline{F}_1, \dots, \overline{F}_N)$ という対応によって定義される．

q-convolution に付随する積分変換を用いることによって，q-middle convolution mc_λ についても解の積分変換を得られるが，その際，商空間 $\mathcal{K}+\mathcal{L} \subset (\mathbb{C}^m)^{N+1}$ を考慮する必要がある．

3　q 超幾何方程式の q 積分表示

本章では，関数 $y(x) = x^\mu(\alpha x;q)_\infty/(\beta x;q)_\infty$ に対して q-convolution を適用することによって q 超幾何方程式を導出する．α と β は異なるものとする．

$$y(qx) = (qx)^\mu \frac{(\alpha q x;q)_\infty}{(\beta q x;q)_\infty} = q^\mu \frac{1-\beta x}{1-\alpha x} y(x) = \Big(q^\mu \frac{\beta}{\alpha} + \frac{q^\mu(1-\beta/\alpha)}{1-\alpha x}\Big) y(x) \tag{3.1}$$

より，関数 $y(x)$ は線形 q 差分方程式 $y(qx) = B(x)y(x)$,

$$B(x) = B_\infty + \frac{B_1}{1-x/b_1}, \quad B_\infty = q^\mu \frac{\beta}{\alpha}, \quad B_1 = q^\mu\Big(1-\frac{\beta}{\alpha}\Big), \quad b_1 = \frac{1}{\alpha} \tag{3.2}$$

を満たす．このとき $B_0 = 1 - B_\infty - B_1 = 1 - q^\mu$．$q$-convolution c_λ を施すと，行列の組 $c_\lambda(\mathbf{B}) = \mathbf{F} = (F_1, F_\infty)$ は

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_0 & B_1 - (1-q^\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-q^\mu & q^\mu(1-\beta/\alpha) - 1 + q^\lambda \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$
$$F_\infty = \begin{pmatrix} 1-B_0 & -B_1 \\ -B_0 & 1-B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^\mu & -q^\mu(1-\beta/\alpha) \\ -(1-q^\mu) & 1-q^\mu(1-\beta/\alpha) \end{pmatrix}$$

と書ける．よって，方程式 $E_{\mathbf{F},b}$ は

$$\widehat{Y}(qx)=\Big(F_\infty+\frac{F_1}{1-\alpha x}\Big)\widehat{Y}(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{q^\mu}{(1-q^\mu)\alpha x} & \dfrac{-q^\mu(1-\beta/\alpha)}{(-\alpha+(\alpha-\beta)q^\mu)x+q^\lambda} \\ 1-\alpha x & 1-\alpha x \end{pmatrix}\widehat{Y}(x) \tag{3.4}$$

と書ける．$\widehat{Y}(x)=\begin{pmatrix}\widehat{y}_0(x)\\ \widehat{y}_1(x)\end{pmatrix}$ とおくと，$\widehat{y}_0(x)$ に関する単独の 2 階 q 差分方程式

$$\begin{aligned}(x-q^{\lambda+1}\beta^{-1})\widehat{y}_0(x/q)+q^{-\mu}\beta^{-1}(\alpha x-q)\widehat{y}_0(qx)&\\ -\{(q^{-\mu}\alpha\beta^{-1}+1)x-q\beta^{-1}(1+q^{\lambda-\mu})\}\widehat{y}_0(x)&=0\end{aligned} \tag{3.5}$$

を得る．$\widehat{y}_0(x)=x^\lambda h(x)$ とおいてパラメーターの取り方を特殊化すると，関数 $h(x)$ が満たす q 差分方程式は，q 超幾何方程式の標準形

$$(x-q)g(x/q)+(abx-c)g(qx)-\{(a+b)x-q-c\}g(x)=0 \tag{3.6}$$

に対応することがわかる．同様に，$\widehat{y}_1(x)$ に関する q 差分方程式も q 超幾何方程式の標準形に対応する．

定理 2.2 の仮定を調べることにより，次の命題 3.1 を得る．

命題 3.1. $\xi,\alpha_1,\dots,\alpha_N,\beta_1,\dots,\beta_N\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$\beta_1\xi,\dots,\beta_N\xi\notin q^{\mathbb{Z}}$ とする．

$$y(s)=s^\mu\frac{(\alpha_1 s,\dots,\alpha_N s;q)_\infty}{(\beta_1 s,\dots,\beta_N s;q)_\infty} \tag{3.7}$$

とおく．
(i) $\mu>0$ ならば，任意の $s\in\{q^n\xi|n\geq M_1,\ n\in\mathbb{Z}\}$ に対して $|y(s)|\leq C_1|s|^\varepsilon$ となる $\varepsilon,C_1\in\mathbb{R}_{>0}$，$M_1\in\mathbb{Z}$ が存在する．
(ii) $\nu\in\mathbb{R}$ とする．$|q|^{\nu-\mu}|\alpha_1\dots\alpha_N/(\beta_1\dots\beta_N)|<1$ ならば，任意の $s\in\{q^n\xi|n\leq M_2,\ n\in\mathbb{Z}\}$ に対して $|y(s)|\leq C_2|s|^{\nu-\varepsilon}$ となる $\varepsilon,C_2\in\mathbb{R}_{>0}$，$M_2\in\mathbb{Z}$ が存在する．

上述の $y(x)=x^\mu(\alpha x;q)_\infty/(\beta x;q)_\infty$ に対して q-convolution を適用した例については，命題 3.1 において $N=1$，$\nu=\lambda$ とすることで定理 2.2 の仮定が満たされる．よって，次の定理を得る．

定理 3.2. $\xi,\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$\beta\xi\notin q^{\mathbb{Z}}$ とする．$\mu>0$ かつ $|q|^{\lambda-\mu}|\alpha/\beta|<1$ ならば，

$$\begin{aligned}&\widehat{Y}(x)=\begin{pmatrix}\widehat{y}_0(x)\\ \widehat{y}_1(x)\end{pmatrix},\\ &\widehat{y}_0(x)=\int_0^{\xi\infty}\frac{P_\lambda(x,s)}{s}s^\mu\frac{(\alpha s;q)_\infty}{(\beta s;q)_\infty}\,d_qs,\quad \widehat{y}_1(x)=\int_0^{\xi\infty}\frac{P_\lambda(x,s)}{s-1/\alpha}s^\mu\frac{(\alpha s;q)_\infty}{(\beta s;q)_\infty}\,d_qs\end{aligned} \tag{3.8}$$

で定義される関数 $\widehat{Y}(x)$ は収束し，かつ方程式 $E_{\mathbf{F},\mathbf{b}}$(3.4) を満たす．

関数 $\widehat{y}_0(x)$ は

$$\widehat{y}_0(x)=\int_0^{\xi\infty}s^{\mu-1}\frac{(q^{\lambda+1}s/x,\alpha s;q)_\infty}{(qs/x,\beta s;q)_\infty}d_qs=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(q^n\xi)^\mu\frac{(q^{\lambda+n+1}\xi/x,q^n\xi\alpha;q)_\infty}{(q^{n+1}\xi/x,q^n\xi\beta;q)_\infty} \tag{3.9}$$

と表される．これは ${}_2\psi_2$ という形の両側 q 超幾何級数である．ξ に特定の値を代入すると，片側の q 超幾何級数が得られる．$\xi = 1/\alpha$ とすれば, $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ に対して $(q^n; q)_\infty = 0$ となることから,

$$\widehat{y}_0(x) = (1-q)\sum_{n=1}^{\infty}(q^n/\alpha)^\mu \frac{(q^{\lambda+n+1}/(\alpha x), q^n; q)_\infty}{(q^{n+1}/(\alpha x), q^n\beta/\alpha; q)_\infty} \tag{3.10}$$

$$= (1-q)\alpha^{-\mu}q^\mu \frac{(q^{\lambda+2}/(\alpha x), q; q)_\infty}{(q^2/(\alpha x), q\beta/\alpha; q)_\infty}\ {}_2\phi_1\Big(\begin{matrix} q^2/(\alpha x), q\beta/\alpha \\ q^{\lambda+2}/(\alpha x)\end{matrix}\ ; q, q^\mu\Big)$$

となる．$\xi = q^{-\lambda}x$ のときも $\widehat{y}_0(x)$ は ${}_2\phi_1$ を用いて表すことができる．これらの場合，定理 2.2 の仮定は条件 $\mu > 0$ のみによって満たされる．

$\xi = 1/\beta$ とすると，定理 3.2 の仮定に反する．そこで関数 $P_\lambda(x,s)$，$y(s)$ を

$$P_\lambda(x,s) = (x/s)^\lambda \frac{(x/s; q)_\infty}{(q^{-\lambda}x/s; q)_\infty}, \quad y(s) = s^{\mu'}\frac{(q/(\beta s); q)_\infty}{(q/(\alpha s); q)_\infty}, \quad (\text{ただし } q^{\mu'}\alpha/\beta = q^\mu) \tag{3.11}$$

に取り替える．この $P_\lambda(x,s)$，$y(x)$ も元の関数と同じ q 差分方程式を満たす．q-convolution によって得られた関数 $\widehat{y}_0(x)$ は

$$\widehat{y}_0(x) = (1-q)x^\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty}(q^n\xi)^{\mu'-\lambda}\frac{(xq^{-n}/\xi, q^{1-n}/(\beta\xi); q)_\infty}{(xq^{-\lambda-n}/\xi, q^{1-n}/(\alpha\xi); q)_\infty} \tag{3.12}$$

と表され，これもまた収束条件の下で方程式 (3.5) を満たす．$\xi = 1/\beta$ ならば,

$$\widehat{y}_0(x) = (1-q)\beta^{\lambda-\mu'}x^\lambda \frac{(\beta x, q; q)_\infty}{(q^{-\lambda}\beta x, q\beta/\alpha; q)_\infty}\ {}_2\phi_1\Big(\begin{matrix} q^{-\lambda}\beta x, q\beta/\alpha \\ \beta x\end{matrix}\ ; q, q^{\lambda-\mu}\frac{\alpha}{\beta}\Big). \tag{3.13}$$

$\xi = x$ も (3.9) に代入できないので同様の計算をすると，$\widehat{y}_0(x)$ は ${}_2\phi_1$ を用いて表すことができる．これらの $\widehat{y}_0(x)$ は $|q|^{\lambda-\mu}|\alpha/\beta| < 1$ で収束する．

4　変異版 q 超幾何方程式の q 積分表示

本章では，q-middle convolution によって次数 2 の変異版 q 超幾何方程式 (1.7) を導出する．q-middle convolution は定義 2.3 において，不変な部分空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ で商空間をとることによって定められている．部分空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ のどちらか一方は 0 でないという条件の下で，$N = 2$ の場合を調べる．

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は相異なるものとし,

$$y(x) = x^\mu \frac{(\alpha_1 x, \alpha_2 x; q)_\infty}{(\beta_1 x, \beta_2 x; q)_\infty} \tag{4.1}$$

とする．関数 $y(x)$ は線形 q 差分方程式 $y(qx) = B(x)y(x)$,

$$B(x) = B_\infty + \frac{B_1}{1-x/b_1} + \frac{B_2}{1-x/b_2},\ b_1 = \frac{1}{\alpha_1},\ b_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \tag{4.2}$$

$$B_\infty = q^\mu\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}, \quad B_1 = q^\mu\frac{(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)}, \quad B_2 = q^\mu\frac{(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}$$

を満たす．$B_0 = 1 - B_\infty - B_1 - B_2 = 1 - q^\mu$．$q$-convolution c_λ 後の q 差分方程式 $E_{\mathbf{F},b}$ は

$$\widehat{Y}(qx) = \Big(F_\infty + \frac{F_1}{1-\alpha_1 x} + \frac{F_2}{1-\alpha_2 x}\Big)\widehat{Y}(x), \quad \widehat{Y}(x) = \begin{pmatrix}\widehat{y}_0(x)\\ \widehat{y}_1(x)\\ \widehat{y}_2(x)\end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

定義 2.3 での部分空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ の定義より，$\mu=0$ ならば $\dim\mathcal{K}=1$，$q^\lambda=q^\mu\beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)$ ならば $\dim\mathcal{L}=1$ となる．

本講演では，$q^\lambda=q^\mu\beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)$ の場合について考察する．$q^\lambda=q^\mu\beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)$ ならば，部分空間 $\mathcal{L}=\ker(\widehat{F}-(1-q^\lambda)I_3)$ の基底として ${}^t(1,1,1)$ がとれ，$\dim\ \mathcal{L}=1$．正則行列

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\tag{4.4}$$

をとる．P の第 3 列には $\mathcal{L}$ の基底としてとった ${}^t(1,1,1)$ が，第 1 列および第 2 列には計算が簡単になるよう単位ベクトルが入っている．P で F_1，F_2，F_∞ を相似変換すると，

$$P^{-1}F_1P=\begin{pmatrix}B_1-(1-q^\lambda)&B_2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad P^{-1}F_2P=\begin{pmatrix}0&0&0\\B_1&B_2-(1-q^\lambda)&0\\0&0&0\end{pmatrix},\tag{4.5}$$
$$P^{-1}F_\infty P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-B_1&-B_2&1-B_0-B_1-B_2\end{pmatrix}.$$

$P^{-1}F_\infty P$, $P^{-1}F_1P$, $P^{-1}F_2P$ の左上の 2×2 小行列は，商空間 $\mathbb{C}^3/\mathcal{L}$ での 1 組の表現行列に対応する．こうして，$mc_\lambda(\mathbf{B})=\overline{\mathbf{F}}=(\overline{F}_\infty;\overline{F}_1,\overline{F}_2)$ は

$$\overline{F}_1=\begin{pmatrix}B_1-(1-q^\lambda)&B_2\\0&0\end{pmatrix},\ \overline{F}_2=\begin{pmatrix}0&0\\B_1&B_2-(1-q^\lambda)\end{pmatrix},\ \overline{F}_\infty=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\tag{4.6}$$

ととれ，方程式 $E_{\overline{\mathbf{F}},b}$ は

$$\begin{pmatrix}\bar{g}_1(qx)\\\bar{g}_2(qx)\end{pmatrix}=\left(\overline{F}_\infty+\frac{\overline{F}_1}{1-\alpha_1x}+\frac{\overline{F}_2}{1-\alpha_2x}\right)\begin{pmatrix}\bar{g}_1(x)\\\bar{g}_2(x)\end{pmatrix}\tag{4.7}$$

と書ける．これより，$\bar{g}_1(x)$ に関する q 差分方程式は

$$\begin{aligned}&\left(x-\frac{q^{\mu+1}\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\right)\left(x-\frac{q^{\mu+1}\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\bar{g}_1(x/q)+q\left(x-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x-\frac{q}{\alpha_2}\right)\bar{g}_1(qx)\\&-\left\{(1+q)x^2-\left(q^{\mu+1}\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{q}{\alpha_1}+\frac{q^2}{\alpha_2}\right)x+\left(1+\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\frac{q^{\mu+2}}{\alpha_1\alpha_2}\right\}\bar{g}_1(x)=0\end{aligned}\tag{4.8}$$

と書ける．$x=1/z$，$\bar{g}_1(x)=x^\mu f(1/x)$ とすると，

$$\begin{aligned}&(z-\alpha_1)\left(z-\frac{\alpha_2}{q}\right)f(z/q)+\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\left(z-q^{-\mu-1}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1}\right)\left(z-q^{-\mu-1}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_2}\right)f(qz)\\&-\left\{\left(1+\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)z^2-(q^{-1}(\beta_1+\beta_2)+q^{-\mu}\alpha_1+q^{-\mu-1}\alpha_2)z+q^{-\mu-2}(q+1)\alpha_1\alpha_2\right\}f(z)=0\end{aligned}\tag{4.9}$$

となる．この方程式は，次数 2 の変異版 q 超幾何方程式 (1.7) において $k_1=0$ とした特別な場合であるが，$g(z)=z^{-k_1}f(z)$ とおくことによって，(4.9) は (1.7) に対応する．

命題 4.1. $f(z)$ は方程式 (4.9) を満たすものとする．$g(x)=x^{-k_1}f(x)$,

$$\begin{aligned}&\alpha_1=q^{h_1+1/2}t_1,\quad\alpha_2=q^{h_2+3/2}t_2,\\&\beta_1=q^{(h_1+h_2+l_1-l_2-k_1+k_2)/2+1}t_1,\quad\beta_2=q^{(h_1+h_2-l_1+l_2-k_1+k_2)/2+1}t_2\end{aligned}\tag{4.10}$$

とおく．すると，$g(x)$ は次数 2 の変異版 q 超幾何方程式 (1.7) を満たす．ただし，$\lambda = (h_1 + h_2 - l_1 - l_2 - k_1 + k_2 + 1)/2$.

q-middle convolution によって得られる q 積分表示の収束と q 積分表示が満たす実際の q 差分方程式について考察する．関数

$$\widehat{y}_i^{[K,L]}(x) = (1-q)\sum_{n=K}^{L} s^{\mu+1}\frac{P_\lambda(x,s)}{s-b_i}\frac{(\alpha_1 s, \alpha_2 s; q)_\infty}{(\beta_1 s, \beta_2 s; q)_\infty}|_{s=q^n\xi}, \quad (i=0,1,2), \tag{4.11}$$
$$b_0 = 0,\ b_1 = 1/\alpha_1,\ b_2 = 1/\alpha_2$$

を考える．$P_\lambda(x,s)$ の定義と行列 P による相似変換から，関数 $\bar{g}_1^{[K,L]}(x)$ が満たす非斉次項を含む q 差分方程式

$$\begin{aligned}&\left(x - \frac{q^{\mu+1}\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\right)\left(x - \frac{q^{\mu+1}\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\bar{g}_1^{[K,L]}(x/q) + q\left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{q}{\alpha_2}\right)\bar{g}_1^{[K,L]}(qx)\\ &-\left\{(1+q)x^2 - \left(q^{\mu+1}\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{q}{\alpha_1} + \frac{q^2}{\alpha_2}\right)x + \left(1 + \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\frac{q^{\mu+2}}{\alpha_1\alpha_2}\right\}\bar{g}_1^{[K,L]}(x)\\ &+\frac{q^2(1-q)}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\left(\frac{\alpha_2}{q}x - q^\lambda\right)Q^{[K,L]}(x/q) + \left(1 - \frac{\alpha_2}{q}x\right)Q^{[K,L]}(x)\right\} = 0,\\ &\qquad Q^{[K,L]}(x) = P_\lambda(x, q^{K-1}\xi)y(q^K\xi) - P_\lambda(x, q^L\xi)y(q^{L+1}\xi)\end{aligned} \tag{4.12}$$

が得られ，非斉次項は

$$\begin{aligned}\frac{q^2(1-q)(1-q^\lambda)}{\alpha_1\alpha_2}\Bigg((q^K\xi)^\mu&\frac{(q^{\lambda+K+1}\xi/x, q^K\xi\alpha_1, q^{K-1}\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^K\xi/x, q^K\xi\beta_1, q^K\xi\beta_2; q)_\infty}\\ &- (q^{L+1}\xi)^\mu\frac{(q^{\lambda+L+2}\xi/x, q^{L+1}\xi\alpha_1, q^L\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{L+1}\xi/x, q^{L+1}\xi\beta_1, q^{L+1}\xi\beta_2; q)_\infty}\Bigg)\end{aligned} \tag{4.13}$$

と計算できる．

$\bar{g}_1^{[K,L]}(x)$ は P による相似変換より

$$\begin{aligned}\bar{g}_1^{[K,L]}(x) &= -\widehat{y}_0^{[K,L]}(x) + \widehat{y}_1^{[K,L]}(x)\\ &= (q-1)\sum_{n=K}^{L} c_n, \quad c_n = (q^n\xi)^\mu\frac{(q^{\lambda+n+1}\xi/x, q^{n+1}\xi\alpha_1, q^n\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{n+1}\xi/x, q^n\xi\beta_1, q^n\xi\beta_2; q)_\infty}\end{aligned} \tag{4.14}$$

と書け，これから，$\mu > 0$ ならば $\bar{g}_1^{[K,L]}(x)$ は $K \to -\infty$，$L \to +\infty$ で収束することがわかる．よって，

$$\bar{g}_1(x) = \lim_{\substack{K\to-\infty\\ L\to+\infty}} \bar{g}_1^{[K,L]}(x) = (q-1)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(q^n\xi)^\mu\frac{(q^{\lambda+n+1}\xi/x, q^{n+1}\xi\alpha_1, q^n\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{n+1}\xi/x, q^n\xi\beta_1, q^n\xi\beta_2; q)_\infty} \tag{4.15}$$

と書ける．

非斉次項 (4.13) の $K \to -\infty$，$L \to +\infty$ での極限について調べる．$\mu > 0$，$\vartheta_q(x) =$

$(x, q/x, q; q)_\infty$，$q^\lambda = q^\mu \beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)$ より

$$\lim_{L\to+\infty}(q^{L+1}\xi)^\mu \frac{(q^{\lambda+L+2}\xi/x, q^{L+1}\xi\alpha_1, q^L\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{L+1}\xi/x, q^{L+1}\xi\beta_1, q^{L+1}\xi\beta_2; q)_\infty} = 0, \tag{4.16}$$

$$\lim_{K\to-\infty}(q^{K}\xi)^\mu \frac{(q^{\lambda+K+1}\xi/x, q^{K}\xi\alpha_1, q^{K-1}\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{K}\xi/x, q^{K}\xi\beta_1, q^{K}\xi\beta_2; q)_\infty} = \xi^\mu \frac{\vartheta_q(q^{\lambda+1}\xi/x)\vartheta_q(\xi\alpha_1)\vartheta_q(q^{-1}\xi\alpha_2)}{\vartheta_q(\xi/x)\vartheta_q(\xi\beta_1)\vartheta_q(\xi\beta_2)}. \tag{4.17}$$

命題 4.2. $\mu > 0$ ならば，関数 $\bar{g}_1(x)$(4.15) は

$$\begin{aligned}&\left(x - \frac{q^{\mu+1}\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\right)\left(x - \frac{q^{\mu+1}\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\bar{g}_1(x/q) + q\left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{q}{\alpha_2}\right)\bar{g}_1(qx) \\ &- \left\{(1+q)x^2 - \left(q^{\mu+1}\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{q}{\alpha_1} + \frac{q^2}{\alpha_2}\right)x + \left(1 + \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\frac{q^{\mu+2}}{\alpha_1\alpha_2}\right\}\bar{g}_1(x) \\ &+ \frac{q^2(1-q)(1-q^\lambda)}{\alpha_1\alpha_2}\xi^\mu \frac{\vartheta_q(q^{\lambda+1}\xi/x)\vartheta_q(\xi\alpha_1)\vartheta_q(q^{-1}\xi\alpha_2)}{\vartheta_q(\xi/x)\vartheta_q(\xi\beta_1)\vartheta_q(\xi\beta_2)} = 0\end{aligned} \tag{4.18}$$

を満たす．ただし，$q^\lambda = q^\mu\beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)$.

(4.18) は (4.8) の非斉次方程式への拡張である．

命題 4.3. $\xi = 1/\alpha_1$ のとき

$$\begin{aligned}\bar{g}_1(x) = (q-1)\alpha_1^{-\mu}&\frac{(q^{\lambda+1}/(\alpha_1 x), q, \alpha_2/\alpha_1; q)_\infty}{(q/(\alpha_1 x), \beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_1; q)_\infty} \\ &\cdot {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q/(\alpha_1 x), \beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_1 \\ q^{\lambda+1}/(\alpha_1 x), \alpha_2/\alpha_1\end{matrix}; q, q^\mu\right).\end{aligned} \tag{4.19}$$

$\xi = 1/\alpha_2$，$\xi = q^{-\lambda}x$ のときも，$\bar{g}_1(x)$ は ${}_3\phi_2$ を用いて表すことができる．ξ がこれらの値のとき，非斉次項 (4.13) は消える．従って，これら 3 つの $\bar{g}_1(x)$ は斉次の q 差分方程式 (4.8) を満たす．

$\xi = 1/\beta_1, \xi = 1/\beta_2$，$\xi = x$ の場合については，$q^{\mu'}\alpha_1\alpha_2/(\beta_1\beta_2) = q^\mu$，すなわち $q^{\mu'} = q^\lambda$ という条件で関数 $P_\lambda(x, s)$，$y(x)$ を

$$P_\lambda(x,s) = (x/s)^\lambda \frac{(x/s; q)_\infty}{(q^{-\lambda}x/s; q)_\infty},\ y(x) = x^{\mu'}\frac{(q/(\beta_1 x), q/(\beta_2 x); q)_\infty}{(q/(\alpha_1 x), q/(\alpha_2 x); q)_\infty} \tag{4.20}$$

に取り替えて考える．

命題 4.4. $\xi = 1/\beta_1$ のとき

$$\begin{aligned}\bar{g}_1(x) = \frac{(1-q)\beta_1}{\alpha_1}x^\lambda &\frac{(\beta_1 x, q, q\beta_1/\beta_2; q)_\infty}{(q^{-\lambda}x\beta_1, \beta_1/\alpha_1, q\beta_1/\alpha_2; q)_\infty} \\ &\cdot {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-\lambda}\beta_1 x, \beta_1/\alpha_1, q\beta_1/\alpha_2 \\ \beta_1 x, q\beta_1/\beta_2\end{matrix}; q, q\right).\end{aligned} \tag{4.21}$$

$\xi = 1/\beta_2$，$\xi = x$ のときも，$\bar{g}_1(x)$ は ${}_3\phi_2$ を用いて表すことができる．これら 3 つの $\bar{g}_1(x)$ は非斉次

の q 差分方程式

$$\left(x-\frac{q^{\mu+1}\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\right)\left(x-\frac{q^{\mu+1}\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\bar{g}_1(x/q)+q\left(x-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x-\frac{q}{\alpha_2}\right)\bar{g}_1(qx) \tag{4.22}$$
$$-\left\{(1+q)x^2-\left(q^{\mu+1}\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{q}{\alpha_1}+\frac{q^2}{\alpha_2}\right)x+\left(1+\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\frac{q^{\mu+2}}{\alpha_1\alpha_2}\right\}\bar{g}_1(x)$$
$$+\frac{q(1-q)(1-q^{\lambda})}{\alpha_1}x^{\lambda+1}=0$$

を満たす．

また，これら 3 つの解の差は斉次の q 差分方程式 (4.8) を満たす．

参考文献

[1] 青本和彦，「q-超幾何関数における 3 つの基本問題（q-差分方程式，漸近展開，接続問題）」，Oka Symposium, 2006 年 3 月 19 日．

[2] Y. Arai, K. Takemura, On q-middle convolution and q-hypergeometric equations, submitted, arXiv:2209.02227.

[3] M. Dettweiler, S. Reiter, An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem. Algorithmic methods in Galois theory, *J. Symbolic Comput.* **30** (2000), 761–798.

[4] M. Dettweiler, S. Reiter, Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra* **318** (2007), 1–24.

[5] N. Hatano, R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of q-hypergeometric equation, *Funkcial. Ekvac.* **65** (2022), 159–190, arXiv:1910.12560.

[6] N. M. Katz, Rigid Local Systems, Princeton University Press, 1996.

[7] R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of confluent q-hypergeometric equations, in Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **366**, 161–180, Springer, Cham, 2021. arXiv:2005.13223.

[8] H. Sakai, M. Yamaguchi, Spectral types of linear q-difference equations and q-analog of middle convolution, *International Mathematics Research Notices* **2017** (2017), 1975–2013.

[9] 山口雅司，「線型 q 差分方程式の rigidity index と q middle convolution」，東京大学修士論文，2011.